УДК 62.50

Г. А. Леонов (С.-Петербург. ун-т, Россия)

ПРОБЛЕМА ОЦЕНКИ ЧИСЛА ЦИКЛОВ ДВУМЕРНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ СИСТЕМ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ

Two-dimensional quadratic systems are considered as the Lienard equation with certain special nonlinearities. Theorems on existence and on lack of cycles are given.

Викладено точку зору на двовимірні квадратичні системи як на рівняння Льєнара з деякими спеціальними нелінійностями. Наведено теореми про існування та відсутність циклів.

Стало хорошей традицией посвящать конференции и статьи о шестнадцатой проблеме Гильберта известным юбилейным датам [1, 2]. В продолжение этой традиции настоящая статья подготовлена к юбилею А. М. Самойленко.

Здесь последовательно излагается точка зрения на двумерные квадратичные системы как на уравнение Льенара

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \tag{1}$$

с некоторыми специальными функциями $f(x)$ и $g(x)$. Хорошо известно, что уравнение Льенара имеет очень наглядную механическую интерпретацию: оно описывает движение материальной точки под действием двух сил — упругой восстанавливающей силы $-g(x)$ и силы трения $-f(x)\dot{x}$. При этом коэффициент трения $f(x)$ может иметь противоположные знаки на интервалах (α, β) и $(-\infty, \alpha)$, $(\beta, +\infty)$. Описание механических моделей с положительным или меняющим знак коэффициентом трения $f(x)$ имеется в [3, 4].

При таком подходе к исследованию квадратичных двумерных систем имеется возможность применить весь богатый арсенал методов, приемов и результатов, развитых в рамках нелинейной механики для уравнения (1). Это, прежде всего, асимптотические методы [5, 6], так как естественным в качестве первого шага представляется изучение близкого к интегрируемому уравнения (1). В этом случае также естественно предположить малость коэффициента трения: $f(x) = \varepsilon f_0(x)$. Среди нелокальных методов важную роль играют прямой метод Ляпунова и метод Чаплыгина – Камке построения систем сравнения [7, 8].

Опишем сначала невырожденные преобразования перехода двумерной квадратичной системы к уравнению Льенара. При этом будем следовать работе [9]. Различные фрагменты этих преобразований имеются в работах [10 – 12].

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + \alpha_1x + \beta_1y, \\ \dot{y} &= a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + \alpha_2x + \beta_2y, \end{aligned} \tag{2}$$

где α_i, b_i, c_i, α_i, β_i — вещественные числа.

Предложение 1. *Не умаляя общности можно считать, что* $c_1 = 0$.

Доказательство. Предположим для определенности, что $a_2 \neq 0$ (в противном случае, сделав переобозначения $x \to y$, $y \to x$, сразу получим $c_1 = 0$). Введем далее линейное преобразование $x_1 = x + \nu y$, $y_1 = y$. Для доказательства предложения 1 достаточно показать, что для некоторых чисел ρ, k, ν справедливо тождество

$$\begin{aligned} (x+\nu y)^{\bullet} &= (a_1 + \nu a_2)x^2 + (b_1 + \nu b_2)xy + (c_1 + \nu c_2)y^2 + \\ &\quad + (\alpha_1 + \nu\alpha_2)x + (\beta_1 + \nu\beta_2)y = \\ &= \rho(x+\nu y)y + k(x+\nu y)^2 + (\alpha_1 + \nu\alpha_2)x + (\beta_1 + \nu\beta_2)y. \end{aligned}$$

Это тождество эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} k &= a_1 + \nu a_2, \\ k\nu^2 + \rho\nu &= c_1 + \nu c_2, \\ \rho + 2k\nu &= b_1 + \nu b_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Соотношения (3) выполнены, если

$$(a_1 + \nu a_2)\nu^2 - \nu(b_1 + \nu b_2) + (c_1 + \nu c_2) = 0.$$

Поскольку $a_2 \neq 0$, это уравнение третьей степени относительно ν всегда имеет вещественный корень. Таким образом, система уравнений (3) всегда имеет вещественное решение.

Далее будем полагать $c_1 = 0$.

Предложение 2. *Пусть $b_1 \neq 0$. Прямая линия $\beta_1 + b_1 x = 0$ на плоскости $\{x, y\}$ либо является инвариантной, либо бесконтактна для траекторий системы* (2).

Доказательство. Это утверждение следует из равенства

$$(\beta_1 + b_1 x)^\bullet = b_1 [(b_1 x + \beta_1) y + a_1 x^2 + \alpha_1 x] = \\ = \left[a_1 \left(\frac{\beta_1}{b_1}\right)^2 - \alpha_1 \left(\frac{\beta_1}{b_1}\right)\right] b_1$$

при $x = -\beta_1 / b_1$. Отсюда следует, что если

$$a_1 \left(\frac{\beta_1}{b_1}\right)^2 - \alpha_1 \left(\frac{\beta_1}{b_1}\right) = 0,$$

то прямая $\beta_1 + b_1 x = 0$ инвариантна, а если

$$a_1 \left(\frac{\beta_1}{b_1}\right)^2 - \alpha_1 \left(\frac{\beta_1}{b_1}\right) \neq 0,$$

то прямая $\beta_1 + b_1 x = 0$ бесконтактна.

Исключая далее из рассмотрения тривиальный случай, когда правая часть первого уравнения системы (1) не зависит от y, будем предполагать, что

$$|b_1| + |\beta_1| \neq 0. \tag{4}$$

Отсюда и из предложения 2 следует, что циклы системы (2) являются также циклами системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + \frac{a_1 x^2 + \alpha_1 x}{\beta_1 + b_1 x}, \\ \dot{y} &= \frac{a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2 + \alpha_2 x + \beta_2 y}{\beta_1 + b_1 x}. \end{aligned} \tag{5}$$

Кроме того, если $b_1 \neq 0$, то любой цикл полностью расположен либо в полуплоскости $\{b_1 x + \beta_1 < 0\}$, либо в полуплоскости $\{b_1 x + \beta_1 > 0\}$.

Введем в рассмотрение преобразование

$$\begin{aligned} \bar{y} &= y + \frac{a_1 x^2 + \alpha_1 x}{\beta_1 + b_1 x}, \\ \bar{x} &= x. \end{aligned}$$

В этих новых фазовых переменных (здесь мы опускаем черточки над переменными: $\bar{x} \to x$, $\bar{y} \to y$) система (5) примет вид

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -Q(x)y^2 - R(x)y - P(x), \tag{6}$$

где

$$Q(x) = \frac{-c_2}{\beta_1 + b_1 x},$$

$$R(x) =$$

$$= -\left(\frac{(b_1 b_2 - 2a_1 c_2 + a_1 b_1)x^2 + (b_2\beta_1 + b_1\beta_2 - 2\alpha_1 c_2 + 2a_1\beta_1)x + \alpha_1\beta_1 + \beta_1\beta_2}{(\beta_1 + b_1 x)^2} \right),$$

$$P(x) = -\left(\frac{a_2 x^2 + \alpha_2 x}{\beta_1 + b_1 x} - \frac{(b_2 x + \beta_2)(a_1 x^2 + \alpha_1 x)}{(\beta_1 + b_1 x)^2} + \frac{c_2 (a_1 x^2 + \alpha_1 x)^2}{(\beta_1 + b_1 x)^3} \right).$$

Из предложения 2 и условия (4) следует, что циклы системы (6) являются также циклами системы

$$\dot{x} = y e^{p(x)}, \qquad \dot{y} = [-Q(x)y^2 - R(x)y - P(x)]\, e^{p(x)}$$

где $p(x)$ — некоторый интеграл функции $Q(x)$.

Из этой системы с помощью замены $\bar{x} = x$, $\bar{y} = y e^{p(x)}$ получим

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -f(x)y - g(x). \tag{7}$$

Здесь вновь после указанного выше преобразования опущены черточки над переменными x и y.

Итак, система (2) может быть приведена с помощью указанных выше невырожденных замен к уравнению Льенара (7) с функциями

$$f(x) = R(x)e^{p(x)}, \qquad g(x) = P(x)e^{2p(x)}.$$

Из критерия Бендиксона сразу получим следующий результат.

Предложение 3. *Если* $R(x) \neq 0$ *для всех* $x \in (\nu_1, \nu_2)$, *то система* (7) *не имеет циклов, целиком расположенных в множестве* $\{x \in (\nu_1, \nu_2),\ y \in \boldsymbol{R}^1\}$.

Это утверждение можно в некоторых случаях усилить, рассматривая функцию Ляпунова

$$V(x, y) = \left(y + \int\limits_{\alpha}^{x} f(s)ds \right)^2 + 2\int\limits_{0}^{x} g(x)dx,$$

где α — некоторое число.

Для производной функции $V(x, y)$ в силу системы (7) получаем

$$\dot{V}(x, y) = -2g(x)\int\limits_{\alpha}^{x} f(s)ds.$$

Отсюда вытекает следующий результат.

Теорема 1. *Если для интервала* (ν_1, ν_2) *найдется число* α *такое, что*

$$g(x)\int\limits_{\alpha}^{x} f(s)ds \neq 0 \qquad \forall x \in (\nu_1, \nu_2), \tag{8}$$

то система (7) *не имеет циклов, целиком расположенных в множестве* $\{x \in (\nu_1, \nu_2),\ y \in \boldsymbol{R}^1\}$.

Поскольку все циклы системы (7) пересекают множество $\{x \in \boldsymbol{R}^1,\ y = 0\}$, часто бывает полезно локализовать точки пересечения циклов с этой прямой. Приведем здесь теоремы о такой локализации.

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие соотношения*:

$$f(x) \neq 0 \qquad \forall\, x \in (\nu_1, \nu_2), \tag{9}$$

$$\int\limits_{\nu_1}^{x} g(s)\,ds < 0 \qquad \forall\, x \in (\nu_1, \nu_2), \tag{10}$$

$$\int\limits_{\nu_1}^{\nu_2} g(s)\,ds = 0. \tag{11}$$

Тогда система (7) *не имеет циклов, пересекающих множество* $\{x \in (\nu_1, \nu_2),$ $y = 0\}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$V(x, y) = y^2 + 2\int\limits_{\nu_1}^{x} g(s)\,ds.$$

Для производной функции $V(x, y)$ в силу системы (7) имеем

$$\dot V(x, y) = -2f(x)y^2. \tag{12}$$

Из соотношений (10) и (11) следует, что кривая, описываемая уравнением

$$y^2 + 2\int\limits_{\nu_1}^{x} g(s)\,ds = 0, \qquad x \in [\nu_1, \nu_2],$$

является замкнутой. Из (9) и (12) вытекает, что эта кривая является бесконтактной при $x \in (\nu_1, \nu_2)$, $y \neq 0$.

Поскольку цикл не может пересекать такую бесконтактную замкнутую кривую, невозможно также в силу предложения 3 пересечение цикла и с множеством

$$\{x \in (\nu_1, \nu_2),\ y = 0\} \subset \left\{x \in (\nu_1, \nu_2),\ y^2 + 2\int\limits_{\nu_1}^{x} g(s)\,ds \leq 0\right\}.$$

Теорема 3. *Пусть для некоторого числа* $\alpha \in (\nu_1, \nu_2)$ *выполнены следующие условия:*

$$f(x) > 0 \qquad \forall\, x \in (\nu_1, \alpha), \tag{13}$$

$$g(x)\int\limits_{\alpha}^{x} f(x)\,dx > 0 \qquad \forall\, x \in (\alpha, \nu_2), \tag{14}$$

$$\int\limits_{\nu_1}^{x} g(s)\,ds < 0 \qquad \forall\, x \in (\nu_1, \nu_2), \tag{15}$$

$$\int\limits_{\nu_1}^{\nu_2} g(s)\,ds = 0. \tag{16}$$

Тогда система (7) *не имеет циклов, пересекающих множество* $\{x \in (\nu_1, \alpha), y = 0\}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$V(x, y) = (y + v(x))^2 + 2\int_{\nu_1}^{x} g(s)\,ds,$$

где $v(x) = 0$ при $x \in (\nu_1, \alpha)$,

$$v(x) = \int_{\alpha}^{x} f(s)\,ds$$

при $x \in (\alpha, \nu_2)$. Для производной этой функции в силу системы (7) имеем

$$\dot{V}(x, y) = -2f(x)y^2 \qquad \forall\, x \in (\nu_1, \alpha), \tag{17}$$

$$\dot{V}(x, y) = -2g(x)\int_{\alpha}^{x} f(s)\,ds \qquad \forall\, x \in (\alpha, \nu_2). \tag{18}$$

Из соотношений (15) и (16) следует, что кривая, описываемая уравнением

$$(y + v(x))^2 + 2\int_{\nu_1}^{x} g(s)\,ds = C, \qquad x \in [\nu_1, \nu_2], \quad C \in \boldsymbol{R}^1, \quad C \le 0,$$

является замкнутой. Из (13), (14), (17), (18) вытекает, что эта кривая является бесконтактной при $x \neq \alpha$, $y \neq 0$. Поскольку цикл не может пересекать такое семейство бесконтактных замкнутых кривых, невозможно также пересечение цикла и с множеством

$$\{x \in (\nu_1, \alpha),\ y = 0\} \subset \left\{x \in (\nu_1, \nu_2),\ (y + v(x))^2 + 2\int_{\nu_1}^{x} g(s)\,ds \le 0\right\}.$$

Теорема 4. *Пусть для некоторого числа* $\alpha \in (\nu_1, \nu_2)$ *выполнены следующие условия:*

$$g(x)(x - \alpha) > 0 \qquad \forall\, x \in (\nu_1, \nu_2), \quad x \neq \alpha, \tag{19}$$

$$(x - a)\int_{\alpha}^{x} f(x)\,dx > 0 \qquad \forall\, x \in (\nu_1, \nu_2), \quad x \neq \alpha, \tag{20}$$

$$\int_{\nu_1}^{\nu_2} g(x)\,dx = 0. \tag{21}$$

Тогда система (7) *не имеет циклов, пересекающих множество* $\{x \in (\nu_1, \nu_2), y = 0\}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$V(x, y) = (y + v(x))^2 + 2\int_{\nu_1}^{x} g(s)\,ds,$$

где

$$v(x) = \int_{\alpha}^{x} f(s)\,ds \qquad \forall\, x \in (\nu_1, \nu_2).$$

Для производной этой функции в силу системы (7) имеем

$$\dot{V}(x, y) = -2g(x)\int_{\alpha}^{x} f(s)ds \qquad \forall\, x \in (\nu_1, \nu_2). \tag{22}$$

Из соотношения (21) следует, что кривые, описываемые уравнением

$$V(x, y) = C, \quad x \in [\nu_1, \nu_2], \quad C \le 0,$$

являются замкнутыми. Из (19), (20) и (22) следует, что это семейство кривых бесконтактно при $x \neq \alpha$. Но тогда ясно, что через множество $\Omega = \{V(x, y) \le 0,\ x \in [\nu_1, \nu_2]\}$ не может проходить цикл системы (7).

Из предположения (19) следует, что если некоторая точка $x = x_0 \in (\alpha, \nu_2)$, $y = 0$ принадлежит циклу системы (7), то существуют числа $t_1 < 0 < t_2$ такие, что $x(t_1, x_0, 0) = x(t_2, x_0, 0) = \alpha$, $y(t_1, x_0, 0)\, y(t_2, x_0, 0) < 0$, $x(t, x_0, 0) \in (\alpha, x_0)$ $\forall\, t \in (t_1, t_2)$, $t \neq 0$. Отсюда и из условий (19), (21) следует, что существует число $\tau \in (t_1, t_2)$, для которого точка $x(\tau, x_0, 0)$, $y(\tau, x_0, 0)$ принадлежит множеству Ω. Последнее противоречит доказанному ранее свойству множества Ω.

Аналогично рассматривается случай $x_0 \in (\nu_1, \alpha)$.

В качестве примера применения полученных здесь результатов к системе вида (2) рассмотрим систему [11, 12]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - \delta x + lx^2 + mxy, \\ \dot{y} &= x(1 + x), \end{aligned} \tag{23}$$

где δ, l, m — вещественные числа, $m > 0$. Эта система может быть приведена к виду (7) с

$$f(x) = \frac{-lmx^2 + 2lx + \delta}{(1 - mx)^2}, \qquad g(x) = \frac{x^2 + x}{1 - mx}.$$

Легко видеть, что все циклы такой системы расположены в полосе $\{-1 < x < m^{-1},\ y \in \boldsymbol{R}^1\}$ (рис. 1) и пересекают множество $\{-1 < x < 0,\ y = 0\}$.

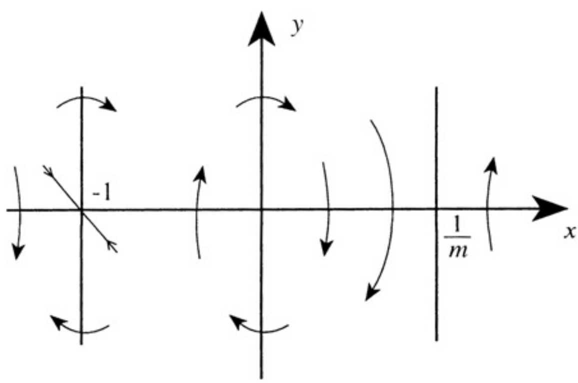

Рис. 1

Здесь полагаем $\nu_1 = -1$, $\alpha = 0$, $\nu_2 = \gamma$, где γ — корень уравнения

$$(m + 1)\ln\left(\frac{1 - m\gamma}{1 + m}\right) + \frac{m}{2}(\gamma + 1)\big(m(\gamma + 1) + 2\big) = 0.$$

Заметим, что γ выбрано таким образом, поскольку

$$\int_{-1}^{\gamma} \frac{x^2+x}{1-mx}\,dx = -\frac{1}{m^3}\left[(m+1)\ln\left(\frac{1-m\gamma}{1+m}\right)+\frac{m}{2}(\gamma+1)\big(m(\gamma+1)+2\big)\right].$$

В рассматриваемом случае при $\delta \neq 0$ условие (20) можно записать следующим образом:

$$\int_0^x f(s)\,ds \neq 0 \qquad \forall\, x \in (-1, \gamma).$$

В самом деле, если в соотношении (20) имеется неравенство противоположного знака, то, сделав замену $t \to -t$, получим выполнение условия теоремы 4.

Таким образом, из теоремы 3 следует, что если

$$\int_0^x \frac{lms^2 - 2ls - \delta}{(1-ms)^2}\,ds \neq 0 \qquad \forall\, x \in (-1, \gamma),$$

то система (23) не имеет циклов.

Эта оценка улучшает результаты об отсутствии циклов в системе (23), полученные в [9, 11].

Перейдем теперь к рассмотрению уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-f(x)y - g(x)}{y}, \tag{24}$$

эквивалентного системе (7).

Обозначим через $y_1(x, x_0)$ решение уравнения (24), расположенное в полуплоскости $\{y \geq 0\}$, с начальными данными $y_1(x_0, x_0) = 0$ и через $y_2(x, x_0)$ решение уравнения (24), расположенное в полуплоскости $\{y \leq 0\}$ с начальными данными $y_2(x_0, x_0) = 0$. Будем предполагать, что для любого $x_0 \in (\tau_1, \tau_2)$ эти решения определены соответственно на интервалах $(x_0, x_1(x_0))$ и $(x_0, x_2(x_0))$. При этом $y_1(x_1(x_0), x_0) = y_2(x_2(x_0), x_0) = 0$ (рис. 2).

Пусть

$$\varphi(x_0) = \int_{x_0}^{x_3(x_0)} \big[f(x)\big(y_1(x, x_0) - y_2(x, x_0)\big)\big]\,dx,$$

где $x_3(x_0) = \min\big(x_1(x_0), x_2(x_0)\big)$.

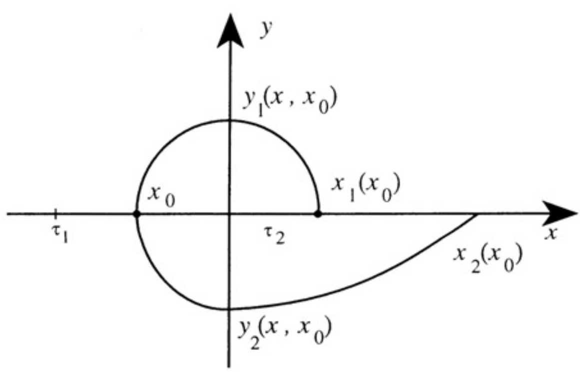

Рис. 2

Лемма 1. *Цикл системы* (7) *проходит через точку* $x = x_0$, $y = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi(x_0) = 0$.

Доказательство. Перепишем уравнение (24) в виде

$$y\frac{dy}{dx} = -f(x)y - g(x) \tag{25}$$

и проинтегрируем обе части этого равенства от x_0 до $x_3(x_0)$, подставляя в (25) соответственно функции $y_1(x, x_0)$ и $y_2(x, x_0)$. Тогда получим следующие равенства:

$$\frac{1}{2}y_1(x_3(x_0), x_0)^2 = -\int_{x_0}^{x_3(x_0)}[f(x)\,y_1(x, x_0) + g(x)]dx,$$

$$\frac{1}{2}y_2(x_3(x_0), x_0)^2 = -\int_{x_0}^{x_3(x_0)}[f(x)\,y_2(x, x_0) + g(x)]dx.$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$\frac{1}{2}(y_1(x_3(x_0), x_0)^2 - y_2(x_3(x_0), x_0)^2) = -\varphi(x_0).$$

Последнее равенство доказывает утверждение леммы.

Определение 1. *Будем говорить, что цикл γ является внутренне полупредельным циклом, если пересечение внутренней области $\Omega(\gamma)$, границей которой является γ, с некоторой достаточно малой окрестностью γ не содержит циклов.*

Определение 2. *Будем говорить, что цикл γ является внешне полупредельным циклом, если пересечение внешней области $\boldsymbol{R}^2 \setminus \overline{\Omega}(\gamma)$, границей которой является γ, с некоторой достаточно малой окрестностью γ не содержит циклов.*

Из леммы 1 сразу вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. *Если на интервале (τ_1, τ_2) функция $\varphi(x_0)$ имеет n перемен знака, то система* (7) *имеет не менее n внутренне полупредельных циклов, пересекающих множество $\{x \in (\tau_1, \tau_2),\ y = 0\}$.*

Лемма 3. *В предположениях леммы* 2 *система* (7) *имеет не менее n внешне полупредельных циклов, пересекающих множество $\{x \in (\tau_1, \tau_2),\ y = 0\}$.*

Рассмотрим теперь уравнение (24) в случае

$$f(x) = \varepsilon f_0(x), \qquad g(x) = g_0(x) + \varepsilon g_1(x),$$

где ε — малый параметр. Ясно, что при $\varepsilon = 0$ соответствующая система (7) является интегрируемой.

В рассматриваемом случае функции $y_1(x, x_0)$ и $y_2(x, x_0)$ можно записать в виде

$$y_1(x, x_0) = F(x) + O(\sqrt{\varepsilon}),$$

$$y_2(x, x_0) = -F(x) + O(\sqrt{\varepsilon}),$$

где

$$F(x) = \sqrt{-2\int_{x_0}^{x} g_0(s)ds}.$$

Отсюда следует, что функция $\varphi(x_0)$ в этом случае имеет вид

$$\varphi(x_0) = 2\varepsilon\int_{x_0}^{x_3(x_0)}[f_0(x)\,F(x)]dx + O(\varepsilon^{3/2}) = 2\varepsilon\int_{x_0}^{u(x_0)} f_0(x)\,F(x)dx + O(\varepsilon^{3/2}). \tag{26}$$

Здесь $u(x_0)$ — нуль функции $F(x)$ такой, что $F(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in (x_0, u(x_0))$. В равенстве (26) используется соотношение $x_3(x_0) = u(x_0) + O(\varepsilon)$.

Из формулы (26) и леммы 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 5. *Если функция*

$$\psi(x_0) = \int\limits_{x_0}^{u(x_0)} f_0(x)\, F(x)\, dx$$

имеет n перемен знака на интервале (τ_1, τ_2), то при достаточно малом ε система (7) имеет не менее n внутренне полупредельных циклов, пересекающих множество $\{x \in (\tau_1, \tau_2),\ y = 0\}$.

Теорема 6. *В предположениях теоремы 5 система (7) при достаточно малом ε имеет не менее n внешне полупредельных циклов, пересекающих множество $\{x \in (\tau_1, \tau_2),\ y = 0\}$.*

Положим теперь, что функции $Q(x)$, $R(x)$ и $P(x)$ имеют вид

$$Q(x) = \frac{A_0}{1 + B_0\, x},$$

$$R(x) = -\,\varepsilon\,\frac{\alpha_0\, x^2 + \beta_0\, x + \delta_0}{(1 + B_0\, x)^2},$$

$$P(x) = -\,\frac{D_0\, x^4 + E_0\, x^3 + F_0\, x^2 + G_0}{(1 + B_0\, x)^3},$$

где ε — малый параметр, A_0, B_0, α_0, β_0, δ_0, D_0, E_0, F_0, G_0 — некоторые числа. Положим далее $\lambda_0 = -A_0/B_0$ и предположим, что $B_0 \neq 0$, $\lambda_0 \neq -1$, $\lambda_0 \neq -1/2$, $\lambda_0 \neq 0$, $\lambda_0 \neq 1/2$, $\lambda_0 \neq 1$. Тогда

$$\begin{aligned}
F(x) = \sqrt{2}\,\Bigg\{ & \frac{D_0}{2B_0^5(\lambda_0 - 1)}\left[(1 + B_0\, x_0)^{2(1-\lambda_0)} - (1 + B_0\, x)^{2(1-\lambda_0)}\right] + \\
& + \left(\frac{E_0}{B_0^4} - 4\,\frac{D_0}{B_0^5}\right)\frac{1}{(2\lambda_0 - 1)}\left[(1 + B_0\, x_0)^{1-2\lambda_0} - (1 + B_0\, x)^{1-2\lambda_0}\right] + \\
& + \left(6\,\frac{D_0}{B_0^5} - 3\,\frac{E_0}{B_0^4} + \frac{F_0}{B_0^3}\right)\frac{1}{2\lambda_0}\left[(1 + B_0\, x_0)^{-2\lambda_0} - (1 + B_0\, x)^{-2\lambda_0}\right] + \\
& + \left(\frac{G_0}{B_0^2} - 2\,\frac{F_0}{B_0^3} + 3\,\frac{E_0}{B_0^4} - 4\,\frac{D_0}{B_0^5}\right)\frac{1}{2\lambda_0 + 1}\,\times \\
& \times \left[(1 + B_0\, x_0)^{-(2\lambda_0+1)} - (1 + B_0\, x)^{-(2\lambda_0+1)}\right] + \\
& + \left(\frac{D_0}{B_0^5} - \frac{E_0}{B_0^4} + \frac{F_0}{B_0^3} - \frac{G_0}{B_0^2}\right)\frac{1}{2(\lambda_0 + 1)}\,\times \\
& \times \left[(1 + B_0\, x_0)^{-2(\lambda_0+1)} - (1 + B_0\, x)^{-2(\lambda_0+1)}\right]\Bigg\}^{1/2}.
\end{aligned}$$

Отметим, что иногда функцию $\psi(x_0)$ называют функцией Понтрягина. При этом в предположении, что $\psi'(x_0) \neq 0$ в тех точках z, где $\psi(z) = 0$, сразу получают при достаточно малом ε существование предельного цикла, пересекающего некоторую малую окрестность точки $\{x = z,\ y = 0\}$ [6]. В рассматриваемом случае аналитическое исследование нулей функции $\psi(z)$ представляется весьма затруднительным. Поэтому на наш взгляд более предпочтительным при таком подходе является исследование числа перемен знака $\psi(z)$. В этом случае возможны компьютерные доказательства и постановка компьютерных экспериментов. В [14] была поставлена серия таких экспериментов. В одном из них показана возможность существования четырех предельных циклов, окружающих стационарную точку и рождающихся через бифуркации полуустойчивых циклов.

1. *Albrecht F.* Polynomial Liénard equations and Hilberts 16th problem // Int. Meeting on Ordinary Different. Equat. and their Appl. on occasion of the 70th birthday of Roberto Conti and Gaetano Villari. – Firenze, Italy, 1993. – P. 35–47.
2. *Symposium on* Planar Nonlinear Dynamical Systems on the occasion of the 65th birthday of J. W. Reyn (Abstracts). – Netherlands: Delft, 1995. – 21 p.
3. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. – М.: Физматгиз, 1959. – 916 с.
4. *Leonov G. A.* Pendulum with positive and negative dry friction. Continuum of homoclinic orbits // Int. J. Bifurcation and Chaos. – 1995. – **5**, № 1. – P. 251–254.
5. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
6. *Баутин Н. Н., Леонтович Е. А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. – М.: Наука, 1990. – 496 с.
7. *Барбашин Е. А., Табуева В. А.* Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. – М.: Наука, 1969. – 299 с.
8. *Leonov G. A., Burkin I. M., Shepeljavyj F. I.* Frequency methods in oscillation theory. – Dordrecht: Kluwer, 1996. – 403 p.
9. *Leonov G. A.* Two-dimensional quadratic system as the Lienard equation // J. Dynamics and Different. Equat. – 1997. – № 2. – P. 118–123.
10. *Coppel W. A.* The limit cycle configurations of quadratic systems // Research report № 32-1986. Austral. Nat. Univ., 1986. – 12 p.
11. *Ye Yan-Qian and etc.* Theory of limit cycles. – Rh. Island: Amer. Math. Soc., 1986. – **66**. – 398 p.
12. *Kooij R. E.* Limit cycles in polynomial systems. – Delft: Techn. Univ., 1993. – 159 p.
13. *Zegeling A.* Separatrix cycles and multiple limit cycles in a class of quadratic systems // J. Different. Equat. – 1994. – **113**. – P. 355–380.
14. *Leonov G. A., Ilyin I. V., Komarchev I. A.* Cycles of two-dimensional quadratric systems. Analytical methods and computer experiments. – 1997. – 18 p. – (Preprint TR-97-12 / Department of Informatics; Iniv. Paris-12).

Получено 15.10.97