УДК 517.946.9

Ю. А. Митропольский (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ПОСТРОЕНИИ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ БРЕЗЕРТОНА*

We consider the application of asymptotic method of nonlinear mechanics when constructing first and second approximations of a solution of the Bretherton equation.

Розглядається застосування асимптотичного методу нелінійної механіки для побудови першого та другого наближень розв'язку рівняння Брезертона.

Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} + u_{xxxx} + u_{xx} + u = \varepsilon f(\nu t, u, u_t, u_x), \tag{1}$$

которое при $f(\nu t, u, u_t, u_x) = u^3$ превращается в модельное уравнение Брезертона [1]

$$u_{tt} + u_{xxxx} + u_{xx} + u = \varepsilon u^3. \tag{2}$$

Здесь

$$u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xxxx} = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}.$$

При $\varepsilon = 0$ уравнение (1) (а также уравнение (2)) вырождается в невозмущенное уравнение

$$u_{tt} + u_{xxxx} + u_{xx} + u = 0, \tag{3}$$

которое допускает решение в форме бегущей волны

$$u = a\cos\psi, \quad \psi = kx - \omega t + \varphi, \tag{4}$$

в котором a и φ — постоянные, а k и ω удовлетворяют дисперсионному соотношению

$$\omega^2 = k^4 - k^2 + 1. \tag{5}$$

Ниже будет изложена основная схема построения первого и второго приближений асимптотического решения согласно основным методам нелинейной механики [2] (метода КБМ). Это может оказаться полезным при рассмотрении конкретных задач естествознания, приводящих к необходимости исследования волновых процессов с учетом воздействия на них нелинейных возмущающих сил, зависящих от времени, от внешних случайных возмущений и других факторов.

Итак, переходя к построению приближенного асимптотического решения уравнения (1), предположим, что $\varepsilon > 0$ — малый параметр, функция $f(\nu t, u, u_t, u_x)$ периодическая по $\theta = \nu t$ (или почти периодическая) и имеет достаточное число производных по остальным своим аргументам для всех их конечных значений.

Тогда согласно известным положениям асимптотических методов нелинейной механики (метода КБМ) асимптотическое решение уравнения (1) (при $\varepsilon \neq 0$) следует искать в виде следующего ряда с медленно меняющимися параметрами** [3, 4]:

---

* Выполнена при частичной поддержке Международной Соросовской Программы поддержки программы просвещения в области точных наук и проекта Государственного фонда фундаментальных исследований № 1.4/49.

** В дальнейшем для упрощения выкладок будем предполагать, что правая часть уравнения (1) не зависит от νt.

$$u = a(t, x)\cos\psi(t, x) + \varepsilon u_1(a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi) + \varepsilon^3 \ldots, \quad \psi = kx - \omega t + \varphi(t, x), \tag{6}$$

в котором медленно меняющиеся параметры $a(t, x)$ и $\varphi(t, x)$ (амплитуда первой гармоники и фаза) удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a}{\partial t} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \varepsilon^3 \ldots, \\
\frac{\partial a}{\partial x} &= \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \varepsilon^3 \ldots, \\
\frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \varepsilon C_1(a) + \varepsilon^2 C_2(a) + \varepsilon^3 \ldots, \\
\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \varepsilon D_1(a) + \varepsilon^2 D_2(a) + \varepsilon^3 \ldots,
\end{aligned} \tag{7}$$

в которой в дальнейшем, как и выше, будем обозначать

$$\frac{\partial a}{\partial t} = a_t, \quad \frac{\partial a}{\partial x} = a_x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi_t, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \varphi_x, \quad \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = a_{tt}, \quad \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = a_{xx} \quad \text{и т. д.}$$

При этом очевидно, что

$$\begin{aligned}
\psi_t &= -\omega + \varepsilon C_1(a) + \varepsilon^2 C_2(a) + \varepsilon^3 \ldots, \\
\psi_x &= k + \varepsilon D_1(a) + \varepsilon^2 D_2(a) + \varepsilon^3 \ldots.
\end{aligned} \tag{8}$$

Дифференцируя правые части системы уравнений (7), получаем выражения, необходимые нам для последующих выкладок (с точностью до величин порядка ε^2):

$$\begin{aligned}
(a_t)^2 &= \varepsilon^2 A_1^2(a) + \varepsilon^3 \ldots, & a_{tt} &= \varepsilon^2 \frac{dA_1(a)}{da} A_1(a) + \varepsilon^3 \ldots, \\
(a_x)^2 &= \varepsilon^2 B_1^2(a) + \varepsilon^3 \ldots, & a_{xx} &= \varepsilon^2 \frac{dB_1(a)}{da} B_1(a) + \varepsilon^3 \ldots, \\
(\varphi_t)^2 &= \varepsilon^2 C_1^2(a) + \varepsilon^3 \ldots, & \varphi_{tt} &= \varepsilon^2 \frac{dC_1(a)}{da} A_1(a) + \varepsilon^3 \ldots, \\
(\varphi_x)^2 &= \varepsilon^2 D_1^2(a) + \varepsilon^3 \ldots, & \varphi_{xx} &= \varepsilon^2 \frac{dD_1(a)}{da} B_1(a) + \varepsilon^3 \ldots.
\end{aligned} \tag{9}$$

Обозначим

$$u^0(a, \psi) = a(t, x)\cos\psi(t, x). \tag{10}$$

Дифференцируя слагаемые ряда (6) по t и по x, можем записать

$$u_t^0 = a_t \cos\psi - a\varphi_t \sin\psi + a\omega\sin\psi, \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
u_{tt}^0 = {} & 2[a_t\omega\sin\psi + a\varphi_t\omega\cos\psi] + a_{tt}\cos\psi - a\varphi_{tt}\sin\psi - \\
& - 2a_t\varphi_t\sin\psi - a\varphi_t^2\cos\psi - a\omega^2\cos\psi,
\end{aligned} \tag{12}$$

$$u_x^0 = a_x\cos\psi - a\varphi_x\sin\psi - ak\sin\psi, \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
u_{xx}^0 = {} & -2[a_x k\sin\psi + a\varphi_x k\cos\psi] + a_{xx}\cos\psi - a\varphi_{xx}\sin\psi - \\
& - 2a_x\varphi_x\sin\psi - a\varphi_x^2\cos\psi - ak^2\cos\psi,
\end{aligned} \tag{14}$$

$$u^0_{xxxx} = 4[a_x k^3 \sin\psi + a\varphi_x k^3 \cos\psi] + 6[2a_x\varphi_x k^2 + a\varphi_{xx}k^2]\sin\psi -$$
$$- 6[a_{xx}k^2 - a\varphi_x^2 k^2]\cos\psi + \varepsilon^3 \ldots + ak^4\cos\psi. \tag{15}$$

Далее находим производные по t и по x для $u_1(a, \psi)$:

$$u_{1t}(a, \psi) = u_{1a}(a, \psi)a_t + u_{1\psi}(a, \psi)\varphi_t - u_{1\psi}(a, \psi)\omega, \tag{16}$$

$$u_{1tt}(a, \psi) = -2[\omega a_t u_{1\psi a}(a, \psi) + \omega\varphi_t u_{1\psi\psi}(a, \psi)] + \omega^2 u_{1\psi\psi}(a, \psi) + \varepsilon^2 \ldots, \tag{17}$$

$$u_{1x}(a, \psi) = a_x u_{1a}(a, \psi) + \varphi_x u_{1\psi}(a, \psi) + ku_{1\psi}(a, \psi), \tag{18}$$

$$u_{1xx}(a, \psi) = 2[ka_x u_{1a\psi}(a, \psi) + k\varphi_x u_{1\psi\psi}(a, \psi)] + k^2 u_{1\psi\psi}(a, \psi) + \varepsilon^3 \ldots, \tag{19}$$

$$u_{1xxxx}(a, \psi) = 4[k^3 a_x u_{1a\psi\psi\psi}(a, \psi) + k^3\varphi_x u_{1\psi\psi\psi\psi}(a, \psi)] +$$
$$+ k^4 u_{1\psi\psi\psi\psi}(a, \psi) + \varepsilon^3 \ldots . \tag{20}$$

Для слагаемого $u_2(a, \psi)$ с точностью до величин второго порядка включительно относительно ε имеем

$$u_{2t}(a, \psi) = -u_{2\psi}(a, \psi)\omega + \varepsilon^3 \ldots, \qquad u_{2tt}(a, \psi) = u_{2\psi\psi}(a, \psi)\omega^2, \tag{21}$$

$$u_{2x}(a, \psi) = u_{2\psi}(a, \psi)k + \varepsilon^3 \ldots, \qquad u_{2xx}(a, \psi) = u_{2\psi\psi}(a, \psi)k^2, \tag{22}$$

$$u_{2xxxx}(a, \psi) = u_{2\psi\psi\psi\psi}(a, \psi)k^4. \tag{23}$$

Подставляя теперь в левую часть уравнения (1) найденные выражения для u, u_{tt}, u_{xx} и u_{xxxx} согласно формулам (6), (10), (12), (14), (15), (17), (19) – (23), а также принимая во внимание выражения (9), с точностью до величин порядка ε^2 включительно получаем

$$u_{tt} + u_{xxxx} + u_{xx} + u = -\omega^2 a\cos\psi + k^4 a\cos\psi - k^2 a\cos\psi + a\cos\psi +$$
$$+ \varepsilon\{[k^4 u_{1\psi\psi\psi\psi}(a, \psi) + \omega^2 u_{1\psi\psi}(a, \psi) + k^2 u_{1\psi\psi}(a, \psi) + u_1(a, \psi)] +$$
$$+ 2[A_1(a)\omega + (2k^3 - k)B_1(a)]\sin\psi + 2[C_1(a)\omega + (2k^3 - k)D_1(a)]\,a\cos\psi\} +$$
$$+ \varepsilon^2\Big\{[k^4 u_{2\psi\psi\psi\psi}(a, \psi) + \omega^2 u_{2\psi\psi}(a, \psi) + k^2 u_{2\psi\psi}(a, \psi) + u_2(a, \psi)] +$$
$$+ 2[A_2(a)\omega + (2k^3 - k)B_2(a)]\sin\psi + 2[C_2(a)\omega + (2k^3 - k)D_2(a)]\,a\cos\psi +$$
$$+ \Big[-a\frac{dC_1(a)}{da}A_1(a) - 2A_1(a)C_1(a) + 6\Big(2k^2 B_1(a)D_1(a) +$$
$$+ ak^2\frac{dD_1(a)}{da}B_1(a)\Big) - a\frac{dD_1(a)}{da}B_1(a) - 2B_1(a)D_1(a)\Big]\sin\psi +$$
$$+ \Big[\frac{dA_1(a)}{da}A_1(a) - aC_1^2(a) - 6\Big(\frac{dB_1(a)}{da}B_1(a)k^2 - aD_1^2(a)k^2\Big) +$$
$$+ \frac{dB_1(a)}{da}B_1(a) - aD_1^2(a)\Big]\cos\psi + 4[B_1(a)k^3 u_{1a\psi\psi\psi}(a, \psi) +$$
$$+ D_1(a)k^3 u_{1\psi\psi\psi\psi}(a, \psi)] - 2[\omega A_1(a)u_{1a\psi}(a, \psi) + \omega C_1(a)u_{1\psi\psi}(a, \psi)] +$$
$$+ 2[B_1(a)ku_{1a\psi}(a, \psi) + D_1(a)ku_{1\psi\psi}(a, \psi)]\Big\} + \varepsilon^3 \ldots . \tag{24}$$

Подставляя значения $u(a, \psi)$, $u_t(a, \psi)$ и $u_x(a, \psi)$ согласно формулам (6), (11), (16), (14), (18) в правую часть уравнения (1) и раскладывая результат в ряд Тейлора, находим

$$\varepsilon f(u, u_t, u_x) = \varepsilon f(a\cos\psi, a\omega\sin\psi, -ak\sin\psi)+$$
$$+ \varepsilon^2\Big\{f'_u(a\cos\psi, a\omega\sin\psi, -ak\sin\psi)u_1(a,\psi) +$$
$$+ f'_{u_t}(a\cos\psi, a\omega\sin\psi, -ak\sin\psi)\times$$
$$\times\big(A_1(a)\cos\psi - aC_1(a)\sin\psi - \omega u_{1\psi}(a,\psi)\big) +$$
$$+ f'_{u_x}(a\cos\psi, a\omega\sin\psi, -ak\sin\psi)\times$$
$$\times\big(B_1(a)\cos\psi - aD_1(a)\sin\psi + ku_{1\psi}(a,\psi)\big)\Big\} + \varepsilon^3 \ldots . \tag{25}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε в выражениях (24) и (25), получаем цепочку уравнений для определения функций $u_i(a,\psi)$, $A_i(a)$, $B_i(a)$, $C_i(a)$, $D_i(a)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$:

$$\varepsilon^0:\ -\omega^2 a\cos\psi + ak^4\cos\psi - ak^2\cos\psi + a\cos\psi = 0, \tag{26}$$

$$\varepsilon^1:\ k^4 u_{1\psi\psi\psi\psi}(a,\psi) + \omega^2 u_{1\psi\psi}(a,\psi) + k^2 u_{1\psi\psi}(a,\psi) + u_1(a,\psi) +$$
$$+ 2[A_1(a)\omega + 2(k^3-k)B_1(a)]\sin\psi + 2[C_1(a)\omega + (2k^3-k)D_1(a)]\,a\cos\psi =$$
$$= \varepsilon f(a\cos\psi, a\omega\sin\psi, -ak\sin\psi), \tag{27}$$

$$\varepsilon^2:\ k^4 u_{2\psi\psi\psi\psi}(a,\psi) + \omega^2 u_{2\psi\psi}(a,\psi) + k^2 u_{2\psi\psi}(a,\psi) + u_2(a,\psi) +$$
$$+ 2[A_2(a)\omega + (2k^3-k)B_2(a)]\sin\psi + 2[C_2(a)\omega + (2k^3-k)D_2(a)]\,a\cos\psi +$$
$$+ \Bigg[-a\frac{dC_1(a)}{da}A_1(a) - 2A_1(a)C_1(a) + 6\Big(2k^2B_1(a)D_1(a) +$$
$$+ ak^2\frac{dD_1(a)}{da}B_1(a)\Big) - a\frac{dD_1(a)}{da}B_1(a) - 2B_1(a)D_1(a)\Bigg]\sin\psi +$$
$$+ \Bigg[\frac{dA_1(a)}{da}A_1(a) - aC_1^2(a) - 6\Big(\frac{dB_1(a)}{da}B_1(a)k^2 - aD_1^2(a)k^2\Big) +$$
$$+ \frac{dB_1(a)}{da}B_1(a) - aD_1^2(a)\Bigg]\cos\psi + 4[B_1(a)k^3u_{1a\psi\psi\psi}(a,\psi) +$$
$$+ D_1(a)k^3u_{1\psi\psi\psi\psi}(a,\psi)] - 2[\omega A_1(a)u_{1a\psi}(a,\psi) + \omega C_1(a)u_{1\psi\psi}(a,\psi)] +$$
$$+ 2[B_1(a)ku_{1a\psi}(a,\psi) + D_1(a)ku_{1\psi\psi}(a,\psi)] =$$
$$= f'_u(a\cos\psi, a\omega\sin\psi, -ak\sin\psi)\,u_1(a,\psi) + f'_{u_t}(a\cos\psi, a\omega\sin\psi, -ak\sin\psi)\times$$
$$\times(A_1(a)\cos\psi - aC_1(a)\sin\psi - \omega u_{1\psi}(a,\psi)) +$$
$$+ f'_{u_x}(a\cos\psi, a\omega\sin\psi, -ak\sin\psi)\times$$
$$\times(B_1(a)\cos\psi - aD_1(a)\sin\psi + ku_{1\psi}(a,\psi)), \tag{28}$$

....

Уравнения (26) – (28) могут быть записаны в виде

$$-\omega^2 a\cos\psi + ak^4\cos\psi - ak^2\cos\psi + a\cos\psi = 0, \tag{29}$$

$$k^4 u_{1\psi\psi\psi\psi}(a,\psi) + (\omega^2 + k^2)u_{1\psi\psi}(a,\psi) + u_1(a,\psi) =$$

$$= f_0(a, \psi) - 2[A_1(a)\omega + (2k^3 - k)B_1(a)]\sin\psi -$$
$$- 2[C_1(a)\omega + (2k^3 - k)D_1(a)]\, a\cos\psi, \tag{30}$$

$$k^4 u_{2\psi\psi\psi\psi}(a, \psi) + (\omega^2 + k^2)u_{2\psi\psi}(a, \psi) + u_2(a, \psi) = f_1(a, \psi) -$$
$$- \Big\{ 2[A_2(a)\omega + (2k^3 - k)B_2(a)] - a\frac{dC_1(a)}{da}A_1(a) - 2A_1(a)C_1(a) +$$
$$+ 6\left(2k^2 B_1(a)D_1(a) + ak^2\frac{dD_1(a)}{da}B_1(a)\right) - a\frac{dD_1(a)}{da}B_1(a) - 2B_1(a)D_1(a)\Big\}\sin\psi -$$
$$- \Big\{ 2[C_2(a)\omega + (2k^3 - k)D_2(\omega)]a + \frac{dA_1(a)}{da}A_1(a) - aC_1^2(a) -$$
$$- 6\left(\frac{dB_1(a)}{da}B_1(a)k^2 - aD_1^2(a)k^2\right) + \frac{dB_1(a)}{da}B_1(a) - aD_1^2(a)\Big\}\cos\psi, \tag{31}$$

где для сокращения записи введены следующие обозначения:

$$f_0(a, \psi) = f(a\cos\psi, a\omega\sin\psi, -ak\sin\psi), \tag{32}$$

$$f_1(a, \psi) = f_u'(a\cos\psi, a\omega\sin\psi, -ak\sin\psi)\, u_1(a, \psi) +$$
$$+ f_{u_t}'(a\cos\psi, a\omega\sin\psi, -ak\sin\psi) \times$$
$$\times (A_1(a)\cos\psi - aC_1(a)\sin\psi - \omega u_{1\psi}(a, \psi)) +$$
$$+ f_{u_x}'(a\cos\psi, a\omega\sin\psi, -ak\sin\psi) \times$$
$$\times (B_1(a)\cos\psi - aD_1(a)\sin\psi + ku_{1\psi}(a, \psi)) -$$
$$-4[B_1(a)k^3 u_{1a\psi\psi\psi}(a, \psi) + D_1(a)k^3 u_{1\psi\psi\psi\psi}(a, \psi)] +$$
$$+ 2[\omega A_1(a)u_{1a\psi}(a, \psi) + \omega C_1(a)u_{1\psi\psi}(a, \psi)] -$$
$$- 2[B_1(a)ku_{1a\psi}(a, \psi) + D_1(a)ku_{1\psi\psi}(a, \psi)]. \tag{33}$$

Уравнение (29) в силу дисперсионного соотношения (5) тождественно равно нулю.

Для того чтобы определить $u_1(a, \psi)$, а также $A_1(a)$, $B_1(a)$, $C_1(a)$ и $D_1(a)$ (т. е. $\dfrac{\partial a}{\partial t}$, $\dfrac{\partial a}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$ в первом приближении) из уравнения (30), рассмотрим разложение Фурье для функции $f_0(a, \psi)$, которая, очевидно, является периодической по ψ (напомним, что $\psi = kx - \omega t + \varphi$). Имеем

$$f_0(a, \psi) = g_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} [g_n(a)\cos n\psi + h_n(a)\sin n\psi], \tag{34}$$

где

$$g_n(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_0(a, \psi)\cos n\psi\, d\psi,$$

$$h_n(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_0(a, \psi)\sin n\psi\, d\psi, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots . \tag{35}$$

Функцию $u_1(a, \psi)$ также будем искать в виде периодической функции ψ:

$$u_1(a, \psi) = v_0(a) \sum_{n=1}^{\infty} [v_n(a) \cos n\psi + w_n(a) \sin n\psi]. \tag{36}$$

Подставляя правые части выражений (34) и (36) в уравнение (30), получаем выражение

$$\begin{aligned} v_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} [k^4 n^4 - (\omega^2 + k^2) n^2 + 1] [v_n(a) \cos n\psi + w_n(a) \sin n\psi] = \\ + g_0(a) + \sum_{n=2}^{\infty} [g_n(a) \cos n\psi + h_n(a) \sin n\psi] + \\ + \{ g_1(a) - 2a [C_1(a)\omega + (2k^3 - k) D_1(a)] \} \cos\psi + \\ + \{ h_1(a) - 2 [A_1(a)\omega + (2k^3 - k) B_1(a)] \} \sin\psi, \end{aligned} \tag{37}$$

из которого, приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, находим ($\omega^2 = k^4 - k^2 + 1$)

$$\begin{aligned} C_1(a)\omega + (2k^3 - k) D_1(a) &= \frac{g_1(a)}{2a}, \\ A_1(a)\omega + (2k^3 - k) B_1(a) &= \frac{h_1(a)}{a}, \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} v_0(a) = g_0(a), \quad v_n(a) &= \frac{g_n(a)}{k^4 n^4 - (\omega^2 + k^2) n^2 + 1}, \\ w_n(a) &= \frac{h_n(a)}{k^4 n^4 - (\omega^2 + k^2) n^2 + 1}, \quad n = 2, 3, \ldots . \end{aligned} \tag{39}$$

Равенства (38) обеспечивают отсутствие секулярных членов в функции $u_1(a, \psi)$.

После этого для искомой функции $u_1(a, \psi)$ можно записать следующее выражение:

$$u_1(a, \psi) = g_0(a) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{k^4 n^4 - (\omega^2 + k^2) n^2 + 1} (g_n(a) \cos n\psi + h_n(a) \sin n\psi), \tag{40}$$

где $g_n(a)$ и $h_n(a)$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, определяются согласно выражениям (35).

Уравнения (38) с точностью до величин первого порядка малости, учитывая систему уравнений (7), можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{2k^3 - k}{\omega} \frac{\partial a}{\partial x} &= \frac{\varepsilon}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \sin\psi \, d\psi, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{2k^3 - k}{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\varepsilon}{2\pi a\omega} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \cos\psi \, d\psi. \end{aligned} \tag{41}$$

Для построения второго приближения нам необходимо найти $u_2(a, \psi)$, $A_2(a, \psi)$, $B_2(a, \psi)$, $C_2(a, \psi)$ и $D_2(a, \psi)$, воспользовавшись для этого уравнением (28) или (31). Раскладывая в ряд Фурье функцию $f_1(a, \psi)$, имеем

$$f_1(a, \psi) = g_0^{(1)}(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[g_n^{(1)}(a) \cos n\psi + h_n^{(1)}(a) \sin n\psi \right], \tag{42}$$

где

$$
\begin{aligned}
g_n^{(1)}(a) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(a,\psi)\cos n\psi\, d\psi, \\
h_n^{(1)}(a) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(a,\psi)\sin n\psi\, d\psi, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots ,
\end{aligned}
\tag{43}
$$

а выражение для $u_2(a,\psi)$ ищем из уравнения (31) в виде ряда

$$
u_2(a,\psi) = v_0^{(1)}(a) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[v_n^{(1)}(a)\cos n\psi + h_n^{(1)}(a)\sin n\psi\right] \tag{44}
$$

с неопределенными коэффициентами $v_n^{(1)}(a)$, $w_n^{(1)}(a)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, при гармониках, для определения которых поступаем так же, как и в предыдущем случае. Подставляя значения $u_2(a,\psi)$ (44) и $f_1(a,\psi)$ (42) в левую и правую части уравнения (31) и приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, находим

$$
\begin{aligned}
v_0^{(1)}(a) &= g_0^{(1)}(a), \qquad v_n^{(1)}(a) = \frac{g_n^{(1)}(a)}{k^4n^4 - (\omega^2 + k^2)n^2 + 1}, \\
w_n^{(1)}(a) &= \frac{h_n^{(1)}(a)}{k^4n^4 - (\omega^2 + k^2)n^2 + 1}, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots ,
\end{aligned}
\tag{45}
$$

а также

$$
\begin{aligned}
&2[C_2(a)\omega + (2k^3 - k)D_2(a)]a + \left[\frac{dA_1(a)}{da}A_1(a) - aC_1^2(a) - \right. \\
&\left. - 6\left(\frac{dB_1}{da}B_1(a)k^2 - aD_1^2(a)k^2\right) + \frac{dB_1(a)}{da}B_1(a) - aD_1^2(a)\right] = g_1^{(1)}(a), \\
&2[A_2(a)\omega + (2k^3 - k)B_2(a)] - a\frac{dC_1(a)}{da}A_1(a) - 2A_1(a)C_1(a) + \\
&+ 6\left(2k^2B_1(a)D_1(a) + ak^2\frac{dD_1(a)}{da}B_1(a)\right) - \frac{dD_1(a)}{da}aB_1(a) - 2B_1(a)D_1(a) = h_1^{(1)}(a).
\end{aligned}
\tag{46}
$$

После этого можем записать выражение для $u_2(a,\psi)$:

$$
u_2(a,\psi) = g_0^{(1)}(a) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{k^4n^4 - (\omega^2 + k^2)n^2 + 1}\left[g_n^{(1)}(a)\cos n\psi + h_n^{(1)}(a)\sin n\psi\right], \tag{47}
$$

где $g_n^{(1)}(a)$ и $h_n^{(1)}(a)$, $n = 0, 2, 3, \ldots$, определяются формулами (43) и для кото рого выражения (46) обеспечивают отсутствие секулярных членов.

Согласно выражениям (46) находим выражения для $A_2(a)$, $B_2(a)$, $C_2(a)$ и $D_2(a)$, необходимые для построения уравнений (7) во втором приближении:

$$
\begin{aligned}
&C_2(a)\omega + (2k^3 - k)D_2(a) = \frac{g_1^{(1)}(a)}{2a} - \frac{1}{2a}\left[\frac{dA_1(a)}{da}A_1(a) - aC_1^2(a) - \right. \\
&\left. - 6\left(\frac{dB_1(a)}{da}B_1(a)k^2 - D_1^2(a)k^2\right) + \frac{dB_1(a)}{da}B_1(a) - aD_1^2(a)\right], \\
&A_2(a)\omega + (2k^3 - k)B_2(a) = \frac{h_1^{(1)}(a)}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{dC_1(a)}{da}A_1(a) + 2A_1(a)C_1(a) - \right.
\end{aligned}
\tag{48}
$$

$$- 6\left(2k^2 B_1(a) D_1(a) + ak^2 \frac{dD_1(a)}{da} B_1(a)\right) + \frac{dD_1(a)}{da} aB_1(a) + 2B_1(a) D_1(a)\Bigg].$$

Принимая теперь во внимание, что

$$g_1^{(1)}(a) \;=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(a,\psi)\cos\psi\, d\psi,$$

$$h_1^{(1)}(a) \;=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(a,\psi)\sin\psi\, d\psi, \tag{49}$$

складывая соответственно равенства (38) и (48) и учитывая уравнения (7) (а также необходимые коэффициенты при ε и ε^2), получаем уравнения (41) во втором приближении в следующем виде:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \omega'\frac{\partial a}{\partial x} \;=\; \frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi}[\varepsilon f_0(a,\psi) + \varepsilon^2 f_1(a,\psi)]\sin\psi\, d\psi \;+$$

$$+\;\frac{\varepsilon^2}{2\omega}\left\{a\frac{dC_1(a)}{da}A_1(a) + 2A_1(a)C_1(a) -\right.$$

$$\left.- 6\left(2k^2 B_1(a) D_1(a) + ak^2 \frac{dD_1(a)}{da} B_1(a)\right) + \frac{dD_1(a)}{da} aB_1(a) + 2B_1(a) D_1(a)\right\},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \omega'\frac{\partial \varphi}{\partial x} \;=\; \frac{1}{2\pi\omega a}\int_0^{2\pi}[\varepsilon f_0(a,\psi) + \varepsilon^2 f_1(a,\psi)]\cos\psi\, d\psi \;- \tag{50}$$

$$-\;\frac{\varepsilon^2}{2\omega a}\left\{\frac{dA_1(a)}{da}A_1(a) - C_1^2(a)a \;-\right.$$

$$\left.- 6\left(\frac{dB_1(a)}{da}B_1(a)k^2 - aD_1^2(a)k^2\right) + \frac{dB_1(a)}{da}B_1(a) - aD_1^2(a)\right\},$$

где $\omega' = \dfrac{2k^3 - k}{\omega}$ — групповая скорость (для линейного уравнения (3)), $f_0(a,\psi)$ и $f_1(a,\psi)$ определяются выражениями (32) и (33).

Таким образом, в первом приближении асимптотическое решение уравнения

$$u_{tt} + u_{xxxx} + u_{xx} + u \;=\; \varepsilon f(u, u_t, u_x), \tag{51}$$

будет

$$u(t,x) \;=\; a(t,x)\cos\psi(t,x), \tag{52}$$

где $\psi(t,x) = kx - \omega t + \varphi(t,x)$, а медленно меняющиеся амплитуда $a(t,x)$ и фаза $\varphi(t,x)$ должны быть определены из системы первого приближения

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \omega'\frac{\partial a}{\partial x} \;=\; \frac{\varepsilon}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi} f_0(a,\psi)\sin\psi\, d\psi,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \omega'\frac{\partial \varphi}{\partial x} \;=\; \frac{\varepsilon}{2\pi\omega a}\int_0^{2\pi} f_0(a,\psi)\cos\psi\, d\psi, \tag{53}$$

где $\omega^2 = k^4 - k^2 + 1$ — дисперсионное соотношение, $\omega' = \dfrac{2k^3 - k}{\omega}$ — групповая скорость (и то и другое для линейного уравнения (3)), $f_0(a,\psi)$ определяются согласно формуле (32).

Улучшенное первое приближение, как и обычно в нелинейной механике, определяется выражением

$$u(t, x) = a(t, x)\cos\psi(t, x) + \varepsilon u_1(a, \psi), \tag{54}$$

где $\varepsilon u_1(a, \psi)$ вычисляется согласно формуле (40), а медленно меняющиеся амплитуда $a(t, x)$ и фаза $\varphi(t, x)$ — согласно уравнениям первого приближения (53).

Для получения второго приближения, как и обычно, в выражение (54) необходимо подставить медленно меняющиеся амплитуду $a(t, x)$ и фазу $\varphi(t, x)$, определенные из уравнений второго приближения (50).

Рассмотрим более подробно первое приближение.

Для того чтобы $u_1(a, \psi)$ не содержало секулярных членов, необходимо, чтобы функции $A_1(a)$, $B_1(a)$, $C_1(a)$ и $D_1(a)$ согласно уравнениям (7) удовлетворяли уравнениям (38):

$$A_1(a)\omega + (2k^3 - k)B_1(a) = \frac{h_1(a)}{2}, \tag{38$_1$}$$

$$C_1(a)\omega + (2k^3 - k)D_1(a) = \frac{g_1(a)}{2a}, \tag{38$_2$}$$

где $h_1(a)$ и $g_1(a)$ определяются формулами (35).

Имеем

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial x} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t}, \qquad \frac{\partial^2 a}{\partial t\,\partial x} = \frac{\partial^2 a}{\partial x\,\partial t},$$

поэтому согласно уравнениям (7) можем записать (в первом приближении):

$$A_1(a)\frac{dD_1(a)}{da} = B_1(a)\frac{dC_1(a)}{da}, \qquad A_1(a)\frac{dB_1(a)}{da} = B_1(a)\frac{dA_1(a)}{da}. \tag{55}$$

Уравнения (38) и (55) представляют собой 4 соотношения, связывающие 4 неизвестные функции $A_1(a)$, $B_1(a)$, $C_1(a)$ и $D_1(a)$. Как только будут решены эти уравнения и найдены в первом приближении правые части уравнений (7), определяющие медленно меняющиеся $a(t, x)$ и $\varphi(t, x)$, можно найти $u_1(a, \psi)$ согласно формуле (40) и, как отмечено выше, $u_1(a, \psi)$ не будет содержать секулярных членов. При этом заметим, что $C_1(a) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$ можно интерпретировать как „сдвиг частоты" — ω (в первом приближении), а $C_1(a) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$ — как „сдвиг волнового числа" — k.

Тем не менее, в общем случае нельзя разрешить полностью систему уравнений (38) и (55) без уточнения ряда деталей и ограничений физической задачи.

Так, предполагая, что $u(t, x)$ колеблется синусоидально при всех t, мы можем положить $\varepsilon C_1(a) = \varphi_t(t, x) = 0$ и $\varepsilon A_1(a) = a_t(t, x) = 0$, тогда

$$D_1(a) = \frac{1}{2(2k^3 - 1)}g_1(a), \tag{56}$$

в качестве „сдвига волнового числа" k $(\varepsilon D_1(a) = \varphi_k(t, x))$ и

$$B_1(a) = \frac{1}{2(2k^3 - 1)}h_1(a). \tag{57}$$

В противном случае, если мы предположим, что для всех x имеем чисто синусоидальную волну, можно положить $\varepsilon B_1(a) = a_x(t, x) = 0$, $\varepsilon D_1(a) = \varphi_t(t, x) = 0$

и разрешить уравнения (38) относительно $\varepsilon A_1(a) = a_t(t, x)$ и $\varepsilon C_1(a) = \varphi_t(t, x)$ — поправка на амплитуду и сдвиг частоты.

Рассмотрим теперь конкретный пример, иллюстрирующий как внешнее возмущение влияет на дисперсионное соотношение, установленное для линейного невозмущенного уравнения.

В качестве такого примера рассмотрим модельное уравнение Брезертона (2).

Для уравнения (2) при $\varepsilon = 0$ решение имеет вид (4) и верно дисперсионное соотношение (5).

Предположим, что $A_1(a)$ и $C_1(a)$ равны нулю. Тогда в первом приближении согласно уравнениям (38) имеем

$$(2k^3 - k)B_1(a) = \frac{1}{2}h_1(a), \qquad (2k^3 - k)D_1(a) = \frac{1}{2a}g_1(a) \tag{58}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial x} &= \frac{1}{2\pi(2k^3 - k)}\int_0^{2\pi} \varepsilon f_0(a\cos\psi)\sin\psi\, d\psi, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{1}{2\pi a(2k^3 - k)}\int_0^{2\pi} \varepsilon f_0(a\cos\psi)\cos\psi\, d\psi. \end{aligned} \tag{59}$$

Правая часть уравнения (2) — εu^3, следовательно, в уравнениях (59) вместо εf_0 следует положить $\varepsilon a^3 \cos^3 \psi$, после чего уравнения (59) примут вид

$$\frac{\partial a}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{3\varepsilon a^2}{8(2k^3 - k)}. \tag{60}$$

Подсчитаем теперь, как поправка „сдвига волнового числа" k отразится на дисперсионном соотношении (5). Для этого нам необходимо в дисперсионное соотношение (5), полученное для невозмущенного уравнения, вместо волнового числа k подставить $k + \varphi_x$. Получим

$$\omega^2 = \left(k + \frac{3\varepsilon a^2}{8(2k^3 - k)}\right)^4 - \left(k + \frac{3\varepsilon a^2}{8(2k^3 - k)}\right)^2 + 1 = k^4 - k^2 + \frac{3\varepsilon a^2}{4} + 1 + \varepsilon^3 \ldots .$$

Таким образом, в первом приближении (с точностью до величин порядка ε включительно) дисперсионное соотношение для модельного уравнения Брезертона имеет следующий вид:

$$\omega^2 = k^4 - k^2 + 1 + \frac{3\varepsilon a^2}{4}. \tag{61}$$

Для получения улучшенного первого приближения нам необходимо подсчитать $\varepsilon u_1(a, \psi)$. После ряда несложных выкладок согласно формулам (40) и (35) находим

$$\varepsilon u_1(a, \psi) = \frac{\varepsilon a^3}{32(9k^4 - 1)}\cos 3\psi, \tag{62}$$

и, следовательно, решение уравнения Брезертона в улучшенном первом приближении (при сделанных выше предположениях) имеет вид

$$u(t, x) = a\cos\psi + \frac{\varepsilon a^3}{32(9k^4 - 1)}\cos 3\psi, \tag{63}$$

где

$$\psi = \left(k + \frac{3\varepsilon a^2}{8(2k^3 - k)}\right)x - \omega t + \varphi.$$

Вычислим теперь соответствующие поправки к частоте и волновому числу во втором приближении. В связи с тем, что согласно нашему предположению $A_1(a) = 0$, $B_1(a) = 0$, а также $C_1(a) = 0$, система уравнений (50), определяющая медленно меняющиеся амплитуду $a(t, x)$ и фазу $\varphi(t, x)$, во втором приближении примет вид

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \omega' \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} [\varepsilon f_0(a, \psi) + \varepsilon^2 f_1(a, \psi)] \sin\psi \, d\psi,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \omega' \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{2\pi\omega a} \int_0^{2\pi} [\varepsilon f_0(a, \psi) + \varepsilon^2 f_1(a, \psi)] \cos\psi \, d\psi - \frac{\varepsilon^2}{2\omega}\left[6k^2 - 1\right] D_1^2(a), \tag{64}$$

где

$$D_1(a) = \frac{3a^2}{8(2k^3 - k)}.$$

Функция $f_1(a, \psi)$ согласно формуле (33) с учетом того, что

$$u_1(a, \psi) = \frac{a^3}{32(9k^4 - 1)} \cos 3\psi,$$

может быть записана так:

$$f_1(a, \psi) = 3a^2 \cos^2 \psi \, u_1(a, \psi) - 4D_1(a)k^3 u_{1\psi\psi\psi\psi}(a, \psi) - 2D_1(a)k \, u_{1\psi\psi}(a, \psi).$$

Учитывая, что

$$u_{1\psi\psi}(a, \psi) = -\frac{9a^3}{32(9k^4 - 1)} \cos 3\psi, \qquad u_{1\psi\psi\psi\psi}(a, \psi) = \frac{81a^3}{32(9k^4 - 1)} \cos 3\psi,$$

имеем

$$f_1(a, \psi) = \frac{3a^5}{32(9k^4 - 1)} \cos^2 \psi \cos 3\psi - \frac{3a^5 \cdot 18(18k^3 - k)}{8(2k^3 - k) 32(9k^4 - 1)} \cos 3\psi$$

и, таким образом, как нетрудно видеть, систему (4) можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \omega' \frac{\partial a}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \omega' \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{2\pi\omega a} \int_0^{2\pi} [\varepsilon f_0(a, \psi) + \varepsilon^2 f_1(a, \psi)] \cos\psi \, d\psi - \frac{\varepsilon^2}{2\omega}\left(6k^2 - 1\right) D_1^2(a), \tag{65}$$

или окончательно получаем поправку на волновое число k во втором приближении в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{3\varepsilon a^2}{8(2k^3 - k)} + \varepsilon^2 \frac{3a^4}{128(2k^3 - k)} \left[\frac{1}{2(9k^4 - 1)} + \frac{3(6k^2 - 1)}{(2k^3 - k)^2}\right]. \tag{66}$$

Приведем методику, нашедшую приложение в разнообразных задачах, связанных с распространением волн в жидкости. Суть ее состоит в усреднении лагранжиана и выписывании затем соответствующих уравнений (уже усредненных) Эйлера – Лагранжа. Развитие этой методики принадлежит П. А. Старроку

[5], Г. В. Уизему [4, 6 – 8], Ф. А. Бишопу [9] и ряду других ученых при предположении, что для изучения волны предполагается, что частота и волновое число, как и амплитуда, являются медленно меняющимися функциями пространственных координат и времени. По сути вводятся те же самые предположения, что и вводимые нами, однако в ряде случаев, как это будет видно из дальнейшего изложения, эта методика позволяет в первом приближении получить результат проще. Вместе с тем следует сразу же заметить, что эта методика не всегда может быть применена, так как не для любого уравнения мы легко можем построить соответствующий ему лагранжиан. Кроме того, рассматриваемые нами правые части уравнения (1) представляют гораздо большие возможности при рассмотрении всех специфических особенностей, наблюдаемых при возмущении волновых процессов.

Дадим, согласно изящному изложению А. Х. Найфе [10], описание этой методики применительно к модельному уравнению Брезертона (2).

Нетрудно проверить, что это уравнение является уравнением Эйлера – Лагранжа, соответствующим лагранжиану

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}u_t^2 - \frac{1}{2}u_{xx}^2 + \frac{1}{2}u_x^2 - \frac{1}{2}u^2 + \frac{\varepsilon}{4}u^4. \tag{67}$$

Действительно, согласно вариационному принципу для лагранжиана (67), получаем уравнение Эйлера – Лагранжа в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0. \tag{68}$$

Подставляя в уравнение (68) значение лагранжиана $\mathcal{L}$ (67), получаем уравнение (2).

Будем искать решение уравнения (2), учитывая специфику его правой части, в виде разложения

$$u(t, x) = a\cos\psi + \varepsilon\sum_{n=2}^{\infty} A_n \cos n\psi + \varepsilon^2 \ldots , \tag{69}$$

где, как и выше, $\psi = kx - \omega t + \varphi$, т. е. $\psi_x = k$, $\psi_t = -\omega$ и, следовательно,

$$k_t + \omega_k = 0, \tag{70}$$

а величины a, ω, k и A_i являются медленно меняющимися функциями t и x.

Поскольку в прямом разложении секулярные члены впервые появляются среди слагаемых порядка ε, то будем предполагать, что величины a_x, a_t, ω_x, ω_t, k_x и k_t имеют порядок ε.

Таким образом, можем записать

$$\begin{gathered} u_t = a\omega\sin\psi + a_t\cos\psi + \varepsilon\omega\sum_{n=2}^{\infty} nA_n \sin n\psi + \varepsilon^2 \ldots , \\ u_x = -ak\sin\psi + a_x\cos\psi - \varepsilon k\sum_{n=2}^{\infty} nA_n \sin n\psi + \varepsilon^2 \ldots , \\ u_{xx} = -ak^2\cos\psi - 2a_x k\sin\psi - \varepsilon k^2\sum_{n=2}^{\infty} n^2 A_n \cos n\psi + \varepsilon^2 \ldots . \end{gathered} \tag{71}$$

Подставляя выражения (71), а также (69) в лагранжиан (67), получаем лагранжиан, неявно зависящий от t и x через функции ψ, a, ω, k и A_1. При этом слагаемые лагранжиана периодичны по ψ с периодом 2π и при изменении ψ на интервале $[0, 2\pi]$ остальные параметры претерпевают очень малые изменения, в то время как с изменением ψ лагранжиан изменяется намного быстрее. Поэтом, как это принято в любых разновидностях метода усреднения, лагранжиан следует усреднить по ψ на интервале $[0, 2\pi]$, предполагая при этом, что величины a, ω, k и A_i остаются постоянными.

Усредняя правые части выражений (68) и (70), получаем

$$\begin{aligned} \overline{u}^4 &= \frac{3}{8}a^4 + \varepsilon \ldots, \\ \overline{u}_t^2 &= \frac{1}{2}a^2\omega^2 + \varepsilon \ldots, \\ \overline{u}_x^2 &= \frac{1}{2}a^2k^2 + \varepsilon \ldots, \\ \overline{u}_{xx}^2 &= \frac{1}{2}a^2k^2 + \varepsilon \ldots . \end{aligned} \tag{72}$$

Подставляя выражения (72) в правую часть (67), получаем усредненный лагранжиан

$$\overline{\mathcal{L}} = \frac{1}{4}(\omega^2 - k^4 + k^2 - 1)a^2 + \frac{3\varepsilon}{32}a^4 + \varepsilon^2 \ldots, \tag{73}$$

который явно зависит от a и неявно от ψ через посредство ω и k (согласно выражению (70) и $\psi_k = k$, $\psi_t = -\omega$).

Исходя из усредненного лагранжиана (73), запишем уравнения Эйлера – Лагранжа (усредненные уравнения), соответствующие переменным a и ψ. Уравнение Эйлера – Лагранжа, соответствующее a, будет иметь вид

$$\frac{\partial \overline{\mathcal{L}}}{\partial a} = 0, \tag{74}$$

из которого сразу находим дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = k^4 - k^2 + 1 + \frac{3\varepsilon}{4}a^2 + \varepsilon^2 \ldots . \tag{75}$$

Таким образом, полученное согласно методике рассмотрения усредненного лагранжиана дисперсионное соотношение (75) в первом приближении полностью совпадает с дисперсионным соотношением (64), полученным выше с помощью метода КБМ.

Согласно выражению (70), а также тому, что $\psi_k = k$, $\psi_t = -\omega$, уравнение Эйлера – Лагранжа, соответствующее переменной ψ, запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \overline{\mathcal{L}}}{\partial \psi_t}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \overline{\mathcal{L}}}{\partial \psi_x}\right] - \frac{\partial \overline{\mathcal{L}}}{\partial \overline{\psi}} = 0, \tag{76}$$

или

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \overline{\mathcal{L}}}{\partial \omega}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \overline{\mathcal{L}}}{\partial k}\right] = 0. \tag{77}$$

Дифференцируя правую часть выражения (73) по ω и k, находим

$$\frac{\partial \overline{\mathcal{L}}}{\partial \omega} = \frac{1}{2}\omega a^2 + \varepsilon^2 \ldots, \qquad \frac{\partial \overline{\mathcal{L}}}{\partial k} = -\frac{1}{2}(2k^3 - k)a^2 + \varepsilon^2 \ldots . \tag{78}$$

Теперь выражение (77) можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega a^2) + \frac{\partial}{\partial x}\left[(2k^3 - k)a^2\right] = 0, \tag{79}$$

или с учетом введенного выше выражения $\omega' = d\omega/dk$ — групповой скорости

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\omega a^2\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\omega\omega' a^2\right] = 0, \tag{80}$$

или

$$\omega\left[\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\omega' a^2)\right] + a^2[\omega_t + \omega'\omega_x] = 0. \tag{81}$$

Поскольку $\omega = \omega(k)$ согласно (75), имеем $\omega_t = \omega' k_t$ и, следовательно, с учетом (70) $\omega_t + \omega'\omega_x = 0$ и уравнение (81) принимает вид

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\omega' a^2) = 0. \tag{82}$$

Кроме того, выражение (70) можно представить в виде

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \omega' \frac{\partial k}{\partial x} = 0. \tag{83}$$

Таким образом, изменения в пространстве и во времени амплитуды a, частоты ω и волнового числа k для решения уравнения Брезертона (2) $u = a\cos\psi$ $(\psi = kx - \omega t)$ в первом приближении (с точностью до величин порядка ε) определяются соотношениями (75), (82) и (83).

При этом полученное нами по методу КБМ для уравнения Брезертона (2) (при принятых нами предположениях о физическом содержании задачи) первое уравнение системы (65) совпадает с уравнением (82). Кроме того, нетрудно показать, что сумма, стоящая в правой части выражения (69) для решения рассматриваемого нами уравнения (2), полностью совпадает с полученным ранее выражением для $u_1(a, \psi)$ согласно формуле (62).

1. *Bretherton F. P., Garrett C. J. R.* Wavetrain in inhomogeneous moving media // Proc. Roy. Soc. (London). – 1967. – **A 302.** – P. 529–554.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
3. *Митропольский Ю. А.* О построении асимптотического решения возмущенного уравнения Клейна – Гордона // Укр. мат. журн. – 1995. – **47,** № 3. – С. 1209–1216.
4. *Montgomery D., Tidman D. A.* Secular and nonsecular behavoir for the cold plasma equation // Phys. Fluids. – 1964. – **7.** – P. 242–249.
5. *Sturrock P. A.* A variational principle and an energy theorem for small amplitude disturbances of electron beams and of electronion plasmas // Ann. Phys. – 1958. – **4.** – P. 306–324.
6. *Whitham G. B.* A general approach to linear and nonlinear waves using a Lograngian // J. Fluid Mech. – 1965. – **22.** – P. 273–283.
7. *Whitham G. B.* Variational methods and application to water waves // Proc. Roy. Soc. (London). – 1967. – **A 299.** – P. 6–25.
8. *Whitham G. B.* Linear and nonlinear waves. – New York etc.: John Wiley Sons, 1974. – 463 p.
9. *Bisshopp F.* A modified stationery principle for nonlinear waves // J. Different. Equat. – 1969. – **5.** – P. 592–605.
10. *Nayfeh, Hassan Ali.* Perturbation methods. – New York etc.: John Wiley Sons, 1972. – 425 p.

Получено 09.10.97