УДК 517.919

І. О. Парасюк (Нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Київ)

ЗБУРЕННЯ ВИРОДЖЕНИХ КОІЗОТРОПНИХ ІНВАРІАНТНИХ ТОРІВ ГАМІЛЬТОНОВИХ СИСТЕМ *

We consider the Hamiltonian system which has one-parameter family of degenerate coisotropic invariant tori. We prove a theorem on the preservation of the majority of tori under small perturbations of a Hamiltonian.

Розглядається гамільтонова система, яка має однопараметричну сім'ю вироджених коізотропних інваріантних торів. Доведено теорему про збереження більшості торів при малих збуреннях гамільтоніана.

Нехай на $2n$-вимірному симплектичному многовиді (M, ω^2) задано гамільтонову систему з гамільтоніаном $H_0: M \mapsto \boldsymbol{R}$, яка має однопараметричну сім'ю $\{\mathcal{T}_z^r\}_{z\in(-1,1)}$ r-вимірних коізотропних інваріантних торів (z — параметр сім'ї). Нехай існують координати прямого добутку $(y; \varphi \,|\mathrm{mod}\, 2\pi)$, $y = (y_1, \ldots, y_s)$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$, $r + s = 2n$, у яких тор $\mathcal{T}_z^r$, що відповідає значенню параметра z, задається рівнянням $y = y_0(z)$, а φ_l, $l = \overline{1, r}$, визначають кутові змінні на цьому торі. Зробимо перетворення $y \mapsto y_0(z) + y$. Припустимо додатково, що дужки Пуассона, породжені симплектичною структурою, мають вигляд

$$\{y_i, y_j\} = 0, \quad \{\varphi_k, y_i\} = \sigma_{ki}, \quad \{\varphi_k, \varphi_l\} = A_{kl}(y, z), \tag{1}$$

де $\sigma_{ki} = \mathrm{const}$, $i, j = \overline{1, s}$, $l = \overline{1, r}$, а для гамільтоніана H_0 виконуються рівності

$$H_0\big|_{y=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 H_0}{\partial y_i \partial \varphi_k}\right|_{y=0} = 0, \quad i = \overline{1, s}, \quad k = \overline{1, r}.$$

(Умови існування координат прямого добутку в околі інваріантних торів загальних динамічних систем вказані в [1, 2]; гамільтонові системи з цих позицій досліджувались в [3 – 5].)

Звуження гамільтонової системи на тор $\mathcal{T}_z^r$ має вигляд

$$\dot{\varphi} = \sum_{i=1}^{s} \sigma_i \Lambda_i(z),$$

де

$$\sigma_i = (\sigma_{1i}, \ldots, \sigma_{ri}), \quad \Lambda_i(z) = \left.\frac{\partial H_0}{\partial y_i}\right|_{y=0}.$$

Отже, потік на кожному інваріантному торі квазіперіодичний. Будемо досліджувати питання про існування квазіперіодичних рухів для збуреної системи з гамільтоніаном $H = H_0 + \mu H_1$ ($|\mu| \ll 1$).

Розробці строгої теорії збурень інваріантних торів і квазіперіодичних рухів динамічних систем присвячено велику кількість робіт (відповідні посилання можна знайти в [1, 6, 7]), і серед перших тут були роботи А. М. Самойленка.

У даній роботі результати [8] розповсюджено на так званий випадок власного виродження [9], коли квазіперіодичні рухи незбуреної системи покривають інваріантні тори $\mathcal{T}_z^{r_0} \subset \mathcal{T}_z^r$ розмірності $r_0 < r$. За умови, що середнє функцій H_1, $\partial H_1 / \partial y$ вздовж $\mathcal{T}_z^{r_0}$ не залежить від φ, а також при виконанні низки до-

* Виконана при фінансовій підтримці Міністерства України у справах науки і технологій.

даткових припущень, зокрема щодо σ_i, побудовано канторову множину $\mathcal{Z}_\mu \subset \subset (-1, 1)$ значень параметра z, яким відповідають квазіперіодичні рухи системи з гамільтоніаном $H_0 + \mu H_1$. Показано, що при $\mu \to 0$ міра множини $(-1, 1) \setminus \mathcal{Z}_\mu$ прямує до нуля.

Техніка даної роботи відрізняється від [8, 9] в першу чергу тим, що ми з самого початку явно вводимо параметр z в гамільтоніан. За допомогою цього параметра вдається контролювати вплив малих знаменників у ітераційному процесі побудови інваріантних торів збуреної системи. Ідею такого використання параметрів системи ми запозичили в роботі А. М. Самойленка [10]. Відзначимо, що А. М. Колмогоров [11] і Ю. Мозер [12] використовували внутрішні параметри незбуреної системи для того, щоб будувати квазіперіодичні рухи збуреної системи з наперед фіксованим базисом частот (або відношенням базисних частот). Такий підхід спрацьовує лише при достатньо великій кількості параметрів. За допомогою розвинутої у даній роботі техніки можна доводити КАМ-теореми при виконанні умов невиродженості, запропонованих Рюссманном [13], відмовившись, однак, від твердження про неперервну залежність частот збурених квазіперіодичних рухів від параметра μ (порівн. з [14]). У цьому зв'язку слід також відзначити підхід, розроблений М. Б. Севрюком та М. Ерманом (див. [15]).

В подальшому використовуються такі позначення:

$$|x| = \max_{1 \le i \le n} |x_i|, \qquad \langle x, y \rangle = \sum\nolimits_{i=1}^{n} x_i y_i, \qquad x = (x_1, \ldots, x_n), \qquad y = (y_1, \ldots, y_n),$$

$$D_R^n = \{ x \in \boldsymbol{C}^n : |x| < R \}, \qquad \Pi_R^n = \{ x \in \boldsymbol{C}^n : |\operatorname{Im} x| < R \},$$

$D - \delta$ — підмножина тих точок множини $D \subset \boldsymbol{C}^n$, які лежать у D разом зі своїми замкненими δ-околами; $D + \delta$ — δ-окіл множини D. Якщо $f(\varphi)$ — 2π-періодична за кожною змінною φ_i, $i = \overline{1, n}$, функція з рядом Фур'є $\sum_{m \in \boldsymbol{Z}^n} f_m e^{i\langle m, \varphi \rangle}$, то покладемо

$$\bar{f} = f_0, \quad \tilde{S}_N f(\varphi) = \sum\nolimits_{0 < |m| \le N} f_m e^{i\langle m, \varphi \rangle},$$

$$R_n f(\varphi) = f(\varphi) - \tilde{S}_N f(\varphi) - \bar{f}.$$

1. Основні припущення. Будемо говорити, що для системи з гамільтоніаном H_0 має місце випадок власного виродження, якщо для деяких натуральних $s_0 < s$ і $r_0 < r$ виконуються умови

$$\Lambda_i(z) = 0 \qquad \forall z \in (-1, 1), \qquad i = \overline{s_0 + 1, s};$$

$$\sigma_{ki} = 0, \qquad k = \overline{r_0 + 1, r}, \quad i = \overline{1, s_0}.$$

Саме цей випадок ми і розглядатимемо.

Будемо припускати, що при деякому $\gamma_0 > 0$ виконуються умови сильної несумірності системи векторів $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$:

$$\max_{1 \le i \le s} |\langle m, \sigma_i \rangle| \ge \gamma_0 |m|^{-r} \qquad \forall m \in \boldsymbol{Z}^r \setminus \{0\},$$
$$\max_{1 \le i \le s_0} |\langle \hat{m}, \hat{\sigma}_i \rangle \ge \max_{1 \le i \le s_0} \hat{\gamma}_0 |\hat{m}|^{-r} \qquad \forall m \in \boldsymbol{Z}^{r_0} \setminus \{0\}, \tag{2}$$

де $\hat{\sigma}_i = (\sigma_{1i}, \ldots, \sigma_{r_0 i})$.

Введемо позначення: $x = (y, \varphi)$, $\hat{y} = (y_1, \ldots, y_{s_0})$, $\tilde{y} = (y_{s_0+1}, \ldots, y_s)$, $\hat{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{r_0})$, $\tilde{\varphi} = (\varphi_{r_0+1}, \ldots, \varphi_r)$, $\hat{\Lambda} = (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{s_0})$.

Стосовно функції H_0 будемо додатково вимагати, щоб виконувались рівності

$$\left.\frac{\partial^2 H_0}{\partial \tilde{y}^2}\right|_{y=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial^2 H_0}{\partial \hat{y}\, \partial \tilde{y}}\right|_{y=0} = 0.$$

Ці умови дозволять нам спростити подальші обчислення.

Щодо збурення H_1 припускаємо, що середні значення функцій $H_1|_{y=0}$, $\left.\frac{\partial H_1}{\partial \tilde{y}}\right|_{y=0}$ за змінними $\hat{\varphi}$ не залежать від $\tilde{\varphi}$. Функції H_0, H_1 і A_{kl} вважаємо дійсно-аналітичними в області $\{(y, \varphi, z) \in D^s_{R_0} \times \Pi^r_{R_0} \times D^1_1\}$, $R_0 \in (0, 1)$.

Нарешті, припускаємо, що функції $\lambda_i(z)$, $i = \overline{1, s}$, де

$$\lambda_i(z) = \Lambda_i(z), \quad i = \overline{1, s_0}\ ;$$

$$\lambda_{i+s_0}(z) = \tilde{\lambda}_i(z) := \left.\frac{\partial \overline{H}_1}{\partial \tilde{y}_i}\right|_{y=0}, \quad i = \overline{1, s - s_0}\,,$$

лінійно незалежні в D^1_1.

2. Усереднення збуреного гамільтоніана. Опишемо процедуру усереднення збуреного гамільтоніана H для тих значень z, які належать множині $\{z \in D^1_1 : \hat{\Omega}(z) \notin \mathfrak{R}^{r_0}\}$, де $\hat{\Omega}(z) = \sum_{i=1}^{r_0} \Lambda_i(z)\hat{\sigma}_i = \{\hat{\varphi}, \langle \hat{\Lambda}(z), \hat{y}\rangle\}$,

$$\mathfrak{R}^r = \mathfrak{R}^r(T, \gamma, \tau, \varepsilon) = \bigcup_{|m|=1}^{N} \{\omega \in \boldsymbol{C}^r : |\langle m, \omega\rangle| < \gamma |m|^{-r}\}, \tag{3}$$

$N = N(T, \varepsilon) = \ln \varepsilon^{-T}$, $T > 0$, $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$ (у подальшому T буде вибиратись досить великим, а $\gamma, \varepsilon \ll 1$).

Зробимо масштабне перетворення $\hat{y} \mapsto \mu \hat{y}$, $\tilde{y} \mapsto \sqrt{\mu}\, \tilde{y}$. Після цього збурена система може розглядатись як гамільтонова відносно пуассонової структури

$$\{y_i, y_j\} = 0, \qquad \{\varphi_k, \hat{y}_i\} = \sigma_{ki},$$

$$\{\varphi_l, \tilde{y}_i\} = \sqrt{\mu}\, \sigma_{l, i+s_0}, \qquad \{\varphi_k, \varphi_l\} = \mu A_{ij}(\mu \hat{y}, \sqrt{\mu}\, \tilde{y}, z),$$

якщо за гамільтоніан взяти функцію

$$\mu^{-1}(H_0(\mu\hat{y}, \sqrt{\mu}\, y, \varphi), z) = \langle \hat{\Lambda}(z), \hat{y}\rangle + H_1(0, \varphi, z) +$$

$$+ \sqrt{\mu}\left[\left.\frac{\partial H_1}{\partial \tilde{y}}\right|_{y=0} \tilde{y} + G_0(\varphi, z)\tilde{y}^3\right] + \mathcal{O}(\mu),$$

де $G_0(\varphi, z) = \left.\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 H_0}{\partial \tilde{y}^3}\right|_{y=0}$.

Позначимо через $g^t(x; S)$ (локальний) потік системи з гамільтоніаном S. У подальшому ми неодноразово будемо користуватись наступною лемою (наводимо її без доведення).

Лема 1. *Нехай в області* $D \subset \boldsymbol{C}^n$ *задане аналітичне векторне поле* X: $D \mapsto \boldsymbol{C}^n$, *для якого* $|X(x)| \le \chi_0$, $|\partial X(x)/\partial x| \le \chi_1$, *де* χ_0, χ_1 *— додатні числа. Тоді в* $D - \chi_0$ *локальний потік* $\{g^t\}$ *цього поля існує для всіх* $t \in [-1, 1]$, *причому*

$$|g^t x - x| \le \chi_0, \quad |g^t x - x - tX(x)| \le \chi_1 \chi_0$$
$$\forall x \in D - \chi_0, \quad \forall t \in [-1, 1].$$

Визначимо функцію $S_0(\varphi, z)$ як 2π-періодичний розв'язок рівняння

$$\{S_0, \langle \hat{\Lambda}(z), \hat{y} \rangle\} \equiv \left\langle \frac{\partial S_0}{\partial \hat{\varphi}}, \hat{\Omega}(z) \right\rangle = \hat{S}_N H_1|_{y=0},$$

де

$$\hat{S}_N f(\varphi) = \sum\nolimits_{0 < |\hat{m}| \le N} \left[(2\pi)^{-r_0} \int_{T^{r_0}} f(\varphi) e^{i\langle \hat{m}, \hat{\varphi} \rangle} d\hat{\varphi}\right] e^{i\langle \hat{m}, \hat{\varphi} \rangle}, \; T^{r_0} = \boldsymbol{R}^{r_0} / 2\pi \boldsymbol{Z}^{r_0}.$$

Відомо [16, 17], що коли в області Π_ρ^r функція $f(\varphi)$ аналітична і $|f(\varphi)| \le M$, а $\hat{\Omega}(z) \notin \mathfrak{R}^{r_0}$, то для 2π-періодичного розв'язку рівняння $\left\langle \dfrac{\partial u}{\partial \hat{\varphi}}, \hat{\Omega}(z) \right\rangle = \hat{S}_N f(\varphi)$ виконується оцінка

$$|u(\varphi)| \le C(r, \tau) \gamma^{-1} \delta^{-r} M \qquad \forall \varphi \in \Pi_{\rho-\delta}^r. \tag{4}$$

Тут δ — довільне число з інтервалу $(0, \rho)$, $C(r, \tau)$ — стала, що залежить лише від r і τ. Крім того, якщо $\rho \in (0, 1)$, то функція $\hat{R}_N f(\varphi) = f(\varphi) - \hat{S}_N f(\varphi) - (2\pi)^{-r_0} \int_{T^{r_0}} f(\varphi) d\hat{\varphi}$ задовольняє нерівність

$$|\hat{R}_N f| \le \left(\frac{8 r_0}{e}\right)^{r_0} \frac{4M}{\delta} e^{-3\delta N/4} \qquad \forall \varphi \in \Pi_{\rho-\delta}^r. \tag{5}$$

Зробимо симплектичну заміну змінних $x \mapsto g^1(x; S_0)$. Покоординатно вона має вигляд

$$\hat{y}_i \mapsto \hat{y}_i - \left\langle \frac{\partial S_0}{\partial \hat{\varphi}}, \hat{\sigma}_i \right\rangle + \mathcal{O}(\mu), \qquad \tilde{y}_i \mapsto \tilde{y}_i + \mathcal{O}(\sqrt{\mu}), \qquad \varphi_k \mapsto \varphi_k + \mathcal{O}(\mu).$$

З урахуванням того, що перетворена система не реагує на додавання до її гамільтоніана функції, не залежної від y, φ, перетворений гамільтоніан матиме вигляд

$$H = \langle \hat{\Lambda}(z), \hat{y} \rangle + \sqrt{\mu} \left[\frac{\partial H_1}{\partial \tilde{y}} \bigg|_{y=0} \tilde{y} + G_0(\varphi, z) \tilde{y}^3 \right] + \mathcal{O}(\tilde{\mu}) + \mathcal{O}(\varepsilon^4). \tag{6}$$

Даний гамільтоніан будемо усереднювати за змінними φ, виконуючи серію перетворень вигляду $x \mapsto g^1(x; \mu^{j/2} S_j)$, $j = \overline{1, 7}$, де функції $S_j(y, \varphi, z)$ визначаються як 2π-періодичні щодо φ розв'язки рівнянь вигляду

$$\left\langle \frac{\partial S_j}{\partial \hat{\varphi}}, \hat{\Omega}(z) \right\rangle = \hat{S}_N \mathcal{H}_j,$$

а $\mathcal{H}_j$ визначаються послідовно, причому $\mathcal{H}_1$ — це коефіцієнт при $\sqrt{\mu}$ в (6). Після виконання вказаної процедури знову робимо масштабне перетворення $\hat{y} \mapsto \sqrt{\mu}\, \tilde{y}$. Враховуючи зроблене нами припущення щодо H_1, одержуємо таке твердження.

Твердження 1. *Нехай $R \in (0, R_0)$. Тоді для досить великого $T > 0$ і досить малого $\mu_0 > 0$ координати $(y; \varphi \,|\mathrm{mod}\, 2\pi)$ можна ввести таким чином, щоб дужки Пуассона задавались співвідношеннями вигляду* (1), *в яких $A_{kl}(y, z)$ замінено на $\mu A_{kl}(\mu y, z)$, а гамільтоніан збуреної системи мав вигляд*

$$\langle \hat{\Lambda}(z), \hat{y} \rangle + \mu \left[\langle \tilde{\lambda}(z), \tilde{y} \rangle + \hat{\mathcal{H}}_1(\hat{y}, \tilde{\varphi}, z) + \sqrt{\mu}\, \hat{\mathcal{H}}_2(y, \tilde{\varphi}, z, \sqrt{\mu}) \right] +$$
$$+ \mathbb{O}(\mu^4) + \mathbb{O}(\varepsilon^4). \tag{7}$$

При цьому функції $\hat{\Lambda}(z)$, $\tilde{\lambda}(z)$ *— дійсно-аналітичні в області* D_1^1, *а гамільтоніан є дійсно-аналітичною функцією змінних* y, φ, z, $\sqrt{\mu}$ *на підмножині області*

$$\mathcal{A}_R = \{(y, \varphi, z, \sqrt{\mu}) \colon y \in D_R^s,\ \varphi \in \Pi_R^r,\ z \in D_1^1,\ |\sqrt{\mu}| < \sqrt{\mu_0}\},$$

яка виділяється умовою $\hat{\Omega}(z) \notin \mathfrak{R}^{r_0}$.

Тепер скористаємось тим, що координати $\hat{y}$ комутують як з координатами y, так і з $\tilde{\varphi}$. Тому, міркуючи, як і вище, можемо виконати процедуру усереднення гамільтоніана (7) за змінними $\tilde{\varphi}$ і одержати такий результат.

Твердження 2. *Нехай* $\rho \in (0, R)$. *Тоді при досить великому* $T > 0$ *і досить малому* $\mu_0 > 0$ *існують координати* $(y; \varphi \,|\, \mathrm{mod}\, 2\pi)$, *у яких дужки Пуассона мають вигляд, описаний у твердженні* 1, *а гамільтоніан збуреної системи має вигляд*

$$\langle \hat{\Lambda}(z), \hat{y} \rangle + \mu \left[\langle \tilde{\lambda}(z), \tilde{y} \rangle + \overline{\mathcal{H}}_1(\hat{y}, z) + \sqrt{\mu}\, \overline{\mathcal{H}}_2(\hat{y}, z, \sqrt{\mu}) \right] +$$
$$+ \mathbb{O}(\mu^4) + \mathbb{O}(\varepsilon^4). \tag{8}$$

Область аналітичності цього гамільтоніана містить множину, яка виділяється з множини $\mathcal{A}_\rho$ *умовами*

$$\hat{\Omega}(z) \notin \mathfrak{R}^{r_0}, \qquad \tilde{\Omega}(z) := \sum_{i=1}^{s-s_0} \hat{\lambda}_i(z) \tilde{\sigma}_i \notin \mathfrak{R}^{r-r_0},$$

де $\tilde{\sigma}_i = (\sigma_{r_0+1, s_0+i}, \ldots, \sigma_{r, s_0+i})$.

Існування квазіперіодичних рухів у системі з гамільтоніаном (8) випливає з теореми, яку буде сформульовано у п. 3.

3. Формулювання основної теореми. Узагальнюючи об'єкт дослідження, припустимо, що на многовиді $\{ y \in \boldsymbol{R}^s : |y| < \rho \} \times T^r$ задано пуассонову структуру, залежну від параметра z, яка в координатах $x = (y; \varphi \,|\, \mathrm{mod}\, 2\pi)$ визначається рівностями

$$\{y_i, y_j\} = 0, \qquad \{\varphi, y_i\} = \sigma_i, \qquad \{\varphi_k, \varphi_l\} = b_{kl}(y, z),$$
$$i, j = \overline{1, s}, \qquad k, l = \overline{1, r}.$$

Будемо припускати, що вектори σ_i задовольняють умову (2), а функції $b_{kl}(y, z)$ дійсно-аналітичні і обмежені за модулем в області $D_\rho^s \times D_1^1$.

Розглянемо на цьому многовиді систему з гамільтоніаном $H(x, z)$. Покладемо

$$H \big|_{y=0} = h(\varphi, z); \qquad \left.\frac{\partial H}{\partial y_i}\right|_{y=0} = \Lambda_i(z) + g_i(\varphi, z);$$

$$\Omega(z) = \sum_{i=1}^{s} \Lambda_i(z) \sigma_i,$$

а також

$$G_\rho = D_\rho^s \times \Pi_\rho^r,\ Z = D_1^1 \setminus \left\{ z \in D_1^1 \colon \textstyle\sum_{i=1}^s \lambda_i(z) \sigma_i \in \mathfrak{R}^r(T, \gamma, \tau, \varepsilon) \right\}$$

(див. (3)). Для того щоб охопити випадок, коли частина кутових змінних системи є повільними, будемо припускати, що $\Lambda_i(z) = \zeta_i(\mu)\lambda_i(z)$, де $\zeta_i(\mu) = 1$, $i = \overline{1, s_0}$, і $\zeta_i(\mu) = \mu$ при $i = \overline{s_0 + 1, s}$.

Теорема 1. *Нехай функції* $\lambda_i(z)$, $i = \overline{1, s}$, *дійсно-аналітичні й лінійно незалежні в* D_1^1. *Існує число* $\tau > 0$ *і для довільного* $\eta > 0$ *можна вказати такі числа* $\varepsilon_* > 0$, $\gamma_* > 0$, *що коли гамільтоніан* $H(x, z)$ *є дійсно-аналітичною функцією в* $\Pi_\rho \times Z$ *при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$, $\gamma \in (0, \gamma_*)$ *і задовольняє нерівності*

$$|h(\varphi, z)| \le \mu^2 \varepsilon^a, \quad |g_i(\varphi, z)| \le \mu^2 \varepsilon^a \quad \forall (\varphi, z) \in \Pi_\rho^r \times Z;$$

$$\left|\frac{\partial H(x, z)}{\partial z}\right| \le C, \quad \left|\frac{\partial^2 H(x, z)}{\partial x_p \partial x_q}\right| \le \mu C \quad \forall (x, z) \in G_\rho \times Z$$

при $\mu > \varepsilon$, $1 < a < 2$, $C > 0$, $i = \overline{1, s}$, $p, q = \overline{1, r + s}$, *то існує множина* $\mathcal{Z} \in (-1, 1)$ *з такими властивостями*:

1) *міра Лебега множини* $(-1, 1) \setminus \mathcal{Z}$ *менша за* η;

2) *для кожного* $z \in \mathcal{Z}$ *існує дійсно-аналітичний симплектоморфізм* $\Phi(\cdot, z)\colon G_{\rho/2} \mapsto G_\rho$, *який задовольняє умову* $|\Phi(x, z) - x| \le \mu \varepsilon^{a/2}$, $x \in G_{\rho/2}$, *і зводить гамільтоніан до вигляду*

$$H \circ \Phi = \sum_{i=1}^{s} \Lambda_i^*(z) y_i + \mathcal{O}(|y|^2), \quad \Lambda_i^*(z) \in \boldsymbol{R}, \quad i = \overline{1, s}.$$

Система з гамільтоніаном H *має інваріантний тор* $x = \Phi(0, \psi, z)$, $\psi \in T^r$, *потік на якому визначає система* $\dot{\psi} = \Omega^*(z) := \sum_{i=1}^{s} \Lambda_i^*(z) \sigma_i$, *де компоненти вектора* $\Omega^*(z)$ *раціонально незалежні, причому*

$$\Omega_l^*(z) = \mathcal{O}(\mu), \quad l = \overline{r_0 + 1, r}.$$

Доведення даної теореми випливає з двох наступних пунктів.

4. Послідовні заміни змінних. Для відшукання квазіперіодичних рухів системи з гамільтоніаном H використаємо процедуру послідовних симплектичних замін змінних ньютонівського типу. Введемо наступні позначення:

$$|\cdot|_\rho = \sup_{x \in G_\rho} |\cdot|, \quad \delta_k = \frac{1}{14} \rho 2^{-k},$$

$$\rho_1 = \rho, \quad \rho_{k+1} = \rho_k - 7\delta_k, \quad \varepsilon_k = \varepsilon^{a^k},$$

$$N_k = \frac{4}{3} \delta_k^{-1} a^k |\ln \varepsilon|, \quad C_1 = C, \quad C_{k+1} = C_k + \varepsilon_k^{1-5\xi},$$

$$\mathcal{R}_k = \{y \in \boldsymbol{C}^r : |\langle m, \omega \rangle| < \mu \varepsilon_k^\xi, \ 0 < |m| < N_k\},$$

де число $\xi > 0$ задовольняє нерівність $2 - 10\xi > a$.

Твердження 3. *Нехай функція* $H_k(x, z)$, $k = 1, 2, \ldots$, *дійсно-аналітична в області* $G_{\rho_k} \times Z_k$, $Z_k \subset D_1^1$. *Покладемо*

$$H_k|_{y=0} = h_k(\varphi, z), \quad \left.\frac{\partial H_k}{\partial y_i}\right|_{y=0} = \Lambda_{ki}(z) + g_{ki}(\varphi, z),$$

$$\Omega_k(z) = \sum_{i=1}^{s} \Lambda_{ki}(z)\sigma_i,$$

і припустимо, що в $G_{\rho_k} \times Z_k$ *виконуються такі умови*:

1_k) $\overline{h}_k(z) = 0, \quad \overline{g}_{ki}(z) = 0, \quad i = \overline{1, s}$;

2_k) $|h_k(\varphi, z)| \le \mu^2 \varepsilon_k, \quad |g_{ki}(\varphi, z)| \le \mu^2 \varepsilon_k,$

$$\left|\frac{\partial H_k(x, z)}{\partial x}\right| \le C_k, \quad \left|\frac{\partial^2 H_k(x, z)}{\partial x_p \partial x_q}\right| \le \mu C_k, \quad i = \overline{1, s}, \quad p, q = \overline{1, r+s}.$$

Тоді можна вказати таке не залежне від k *число* $\varepsilon_* > 0$, *що для кожного* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$ *існує дійсно-аналітичне відображення* $f_k\colon G_{\rho_{k+1}} \times Z_{k+1} \mapsto G_{\rho_k}$, *де* $Z_{k+1} = \{z \in Z_k\colon \Omega_k(z) \notin \mathcal{R}_k\}$, *з такими властивостями*:

a) *всюди в* $G_{\rho_{k+1}} \times Z_{k+1}$ *виконуються нерівності*

$$|x - f_k(x, z)| \le \mu \varepsilon_k^{1-4\xi}; \qquad \left|\mathrm{Id} - \frac{\partial f_k}{\partial x}\right| \le \mu \varepsilon_k^{1-5\xi};$$

b) *при кожному* $z \in \operatorname{Re} Z_{k+1}$ *звуження* f_k *на* $\operatorname{Re} G_{\rho_{k+1}}$ *є симплектоморфізмом*;

c) *функція*

$$H_{k+1}(x, z) := H_k \circ f_k(x, z) - \overline{H_k \circ f_k}\,\big|_{y=0}$$

задовольняє умови 1_{k+1}, 2_{k+1}, *причому*

$$|\Lambda_k(z) - \Lambda_{k+1}(z)| \le \mu^2 \varepsilon_k^{1-3\xi} \qquad \forall z \in Z_{k+1}.$$

Доведення. Задля стислості позначень аргумент z тимчасово писати не будемо. Покладемо $f_k = g^1(x; S)$, де $S(x) = u(\varphi) + \langle v(\varphi), y\rangle$, а функції $u(\varphi)$, $v_1(\varphi)$, $\ldots, v_s(\varphi)$ — відповідно розв'язки рівнянь

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \Omega_k \right\rangle = \hat{S}_{N_k} h_k(\varphi), \tag{9}$$

$$\left\langle \frac{\partial v_l}{\partial \varphi}, \Omega_k \right\rangle = \hat{S}_{N_k} \left[g_{kl}(\varphi) - \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial u(\varphi)}{\partial \varphi_i} \sigma_{ij} \frac{\partial^2 H_k(0, \varphi)}{\partial y_j \partial y_l} \right]. \tag{10}$$

Якщо $z \in Z_{k+1}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$, $\varepsilon_* \ll 1$, то 2π-періодичні щодо φ розв'язки цих рівнянь задовольняють нерівності [10]

$$|u(\varphi)| \le 4^r \mu \varepsilon_k^{1-\xi} \delta_k^{-r} \le \mu \varepsilon_k^{1-2\xi} \qquad \forall \varphi \in \Pi^r_{\rho_k - \delta_k},$$

$$\left|\frac{\partial u(\varphi)}{\partial \varphi_i}\right| \le 4^r \mu \varepsilon_k^{1-\xi} \delta_k^{-(r+1)} \le \mu \varepsilon_k^{1-2\xi} \qquad \forall \varphi \in \Pi^r_{\rho_k - 2\delta_k},$$

$$|v_l(\varphi)| \le \mu \varepsilon_k^{1-3\xi} \qquad \forall \varphi \in \Pi^r_{\rho_k - 3\delta_k},$$

$$\left|\frac{\partial v_l(\varphi)}{\partial \varphi_i}\right| \le \mu \varepsilon_k^{1-3\xi} \qquad \forall \varphi \in \Pi^r_{\rho_k - 4\delta_k}.$$

Для векторного поля $\{x, S\}$ виконуються оцінки

$$|\{x,S\}|_{\rho_k-4\delta_k} \le \mu\varepsilon_k^{1-4\xi}; \qquad \left|\frac{\partial}{\partial x_i}\{x,S\}\right|_{\rho_k-5\delta_k} \le \mu\varepsilon_k^{1-4\xi}.$$

Згідно з лемою 1 маємо $f_k(x)\colon G_{\rho_k-6\delta_k} \mapsto G_{\rho_k-5\delta_k}$, причому

$$|x - f_k(x)|_{\rho_k-6\delta_k} \le \mu\varepsilon_k^{1-4\xi},$$

$$\left|\mathrm{Id} - \frac{\partial f_k(x)}{\partial x}\right|_{\rho_k-7\delta_k} \le \mu\varepsilon_k^{1-5\xi},$$

$$|\hat{f}_k(x)|_{\rho_k-6\delta_k} \le \mu^2\varepsilon_k^{2-9\xi},$$

де $\hat{f}_k(x) = f_k(x) - x - \{x,S\}$. Перетворений гамільтоніан можна подати у вигляді

$$H_k \circ f_k(x) = H_k\big(x + \{x,S\} + \hat{f}_k(x)\big) =$$

$$= H_k(x) - \{S, H_k\} + R_1(x) + R_2(x),$$

де

$$R_1(x) = H_k \circ f_k(x) - H_k\big(x + \{x,S\}\big),$$

$$R_2(x) = H_k\big(x + \{x,S\}\big) - \{H_k, S\} - H_k(x).$$

Неважко переконатися в тому, що

$$|R_1(x)|_{\rho_k-6\delta_k} \le \left|\frac{\partial H_k}{\partial x}\right|_{\rho_k} |\hat{f}_k|_{\rho_k-6\delta_k} \le C_k\mu^2\varepsilon_k^{2-9\xi},$$

$$|R_2(x)|_{\rho_k-6\delta_k} \le \frac{1}{2}\left|\frac{\partial^2 H_k}{\partial x^2}\right|_{\rho_k} |\{x,S\}|^2_{\rho_k-6\delta_k} \le C_k\mu^2\varepsilon_k^{2-9\xi},$$

$$\left|\frac{\partial R_i(x)}{\partial x}\right|_{\rho_k-7\delta_k} \le \mu^2\varepsilon_k^{2-10\xi}, \qquad \left|\frac{\partial^2 R_i(x)}{\partial x_p\,\partial x_q}\right|_{\rho_k-7\delta_k} \le \mu^2\varepsilon_k^{2-10\xi},$$

$$|\{S,H_k\}|_{\rho_k-4\delta_k} \le \mu\varepsilon_k^{1-4\xi}, \qquad \left|\frac{\partial\{S,H_k\}}{\partial x}\right|_{\rho_k-5\delta_k} \le \mu\varepsilon_k^{1-4\xi},$$

$$\left|\frac{\partial^2\{S,H_k\}}{\partial x_p\,\partial x_q}\right|_{\rho_k-5\delta_k} \le \mu\varepsilon_k^{1-4\xi}.$$

Оскільки виконується (9), то

$$(H_k - \{S,H_k\})|_{y=0} =$$

$$= R_{N_k} h_k + \sum_{i,j}\frac{\partial h_k}{\partial\varphi_i}\sigma_{ij}v_j - \sum_i \frac{\partial u}{\partial\varphi_i} g_{ki} - \sum_{i,j}\frac{\partial u}{\partial\varphi_i} b_{ij}(0)\frac{\partial h_k}{\partial\varphi_j},$$

і в області $\Pi^r_{\rho_k-3\delta_k}$ модуль цієї функції не перевищує $\mu^2\varepsilon_k^{2-4\xi}$. Враховуючи (10), маємо

$$\left.\frac{\partial}{\partial y_l}\right|_{y=0}(H_k - \{S,H_k\}) = \Lambda_{kl} + \breve{\Lambda}_{kl} + R_{N_k}\left[g_{kl} - \sum_{i,j}\frac{\partial u}{\partial\varphi_i}\sigma_{ij}\frac{\partial^2 H_k(0,\varphi)}{\partial y_j\,\partial y_l}\right] +$$

$$+\sum_{i,j}\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial\varphi_i}\sigma_{ij}v_j-\frac{\partial v_l}{\partial\varphi_i}\sigma_{ij}g_{kj}-\frac{\partial u}{\partial\varphi_i}\frac{\partial b_{ij}(0)}{\partial y_l}\frac{\partial h_k}{\partial\varphi_j}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial u}{\partial\varphi_i}b_{ij}(0)\frac{\partial g_{kl}}{\partial\varphi_j}-\frac{\partial v_l}{\partial\varphi_i}b_{ij}(0)\frac{\partial h_k}{\partial\varphi_j}\right),$$

де $\breve{\Lambda}_{kl}$ — середнє щодо φ функції $-\sum_{i,j}\dfrac{\partial u(\varphi)}{\partial\varphi_i}\sigma_{ij}\dfrac{\partial^2 H_k(0,\varphi)}{\partial y_j\partial y_l}$. Звідси знаходимо

$$\left.\frac{\partial}{\partial y_l}\right|_{y=0}(H_k-\{S,H_k\})-(\Lambda_{kl}+\breve{\Lambda}_{kl})|_{\rho_k-4\delta_k}\le\mu^2\varepsilon_k^{2-4\xi};$$

$$|\breve{\Lambda}_{kl}|\le\frac{1}{2}\mu^2\varepsilon_k^{1-3\xi}.$$

Виписані вище оцінки дозволяють легко перевірити виконання умов 1_{k+1}, 2_{k+1}, a), b), c).

Зауважимо, що при $k=1$ умови твердження 5 виконуютьс. для функції $H_1=H-\overline{H}|_{y=0}$ та множини $Z_1=Z$.

Покладемо $\Phi_{k+1}=f_1\circ\ldots\circ f_k$.

Твердження 4. *Існує* $\varepsilon_*>0$ *таке, що коли* $\varepsilon\in(0,\min(\mu,\varepsilon_*))$ *і* $(x,z)\in$ $\in G_{\rho/2}\times Z_{k+1}$, *то*

$$|\Phi_{k+1}-\Phi_k|\le\mu\varepsilon_k^{1-5\xi},\quad k=2,3,\ldots.$$

Якщо при цьому $Z_\infty=\bigcap_{k\ge1}Z_k\ne\varnothing$, *то на множині* $G_{\rho/2}\times Z_\infty$ *існує рівномірна границя* $\lim\limits_{k\to\infty}\Phi_k=\Phi$, *причому* $|\Phi-x|\le\mu\varepsilon^{a/2}$.

Доведення. З урахуванням твердження 3 при кожному $z\in Z_{k+1}$ виконуються нерівності

$$\left|\frac{\partial\Phi_k}{\partial x}\right|_{\rho_k}\le\prod_{j=1}^{k-1}(1+\mu\varepsilon_k^{1-5\xi})<2,$$

$$|\Phi_{k+1}-\Phi_k|_{\rho_{k+1}}=|\Phi_k\circ f_k-\Phi_k|_{\rho_{k+1}}\le\left|\frac{\partial\Phi_k}{\partial x}\right|_{\rho_k}|f_k-x|_{\rho_{k+1}}\le$$

$$\le2\mu\varepsilon_k^{1-4\xi},\quad k=2,3,\ldots,$$

з яких і випливають потрібні висновки.

Покладемо $\mathcal{Z}=\operatorname{Re}Z_\infty$. На множині $\operatorname{Re}G_{\rho/2}\times\mathcal{Z}$ гамільтоніан $H_\infty=H\circ\Phi$ має властивість: $H_\infty(0,\varphi,z)=0$, $\dfrac{\partial H_\infty(0,\varphi,z)}{\partial y_l}=:\Lambda_l^*(z)$ не залежить від φ. Виписавши рівняння руху системи з гамільтоніаном H_∞, переконуємось у тому, що $\mathcal{Z}$ має властивість 2 з теореми 1.

5. Оцінка міри множини $\mathcal{Z}$. Занумеруємо елементи множини $\mathbf{Z}^r\setminus\{0\}$, поставивши у відповідність кожному її елементу m натуральне число $j=j(m)$ так, щоб, зокрема, $j(m_1)<j(m_2)$ при $|m_1|<|m_2|$. Послідовність множин з твердження 3 можна описати рекурентно: поклавши $Z_0=D_1^1-\eta/2$, визначаємо

$$Z_{k+1} = Z_k \setminus \left[\bigcup_{j=1}^{P_k} R_{kj}(d_{kj}) \right] = Z_0 \setminus \left[\bigcup_{i=0}^{k} \bigcup_{j=1}^{P_i} R_{ij}(d_{ij}) \right], \quad k \geq 0.$$

Тут P_k — кількість елементів множини $\{z \in \mathbf{Z}^r : 0 < |m| \leq N_k\}$, де $N_0 = \ln \varepsilon^{-T}$, N_k — визначено у п. 4,

$$R_{kj}(d) = \{z \in Z_k : |f_{kj}(z)| < d\}, \quad f_{kj}(z) := \sum_{l=1}^{s} c_{kjl} \lambda_{kl}(z),$$

$$c_{kjl} = \begin{cases} \dfrac{\langle m, \sigma_l \rangle}{\max\limits_{1 \leq l \leq s} |\langle m, \sigma_l \rangle|}, & k = 0; \\ \dfrac{\zeta_l(\mu) \langle m, \sigma_l \rangle}{\max\limits_{1 \leq l \leq s} |\zeta_l(\mu) \langle m, \sigma_l \rangle|}, & k \geq 1, \end{cases} \qquad \lambda_{kl}(z) = \begin{cases} \lambda_l(z), & k = 0; \\ \dfrac{\Lambda_{kl}}{\zeta_l(\mu)}, & k \geq 1, \end{cases}$$

$$d_{kj} = \begin{cases} \dfrac{\gamma |m|^{-r}}{\max\limits_{1 \leq l \leq s} |\langle m, \sigma_l \rangle|}, & k = 0; \\ \dfrac{\mu \varepsilon_k^{\xi}}{\max\limits_{1 \leq l \leq s} |\zeta_l(\mu) \langle m, \sigma_l \rangle|}, & k \geq 1, \end{cases}$$

$j = j(m)$. Для аналізу множин R_{kj} нам будуть потрібні оцінки похідних функцій $f_{kj}(z)$. Такі оцінки можна одержати за допомогою нерівностей Коші на певних підмножинах множин Z_k. А саме, покладемо

$$Z_0^{\alpha} = Z_0 - 2(\alpha - 1) b_0;$$

$$Z_{k+1}^{\alpha} = (Z_0 - \alpha b_0) \setminus \left[\bigcup_{i=0}^{k} \bigcup_{j=1}^{P_i} (R_{ij}(d_{ij}) + \alpha b_i) \right],$$

де $\alpha = 1, 2$, $b_k = \varepsilon_k^{\kappa}$, $k \geq 0$, $0 < \kappa < \xi / q$ (натуральне число q буде конкретизоване нижче).

Згідно з твердженням 3

$$|\lambda_{k+1\,l}(z) - \lambda_{kl}(z)| \leq \mu \varepsilon_k^{1-3\xi}, \quad z \in Z_{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots . \tag{11}$$

Скориставшись нерівностями Коші, при $j = 1, \ldots, q$ одержуємо

$$\left| \frac{d^i}{dz^i} (\lambda_{k+1\,l}(z) - \lambda_{kl}(z)) \right| \leq i \mu \varepsilon_k^{1-3\xi} b_k^i \leq \mu \varepsilon_k^{1-4\xi}, \quad z \in Z_{k+1} - b_k. \tag{12}$$

Отже, при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 << 1$ маємо

$$\begin{gathered} |\lambda_l(z) - \lambda_{k+1\,l}(z)| \leq \sum_{j=0}^{k} \mu \varepsilon_j^{1-3\xi} \leq \mu \varepsilon^{1-4\xi}, \quad z \in Z_{k+1}, \\ \left| \frac{d^i}{dz^i} (\lambda_l(z) - \lambda_{k+1\,l}(z)) \right| \leq \sum_{j=0}^{k} \mu \varepsilon_j^{1-4\xi} b_j^i \leq \mu \varepsilon^{1-5\xi}, \quad z \in Z_{k+1}^1, \quad i = \overline{0, q}. \end{gathered} \tag{13}$$

Оцінювати міру множин $\operatorname{Re} Z_k^1$ все ще незручно, оскільки множина типу $\operatorname{Re}[R_{ij}(d) + b]$ може й не збігатись з дійсним b-околом множини $\operatorname{Re} R_{ij}(d)$.

Твердження 5. *Визначимо послідовність множин*

$$Z_0' = Z_0 - 2b_0, \quad Z_{k+1}' = Z_k' \setminus \bigcup_{j=1}^{P_k} R_{kj}(d_{kj}), \quad k = 0, 1, \dots,$$

де

$$e_{kj} = d_{kj} + 2s(C^{(1)} + \mu\varepsilon^{1-5\xi})b_k, \quad C^{(1)} = \max_{1 \le i \le s} \max_{z \in Z_0} \left| \frac{d\lambda_i(z)}{dz} \right|.$$

При $0 < \varepsilon < \varepsilon_* << 1$ *має місце включення*

$$I_k : \; Z_k' \subset Z_k^2 .$$

Доведення. Очевидно, що $Z_0' \subset Z_0^2$. Доведемо, що з I_k випливає I_{k+1}. Припустимо, навпаки, що існує $z_* \in Z_{k+1}' \setminus Z_{k+1}^2$. Оскільки $z_* \in Z_k' \subset Z_k^2$, то

$$z_* \in \left[Z_k' \setminus \bigcup_{j=1}^{P_k} R_{kj}(e_{kj}) \right] \setminus \left[Z_k^2 \setminus \bigcup_{j=1}^{P_k} (R_{kj}(d_{kj}) + 2b_k) \right] \subset$$

$$\subset \left[Z_k' \setminus \bigcup_{j=1}^{P_k} R_{kj}(e_{kj}) \right] \bigcap \bigcup_{j=1}^{P_k} (R_{kj}(d_{kj}) + 2b_k).$$

Це означає, що знайдеться натуральне $j \le P_k$ таке, що $|f_{kj}(z_*)| \ge e_{kj}$, але в той же час існує точка z_0, для якої $|z_0 - z_*| < 2b_k$ і $|f_{kj}(z_0)| < d_{kj}$. Якщо $0 < \varepsilon < \varepsilon_* << 1$, то $2b_k \le b_{k-1}$, $k = 0, 1, \dots, b_{-1} := 2b_0$. В такому разі

$$z_0 \in \{z_*\} + 2b_k \subset Z_k' + 2b_k \subset Z_k^2 + b_{k-1} \subset Z_k^1 .$$

Оскільки відрізок, що сполучає z_0 і z_*, лежить в Z_k^1, то скориставшись (13) та нерівністю Лагранжа, одержимо

$$|f_{kj}(z_*)| < |f_{kj}(z_*) - f_{kj}(z_0)| + d_{kj} \le$$

$$\le s \cdot (C^{(1)} + \mu\varepsilon^{1-5\xi}) \cdot 2b_k + d_{kj} = e_{kj}.$$

Одержали суперечність. Твердження доведено.

Тепер наша мета полягатиме в одержанні оцінок міри множин

$$\operatorname{Re} R_{kj}(e_{kj}) = \{ z \in \operatorname{Re} Z_k' : |f_{kj}(z)| < e_{kj} \}.$$

Нагадаємо, що $f_{kj}(z)$ є лінійними комбінаціями функцій $\lambda_{kl}(z)$ з коефіцієнтами c_{kjl}, для яких $\max_{1 \le l \le s} |c_{kjl}| = 1$. Для подальшого нам буде потрібно кілька допоміжних технічних результатів. Наступна лема є модифікацією деяких тверджень з робіт [18, 19].

Лема 2. *Нехай* I *— відрізок,* $\lambda_l : I \to \boldsymbol{R}$, $i = \overline{1, s}$, $s \ge 2$, *— система функцій класу* $C^{(q)}(I)$, *для яких існують цілі числа* $p_1, \dots, p_s$ *такі, що* $0 \le p_1 < p_2 < \dots < p_s = q - 1$ *і в кожній точці* $z \in I$ *матриця* $\{\lambda_j^{(p_i)}(z)\}_{i,j=1}^s$ *має обернену матрицю* $\{\nu_{ij}(z)\}_{i,j=1}^s$. *Покладемо*

$$\upsilon = \left(\max_{z \in I} \max_{1 \le i \le s} \sum_{j=1}^{s} |\nu_{ij}(z)| \right)^{-1}, \quad V = \max_{1 \le i \le q} \max_{z \in I} \sum_{j=1}^{s} |\lambda_j^i(z)|.$$

Існують числа $e_0 = e_0(q, v, V) > 0$, $K = K(q, v, V) > 1$ *такі, що для довільних чисел* $c_1, \dots, c_s$, $\max_{1 \le i \le s} |c_s| = 1$, *і довільного* $e \in (0, e_0)$ *множина* $\mathcal{S} = \{z \in I: |f(z)| \le e\}$, *де* $f(z) := \sum_{l=1}^{s} c_l \lambda_l(z)$, *складається не більше ніж з* $L = 2q[V \operatorname{mes} I/v] + 1$ *відрізків, кожен з яких має довжину не більшу ніж* $K \sqrt[q-1]{e}$.

Доведення. Легко показати, що

$$v \le \max_{1 \le i \le q-1} |f^{(i)}(z)| \le V, \quad |f^{(q)}(z)| \le V \quad \forall z \in I. \tag{14}$$

Функція $f_{\pm e}(z) = f(z) \pm e$ при $e \in (0, v)$ на відрізку $I' \subset I$, для якого $\operatorname{mes} I' \le v/V$, має не більше ніж q нулів. Справді, якщо число нулів більше за q, то за теоремою Ролля кожна з функцій $f^{(i)}(z)$, $i = \overline{1, q-1}$, має нуль всередині I'. З іншого боку, нехай z_* — нуль $f_{\pm e}(z)$ в середині I'. З (14) випливає, що знайдеться натуральне $i \le q-1$, для якого $|f^{(i)}(z_*)| \ge v$. А тоді $|f^{(i)}(z)| \ge v - |f^{(i)}(z) - f^{(i)}(z_*)| \ge v - V|z - z_*| > 0$ для довільного $z \in \operatorname{Int} I'$, що неможливо. Таким чином, $\mathcal{S}$ складається не більше ніж з L відрізків.

Нехай тепер $z_1 < z_2$ — пара послідовних коренів рівняння $|f(z)| = e$, причому $|f(z)| < e$ при $z \in (z_1, z_2)$. Тоді за умови $e < v/2$ на відрізку $[z_1 - v/(2V), z_2 + v/(2V)]$ маємо $|f(z)| \le e + v/2 < v$. З (14) випливає, що $f(z)$ на вказаному відрізку є, за термінологією роботи [18], (V, v)-функцією. Для завершення доведення досить скористатись результатами [18, 19].

***Зауваження* 1.** Якщо $\lambda_i(z)$, $i = \overline{1, s}$, — дійсно аналітичні лінійно незалежні на $(-1, 1)$ функції, то відрізок $[1 - \eta/2, 1 + \eta/2]$ можна розбити на скінченне число відрізків, у кожному з яких ці функції задовольняють умови леми 2 (деталі див. у [13]). Задля спрощення міркувань вважатимемо, що ці умови виконуються на всьому відрізку $I = [1 - \eta/2, 1 + \eta/2]$.

Наступні дві леми випливають з відомих фактів теорії продовження функцій (див., наприклад, [20]), тому їх доведення не наводимо.

Лема 3. *Нехай* a_i, b_i *— довільні числа,* $i = \overline{0, q}$. *Для довільного відрізку* $[\alpha, \beta]$ *існує гладка функція* $g: [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$, *для якої* $g^{(i)}(\alpha) = a_i$, $g^{(i)}(\beta) = b_i$, $i = \overline{0, q}$, *причому*

$$\max_{z \in [\alpha, \beta]} |g^{(p)}(z)| \le \hat{C} |\alpha - \beta|^{-p} \sum_{i=0}^{q} (|a_i| + |b_i|), \quad 0 \le p \le q,$$

де стала $\hat{C} > 0$ *не залежить від* α, β, a_i, b_i, $i = \overline{0, q}$.

Лема 4. *Нехай* I, $I_j \subset I$, $j = \overline{1, N}$, *— відрізки і на замиканні множини* $J = I \setminus \bigcup_{j=1}^{N} I_j$ *визначено функцію* $f: \bar{J} \to \mathbf{R}$ *класу* $C^{(q)}(\bar{J})$. *Тоді існує продовження цієї функції* $\tilde{f} \in C^{(q)}(I)$ *таке, що*

$$\max_{z \in I} |\tilde{f}^{(p)}(z)| \le 2\hat{C} \left[\min_{1 \le j \le N} \operatorname{mes} I_j \right]^{-p} \sum_{i=0}^{q} \max_{z \in \bar{J}} |f^{(i)}(z)|, \quad p = \overline{0, q}.$$

Покладемо $X_0 = [-1 + 2b_0, 1 - 2b_0]$ і побудуємо множини $X_0 \supset X_1 \supset \dots$ за описаною нижче схемою. Припустимо, що $X_k \subset \operatorname{Re} Z'_k$, $k \geq 0$, вже побудовано і функції $\lambda_{kl}(z)$ продовжено на X_0 так, що вони мають властивість

$$P_k: \max_{z \in X_0} |\lambda_l^{(p)}(z) - \lambda_{kl}^{(p)}(z)| \leq \mu \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon_i^{1-5\xi}, \quad p = \overline{0, q}$$

(покладаємо $\lambda_{0l} = \lambda_l$, $\varepsilon_{-1} = 0$). При $0 < \varepsilon < \varepsilon_* << 1$ ці функції задовольняють на $I = X_0$ умови леми 2 з $v = v_k > v_0/2$, $V = V_k < 2V_0$. Покладемо

$$e_* = e_0(q, v_0/2, 2V_0), \quad K_* = K(q, v_0/2, 2V_0).$$

Якщо $k \geq 1$, то додатково припустимо, що X_k одержано з X_0 вилученням певної кількості інтервалів, кожен з яких має довжину більшу за $K_* \sqrt[q-1]{2sC^{(1)}b_{k-1}}$. Можна вважати, що $e_{kj} < e_*$, $k = 0, 1, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots$. Тоді множина $\operatorname{Re} R_{kj}(e_{kj})$, згідно з лемою 2, є об'єднанням не більше ніж $L_* = 16qV_0/v_0 + 1$ інтервалів, кожен з яких має довжину не більшу за $K_* \sqrt[q-1]{e_{kj}}$. Кожен такий інтервал вкладемо у інтервал довжини $K_* \sqrt[q-1]{e_{kj}}$. Об'єднавши останні, одержимо множину, яку позначимо через S_{kj}. Зауважимо, що кожен інтервал з S_{kj} має довжину більшу за $K_* \sqrt[q-1]{2sC^{(1)}b_k}$. Тепер покладемо $X_{k+1} = X_k \setminus \bigcup_{j=1}^{P_k} S_{kj}$. Зрозуміло, що $X_{k+1} \subset \operatorname{Re} Z'_{k+1}$. Продовжимо кожну функцію $\lambda_{k+1\,l}(z)$ на X_0. Функція $f(z) := \lambda_{k+1\,l}(z) - \lambda_{kl}(z)$ аналітична на X_{k+1}. Користуючись лемою 4 і оцінками (11), (12), можемо продовжити її на X_0 так, що

$$\max_{z \in X_0} |\tilde{f}^{(p)}(z)| \leq 2s\hat{C}\left[K_* \sqrt[q-1]{2sC^{(1)}b_k}\right]^{-p} \mu\varepsilon_k^{1-4\xi} \leq \mu\varepsilon_k^{1-5\xi}, \quad p = \overline{0, q}.$$

Звідси легко зробити висновок; що функції $\lambda_{k+1\,l}(z)$, $l = \overline{1, s}$, можна продовжити так, щоб вони мали властивість P_{k+1} і $V_{k+1} < 2V_0$, $v_{k+1} > v_0/2$.

Оцінимо тепер міру тієї множини, яка викидається з X_0 на кожному кроці ітерацій. Будемо вважати, що $\tau \geq rq$. Тоді при $k = 0$ маємо

$$\operatorname{mes}\left\{\bigcup_{j=1}^{P_0} S_{0j}\right\} \leq L_* K_* \sum_{j=1}^{P_0} \sqrt[q-1]{e_{0j}} \leq$$

$$\leq L_* K_* \sum_{|m|=1}^{N(T,\varepsilon)} \left(\frac{\gamma}{\gamma_0}|m|^{-r(q-1)} + 4sC^{(1)}\varepsilon^{\kappa}\right)^{1/(q-1)} \leq$$

$$\leq c_1\left(\sqrt[q-1]{\frac{\gamma}{\gamma_0}} + (\ln\varepsilon^{-T})^r \varepsilon^{\kappa/(q-1)}\right),$$

а при $k \geq 1$

$$\operatorname{mes}\left\{\bigcup_{j=1}^{P_k} S_{kj}\right\} \leq L_* K_* \sum_{j=1}^{P_k} \sqrt[q-1]{e_{kj}} \leq L_* K_* \sum_{j=1}^{P_k} \left(\varepsilon_k^{\xi}\frac{N_k^r}{\gamma_0} + 4sC^{(1)}\varepsilon_k^{\kappa}\right)^{1/(q-1)} \leq$$

$$\leq c_2\left(\varepsilon_k^{\xi/(q-1)} N_k^{r+r/(q-1)} + N_k^r \varepsilon_k^{\kappa/(q-1)}\right) \leq c_3\varepsilon_k^{\sigma},$$

де додатні числа c_1, c_2, c_3, σ не залежать від k і ε.

З цих оцінок і випливає властивість 1 множини Z з теореми 1.

6. Застосування основної теореми до збуреної системи.

Теорема 2. *Нехай виконуються припущення п.* 1 *і відображення* y_0: $(-1,1) \mapsto \boldsymbol{R}^s$ — *дійсно-аналітичний дифеоморфізм. Тоді знайдеться число* $\mu_* > 0$ *таке, що для кожного* $\mu \in (0, \mu_*)$ *існує множина* $Z_\mu \subset (-1,1)$, *кожній точці* z *якої можна поставити у взаємно однозначну відповідність інваріантний тор системи з гамільтоніаном* $H_0 + \mu H_1$. *Цей тор задається рівняннями*

$$y = y_0(z) + \mu Y(\psi, z, \mu), \qquad \varphi = \psi + \mu \Psi(\psi, z, \mu),$$

де при фіксованих $z \in Z_\mu$ *і* $\mu \in (0, \mu_*)$ *відображення* $Y: T^r \mapsto \boldsymbol{R}^s$, $\Psi: T^r \mapsto \boldsymbol{R}^r$ *дійсно-аналітичні. Потік на торі має ті ж властивості, що й у теоремі* 1. *При кожному фіксованому* $\mu \in (0, \mu_*)$ *відображення* $y_0 + Y|_{\psi=0}: Z_\mu \mapsto \boldsymbol{R}^s$ *є границею послідовності дифеоморфізмів* $y_0 + \mu Y_k: Z_{k,\mu} \mapsto \boldsymbol{R}^s$, *визначених на послідовності відкритих множин* $(-1,1) \supset Z_{1,\mu} \supset Z_{2,\mu} \supset \ldots \supset Z_\mu$, *причому існує стала* $C > 0$ *така, що* $\sup\limits_{z \in Z_{k,\mu}} |dY_k / dz| \le C$. *Нарешті,*

$$\operatorname{mes}((-1,1) \setminus Z_\mu) \to 0, \ \mu \to 0.$$

Доведення. До гамільтоніана (8) з огляду на зауваження до леми 2 можна застосувати теорему 1 при $\varepsilon = \mu^{4/3}$, $a = 4/3$. З урахуванням того, за допомогою якого типу перетворень було одержано цей гамільтоніан з гамільтоніана $H_0 + \mu H_1$, випливає твердження теореми про існування та вигляд інваріантних торів.

Встановимо характер залежності торів від параметра z. З нерівності Коші випливає, що для відображення f_k з твердження 3 на множині Z^1_{k+1} виконується оцінка $|\partial f_k / \partial z| \le \mu \varepsilon_k^{1-4\xi} / b_k \le \mu \varepsilon_k^{1-5\xi}$. Звідси одержуємо нерівність

$$\left|\frac{\partial \Phi_{k+1}}{\partial z}\right|_{\rho_{k+1}} \le \left|\frac{\partial \Phi_k}{\partial z}\right|_{\rho_k} + \left|\frac{\partial \Phi_k}{\partial x}\right|_{\rho_k} \left|\frac{\partial f_k}{\partial z}\right|_{\rho_{k+1}} \le$$

$$\le \left|\frac{\partial \Phi_k}{\partial z}\right|_{\rho_k} + 2\mu \varepsilon_k^{1-5\xi}, \qquad z \in Z^1_{k+1},$$

з якої випливає, що при досить малих μ виконується нерівність

$$\left|\frac{\partial \Phi_k}{\partial z}\right|_{\rho/2} \le \mu \varepsilon^{a/2}, \qquad z \in Z^1_{k+1}, \quad k = 2, 3, \ldots . \tag{15}$$

Далі, для пари точок $z_1, z_2 \in Z^2_{k+1}$ маємо нерівність

$$|\Phi_{k+1}(x, z_1) - \Phi_{k+1}(x, z_2)|_{\rho_{k+1}} \le$$

$$\le \left|\frac{\partial \Phi_k(x, z_1)}{\partial x}\right|_{\rho_k} |f_k(x, z_1) - f_k(x, z_2)|_{\rho_{k+1}} +$$

$$+ |\Phi_k(x, z_1) - \Phi_k(x, z_2)|_{\rho_k}, \qquad z \in Z^2_{k+1}.$$

Якщо $|z_1 - z_2| < b_k$, то відрізок, що з'єднує z_1 з z_2, лежить в Z^1_{k+1}, а тому за нерівністю Лагранжа

$$|f_k(x, z_1) - f_k(x, z_2)|_{\rho_{k+1}} \le \mu \varepsilon_k^{1-5\xi} |z_1 - z_2|.$$

Якщо ж $|z_1 - z_2| \geq b_k$, то

$$|f_k(x, z_1) - f_k(x, z_2)|_{\rho_{k+1}} \leq 2\mu\varepsilon_k^{1-4\xi} < 2\mu\varepsilon_k^{1-4\xi} b_k^{-1}|z_1 - z_2| \leq$$
$$\leq \mu\varepsilon_k^{1-5\xi}|z_1 - z_2|.$$

Тепер зрозуміло, що при досить малих μ виконується нерівність

$$|\Phi_k(x, z_1) - \Phi_k(x, z_2)|_{\rho_k} \leq$$
$$\leq \mu\varepsilon^{a/2}|z_1 - z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in Z_k^2, \quad k = 2, 3, \ldots . \tag{16}$$

З (15) та (16) легко одержуємо потрібні властивості відображення $y_0(z) + \mu Y(0, z, \mu)$.

Зауваження 2. Міркування в доведенні теореми 2, які стосуються властивостей відображення Φ_k, залишаються вірними і у випадку багатовимірного параметра z.

1. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
2. *Самойленко А. М.* О некоторых проблемах теории возмущений гладких инвариантных торов динамических систем // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 12. – С. 1665–1699.
3. *Нехорошев Н. Н.* Переменные действие-угол и их обобщения // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1972. – **26**. – С. 181–198.
4. *Duistermaat J. J.* On global action-angle coordinates // Communs Pure and Appl. Math. – 1980. – **33**, № 5. – P. 687–706.
5. *Парасюк И. О.* Переменные типа действие-угол на симплектических многообразиях, расслоенных коизотропными торами // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 1. – С. 77–85.
6. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1969. – 248 с.
7. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. (Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР). – 1985. – **3**. – С. 5–304.
8. *Парасюк И. О.* О сохранении многомерных инвариантных торов гамильтоновых систем // Укр. мат. журн. – 1984. – **36**, № 4. – С. 467–473.
9. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Успехи. мат. наук. – 1963. – **18**, вып. 6. – С. 91–192.
10. *Самойленко А. М.* О приводимости системы линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1968. – **20**, № 2. – С. 201–212.
11. *Колмогоров А. Н.* О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Докл. АН СССР. – 1954. – **98**, № 4. – С. 527–530.
12. *Мозер Ю.* О разложении условно-периодических движений в сходящиеся степенные ряды // Успехи мат. наук. – 1969. – **24**, вып. 2. – С. 165–217.
13. *Rüssmann H.* Non-degeneracy in the perturbation theory of integrable dynamical systems // London Math. Soc. Lect. Notes Ser. – 1989. – № 134. – P. 15–18.
14. *Брюно А. Д.* Об условиях невырожденности в теореме Колмогорова // Докл. РАН. – 1992. – **322**, № 6. – С. 1028–1032.
15. *Broer H. W., Huitema G. B., Sevryuk M. B.* Quasi-periodic motions in families of dynamical systems: order admits chaos. – Groningen, 1995. – 186 p. – (Preprint / Univ. Groningen; № W-9519).
16. *Арнольд В. И.* Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Успехи мат. наук. – 1963. – **18**, вып. 5. – С. 13–40.
17. *Rüssmann H.* On optimal estimates for the solutions of linear partial differential equation of first order with constant coefficients on the torus // Lect. Notes Phys. – 1975. – **38**. – P. 598–624.
18. *Пяртли А. С.* Диофантовы приближения на подмногообразиях евклидова пространства // Функцион. анализ и его прил. – 1969. – **3**, вып. 3. – С. 59–62.
19. *Bakhtin V. I.* A strengthened extremal property of Chebyshev polynomials // Moscow Univ. Math. Bull. – 1987. – **42**, № 2. – P. 24–26.
20. *Никольский С. М.* Курс математического анализа: В 2-х т. – М.: Наука, 1973. – Т. 2. – 392 с.

Одержано 01.07.97