УДК 517.9

Р. І. Петришин, Л. М. Лакуста (Чернів. ун-т)

ДО ПИТАННЯ ПРО ІНТЕГРАЛЬНІ МНОГОВИДИ КОЛИВНИХ СИСТЕМ З ПОВІЛЬНО ЗМІННИМИ ЧАСТОТАМИ

By using averaging functions, we construct integral manifolds of an oscillating system which, in the process of evolution, passes through resonances. We investigate the smoothness of integral manifold and establish the estimates of its partial derivatives.

За допомогою середніх функцій побудовано інтегральний многовид коливної системи, яка в процесі еволюції проходить через резонанси. Досліджено гладкість інтегрального многовиду і встановлено оцінки його частинних похідних.

Розглядається багаточастотна коливна система звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{d\tau} = a(x,\tau) + \tilde{a}(x,\varphi,\tau) + \varepsilon A_1(x,\varphi,\tau,\varepsilon), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + \tilde{b}(x,\varphi,\tau,\varepsilon), \tag{1}$$

де $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in R^m$, $m \geq 2$, $\tau \in R = (-\infty, +\infty)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ — малий параметр, дійсні функції a, $\tilde{a}$, A_1, ω і $\tilde{b}$ визначені і 2π-періодичні по кожній із змінних φ_ν, $\nu = \overline{1,m}$, на множині $D \times R^m \times R \times (0, \varepsilon_0] = G$, D — обмежена область. Не втрачаючи загальності можна вважати, що інтегральне середнє функції $\tilde{a}(x,\varphi,\tau)$ по $\varphi_\nu \in [0, 2\pi]$ тотожно дорівнює нулю, оскільки в противному разі його можна віднести в системі (1) до $a(x,\tau)$.

В роботах [1, 2] доведено існування і встановлено властивості інтегрального многовиду системи (1) у випадку, коли праві частини рівнянь (1) двічі неперервно диференційовні по x, φ, τ і норма матриці $P = \dfrac{\partial}{\partial x}\tilde{a}(x,\varphi,\tau)$ досить мала. В даній статті ми відмовляємось від обмеження, що $\|P\|$ мала, і вивчаємо аналогічні питання. Слід зазначити, що запропонований тут метод вимагає збільшення на одиницю порядку гладкості правих частин рівнянь (1) і деяких додаткових обмежень на коефіцієнти Фур'є функції $\tilde{a}(x,\varphi,\tau)$.

Припустимо, що

$$[a, A_1, \tilde{b}] \in C^1_\tau(G, c_1) \cap C^2_{x,\varphi}(G, c_1),$$

$$\frac{\partial a}{\partial x} \in C^1_\tau(G, c_1), \quad \tilde{a} \in C^3_{x,\tau}(G, c_1),$$

$$\sum_{k\neq 0} \left[|k|^2 \sup_G \|b_k\| + |k| \left(\sup_G \left\|\frac{\partial b_k}{\partial x}\right\| + \sup_G \left\|\frac{\partial b_k}{\partial \tau}\right\| \right)\right] \leq c_1, \tag{2}$$

$$\sum_{k\neq 0} \left[|k|^2 \sup_G \|a_k\| + |k| \left(\sup_G \left\|\frac{\partial a_k}{\partial x}\right\| + \sup_G \left\|\frac{\partial a_k}{\partial \tau}\right\| \right) + \right.$$

$$+ \sup_G \left\|\frac{\partial^2 a_k}{\partial x \partial \tau}\right\| + \sum_{j=1}^n \sup_G \left\|\frac{\partial^2 a_k}{\partial x \partial x_j}\right\| + \frac{1}{|k|} \left(\sup_G \left\|\frac{\partial^2 a_k}{\partial \tau^2}\right\| + \sum_{j=1}^n \sup_G \left\|\frac{\partial^3 a_k}{\partial x \partial x_j \partial \tau}\right\| + \right.$$

$$\left.\left. + \sum_{j,s=1}^n \sup_G \left\|\frac{\partial^3 a_k}{\partial x \partial x_j \partial x_s}\right\| \right)\right] \leq c_1.$$

Тут c_1 — додатна стала, $a_k = a_k(x,\tau)$ і $b_k = b_k(x,\tau,\varepsilon)$ — коефіцієнти при гармоніках $\exp i(k,\varphi)$ розкладу функцій $\tilde{a}(x,\varphi,\tau)$ і $\tilde{b}(x,\varphi,\tau,\varepsilon)$ в ряд Фур'є, $i=\sqrt{-1}$, $(k,\varphi)=k_1\varphi_1+\ldots+k_m\varphi_m$ — скалярний добуток векторів, $|k|=|k_1|+\ldots+|k_m|$; через $C^l_{x,\varphi,\tau}(G,c_1)$ позначено множину функцій, які при кожному фіксованому $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ мають неперервні по $x,\varphi,\tau\in D\times R^m\times R$ і обмежені сталою c_1 частинні похідні по всіх змінних x,φ,τ до порядку l включно. Під нормою матриці будемо розуміти суму модулів її елементів.

Вважатимемо, що компоненти ω_ν, $\nu=\overline{1,m}$, вектора частот $\omega(\tau)$ і їх похідні по τ до порядку $p-1$ $(p\geq m)$ рівномірно неперервні на всій осі, причому

$$\|(W_p^T(\tau)W_p(\tau))^{-1}W_p^T(\tau)\|\leq c_2,\ \|\omega(\tau)\|+\|\frac{d}{d\tau}\omega(\tau)\|\leq c_2\quad\forall\tau\in R,\qquad(3)$$

де $W_p(\tau)$ і $W_p^T(\tau)$ — відповідно матриця $\left(\dfrac{d^{s-1}}{d\tau^{s-1}}\omega_\nu(\tau)\right)_{\nu,s=1}^{m,p}$ і транспонована до неї, c_2 — стала.

Розглянемо усереднену по кутових змінних φ систему рівнянь першого наближення для повільних змінних

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau}=a(\bar{x},\tau)$$

і припустимо, що існує її розв'язок $\bar{x}=\bar{x}(\tau)$, який визначений для всіх $\tau\in R$ і $\bar{x}(\tau)\in D_\rho$ при деякому $\rho>0$ (D_ρ — множина тих точок, що належать D разом із своїм ρ-околом). Вважатимемо, що система рівнянь в варіаціях

$$\frac{dz}{d\tau}=H(\tau)z,\qquad H(\tau)=\frac{\partial}{\partial x}a(\bar{x}(\tau),\tau)$$

гіперболічна [3, с.10], а матриця Гріна $Q(\tau,t)$ справджує нерівність [1]

$$\|Q(\tau,t)\|\leq K e^{-\nu|t-\tau|}\qquad\forall\tau,t\in R\qquad(4)$$

із деякими сталими $\nu>0$ і $K\geq1$.

Покладемо в системі (1)

$$x=z+\varepsilon u(z,\varphi,\tau,\mu),\qquad u=\sum_{k\neq0}\frac{1-h_\mu((\bar{k},\omega(\tau)))}{i(\bar{k},\omega(\tau))|k|}a_k(z,\tau)e^{i(k,\varphi)},\qquad(5)$$

де

$$\bar{k}=\frac{k}{|k|},\qquad h_\mu(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\nu_{2\mu}(l)\,\omega_\mu(t-l)\,dl.$$

Тут $\nu_{2\mu}(l)\equiv1$ при $|l|\leq2\mu$, $\nu_{2\mu}(l)\equiv0$ при $|l|>2\mu$, а $\omega_\mu(l)$ — ядро усереднення [4, с.29]

$$\omega_\mu(l)=\begin{cases}0, & |l|\geq\mu;\\ \dfrac{1}{\mu}c_3e^{-\frac{\mu^2}{\mu^2-l^2}}, & |l|<\mu,\end{cases}\qquad c_3=\int_{-1}^{1}e^{-\frac{1}{1-l^2}}dl.$$

Радіус усереднення $\mu<1$ ми означимо нижче. Так побудована функція $h_\mu(t)$ — нескінченно диференційовна при всіх $t\in R$, фінітна, $0\leq h_\mu(t)\leq1$ $\forall t\in R$, $h_\mu(t)\equiv1$ при $|t|\leq\mu$, $h_\mu(t)\equiv0$ при $|t|>3\mu$ і для всіх цілих $q\geq0$ задовольняє оцінки

$$\left|\frac{d^q}{dt^q} h_\mu(t)\right| \le c^{(q)} t^{-q}\, \bar{h}_\mu(t), \tag{6}$$

де $c^{(q)}$ — сталі, $\bar{h}_\mu \equiv 0$ при $|t| \le \mu$ і $|t| \ge 3\mu$, $\bar{h}_\mu \equiv 1$ при $\mu < |t| < 3\mu$.

При досить малому $\varepsilon_0 > 0$ заміна (5) зводить (1) до системи

$$\frac{dz}{d\tau} = a(z,\tau) + \delta(z,\varphi,\tau,\mu) + \varepsilon v(z,\varphi,\tau,\mu) + \varepsilon A(z,\varphi,\tau,\varepsilon,\mu),$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(z,\varphi,\tau,\varepsilon,\mu), \tag{7}$$

в якій

$$b = \tilde{b}(z+\varepsilon u, \varphi, \tau, \varepsilon), \quad v = -\frac{\partial u}{\partial \tau}, \quad u = u(z,\varphi,\tau,\mu),$$

$$\delta = \sum_{k \ne 0} a_k(z,\tau)\, h_\mu((\bar{k}, \omega(\tau)))\, e^{i(k,\varphi)},$$

$$A = B - \frac{\partial u}{\partial z}\left(E + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}\right)^{-1}(a(z,\tau) + \delta + \varepsilon v + \varepsilon B),$$

$$B = A_1(z+\varepsilon u, \varphi, \tau, \varepsilon) - \frac{\partial u}{\partial \varphi} b + \frac{1}{\varepsilon}\left[a(z+\varepsilon u, \tau) - a(z,\tau) + \tilde{a}(z+\varepsilon u, \varphi, \tau) - \tilde{a}(z,\varphi,\tau)\right].$$

Враховуючи умови (2), (3), (6), легко встановити існування такої сталої c_4, що

$$\|u\| + \left\|\frac{\partial u}{\partial z}\right\| + \left\|\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right\| \le \frac{c_4}{\mu}, \qquad \|v\| \le \frac{c_4}{\mu^2}, \qquad \|A\| \le \frac{c_4}{\mu}(1 + \varepsilon\|v\|) \tag{8}$$

для всіх $(z,\varphi,\tau,\varepsilon) \in D_{\frac{1}{2}\rho} \times R^m \times R \times (0, \varepsilon_0]$. Зазначимо, що обмеження $z \in \in D_{\frac{1}{2}\rho}$ і нерівність $\dfrac{c_4 \varepsilon}{\mu} < \dfrac{\rho}{2}$ гарантують належність точки $z + \varepsilon u$ області D.

Лема. *Нехай*: 1) $f(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$ *та* $\theta(t) = (\theta_1(t), \ldots, \theta_m(t))$ — *довільні неперервні при* $t \in R$ *функції, причому* $f(t) \in D$; 2) *виконуються умови* (2) – (4). *Тоді існують такі незалежні від* μ *сталі* c_5 і c_6, *що для всіх* $\tau \in R$ *вірні оцінки*

$$\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} Q(\tau,t)\, \delta(f(t), \theta(t), t, \mu)\, dt \right\| \le c_5\, \mu^{\frac{1}{p-1}}, \tag{9}$$

$$\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} Q(\tau,t)\, v(f(t), \theta(t), t, \mu)\, dt \right\| \le \frac{c_6}{\mu}. \tag{10}$$

Доведення. Згідно з умовами (3) для довільного $\tau \in R$ існують такі $\Delta > 0$, незалежне від $\tau, \bar{k}$, і ціле $r = r(\tau, \bar{k}) \in [0, p-1]$, що для будь-якого $t \in [\tau - \Delta, \tau + \Delta]$ виконується нерівність [1]

$$\left|\frac{d^r}{dt^r}(\bar{k}, \omega(t))\right| \ge \frac{1}{2pc_2}. \tag{11}$$

Якщо $r \ge 1$, то з останньої нерівності випливає, що функції $(\bar{k}, \omega(t)) + c$ і $\dfrac{d}{dt}(\bar{k}, \omega(t))$ $(c = \text{const})$ можуть перетворюватися в нуль на відрізку $[\tau - \Delta, \tau + \Delta]$ не більше, ніж в 2^{p-1} точках. Крім того, $[\tau - \Delta, \tau + \Delta]$ можна розбити на дві множни $M(\tau)$ і $N(\tau)$ відрізків таких, що $M(\tau)$ складається із $l_1 \le 2^{p-1}-1$ відрізків, довжина кожного з яких не перевищує $2\overline{\mu} = \mathrm{const}$, а $N(\tau)$ — із $l_2 \le$ $\le 2^{p-1}$ відрізків, на кожному з яких виконується нерівність

$$\left|(\overline{k}, \omega(t))\right| \ge \frac{1}{2pc_2}\, \overline{\mu}^{\,p-1}. \tag{12}$$

Встановимо спочатку оцінку (9). Маємо

$$\Big\| \int_{-\infty}^{+\infty} Q\delta\, dt \Big\| \le \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{k\ne 0} \Big\| \int_{2s\Delta+\tau}^{2(s+1)\Delta+\tau} Q\, a_k h_\mu((\overline{k}, \omega(t)))dt \Big\| \le$$

$$\le K \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{-2|s|\Delta\gamma} \sum_{k\ne 0} \sup_G \|a_k\| \Big(\int_{M(\tau+(2s+1)\Delta)} h_\mu((\overline{k}, \omega(t)))dt +$$

$$+ \int_{N(\tau+(2s+1)\Delta)} h_\mu((\overline{k}, \omega(t)))dt \Big). \tag{13}$$

Покладемо $\overline{\mu}^{\,p-1} = 7pc_2\mu$. Із нерівності (12) і означення функції $h_\mu(t)$ випливає, що $h_\mu((\overline{k}, \omega(t))) \equiv 0$ на множині $N(\tau + (2s+1)\Delta)$, тому

$$\Big\| \int_{-\infty}^{+\infty} Q\delta\, dt \Big\| \le 2K \sum_{s=0}^{\infty} e^{-2s\Delta\gamma} \sum_{k\ne 0} \sup_G \|a_k\| 2^p\, \overline{\mu} \le 2^{p+1} K c_1 \frac{1}{1-e^{-2\gamma\Delta}}\overline{\mu}.$$

Звідси одержуємо оцінку (9) із сталою

$$c_5 = 2^{p+1} K c_1 \frac{1}{1-e^{-2\gamma\Delta}} (7pc_2)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Доведемо тепер справедливість оцінки (10). Врахувавши означення функції v і умову (6) при $q = 1$, одержимо нерівність

$$\Big\| \int_{-\infty}^{+\infty} Qv\, dt \Big\| \le K \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{-2|s|\Delta\gamma} \sum_{k\ne 0} \frac{1}{|k|} \Big(\sup_G \Big\| \frac{\partial a_k}{\partial t} \Big\| +$$

$$+ \sup_G \|a_k\| \Big) \int_{2s\Delta+\tau}^{2(s+1)\Delta+\tau} g_\mu(\overline{k}, t)dt,$$

в якій

$$g_\mu(\overline{k}, t) = \left[1 - h_\mu((\overline{k}, \omega(t)))\right] \left[\frac{1}{\left|(\overline{k}, \omega(t))\right|} + \left| \frac{d}{dt} \frac{1}{(\overline{k}, \omega(t))} \right| \right] +$$

$$+ c^{(1)}\, \overline{h}_\mu((\overline{k}, \omega(t))) \left| \frac{d}{dt} \frac{1}{(\overline{k}, \omega(t))} \right|.$$

Якщо (11) виконується при $r = 0$, то, очевидно,

$$\int_{2s\Delta+\tau}^{2(s+1)\Delta+\tau} g_\mu(\overline{k}, t)dt \le 4pc_2\Delta(1 + 2pc_2(1 + c^{(1)})). \tag{14}$$

Нехай нерівність (11) виконується при $r \ge 1$. Згідно з зазначеним вище відрізок $[2s\Delta + \tau,\ 2(s+1)\Delta + \tau]$ можна розбити на скінченне число відрізків $[\alpha_j, \beta_j]$, на кожному з яких функції $\mu - \left|(\overline{k}, \omega(t))\right|$ і $\dfrac{d}{dt}(\overline{k}, \omega(t))$ не змінюють знак. Якщо $\mu - \left|(\overline{k}, \omega(t))\right| \ge 0 \ \ \forall t \in [\alpha_j, \beta_j]$, то

$$\int_{\alpha_j}^{\beta_j} g_\mu(\bar{k}, t)dt = 0, \tag{15}$$

а якщо $\mu - |(\bar{k}, \omega(t))| \le 0$ при $t \in [\alpha_j, \beta_j]$, то

$$\int_{\alpha_j}^{\beta_j} g_\mu(\bar{k}, t)dt \le \frac{\beta_j - \alpha_j}{\mu} + (1 + c^{(1)}) \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \left| \frac{d}{dt} \frac{1}{(\bar{k}, \omega(t))} dt \right| =$$

$$= \frac{\beta_j - \alpha_j}{\mu} + (1 + c^{(1)}) \left| \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \frac{d}{dt} \frac{1}{(\bar{k}, \omega(t))} dt \right| \le$$

$$\le [(\beta_j - \alpha_j) + 2(1 + c^{(1)})] \frac{1}{\mu}. \tag{16}$$

Об'єднуючи (13) – (16), одержуємо оцінку (10). Лему доведено.

Перетворимо систему (7) за допомогою заміни $z = \bar{x}(\tau) + y$, $\|y\| \le \frac{1}{2}\rho$, до вигляду

$$\frac{dy}{d\tau} = H(\tau)y + F(y, \tau) + \delta(\bar{x}(\tau) + y, \varphi, \tau, \mu) + \varepsilon \upsilon(\bar{x}(\tau) + y, \varphi, \tau, \mu) +$$

$$+ \varepsilon A(\bar{x}(\tau) + y, \varphi, \tau, \varepsilon, \mu),$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(\bar{x}(\tau) + y, \varphi, \tau, \varepsilon, \mu), \tag{17}$$

де

$$F(y, \tau) = a(\bar{x}(\tau) + y, \tau) - a(\bar{x}(\tau), \tau) - H(\tau)y, \quad \|F\| \le \frac{1}{2} n^2 c_1 \|y\|^2.$$

Інтегральний многовид рівнянь (17) визначатимемо як границю при $j \to \infty$ ітерацій

$$Y_j(\psi, \tau, \varepsilon, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t, \tau) [F(Y_{j-1}, t) + \delta(\bar{x}(t) + Y_{j-1}, \varphi_{\tau,j}^t, t, \mu) + \varepsilon \upsilon(\bar{x}(t) +$$

$$+ Y_{j-1}, \varphi_{\tau,j}^t, t, \mu) + \varepsilon A(\bar{x}(t) + Y_{j-1}, \varphi_{\tau,j}^t, t, \varepsilon, \mu)] dt, \quad j \ge 0, \tag{18}$$

де $Y_0 \equiv 0$, $Y_{j-1} = Y_{j-1}(\varphi_{\tau,j}^t, t, \varepsilon, \mu)$, а $\varphi_{\tau,j}^t = \varphi_{\tau,j}^t(\psi, \varepsilon, \mu)$ — розв'язок задачі Коші

$$\frac{d}{dt} \varphi_{\tau,j}^t = \frac{\omega(t)}{\varepsilon} + b(\bar{x}(t) + Y_{j-1}(\varphi_{\tau,j}^t, t, \varepsilon, \mu), \varphi_{\tau,j}^t, t, \varepsilon, \mu), \quad \varphi_{\tau,j}^t = \psi \in R^m.$$

Теорема 1. *Якщо виконуються умови* (2) – (4), *то можна вказати такі сталі* d_s, $s = \overline{1, 6}$, *незалежні від* ε *і* $\mu = \mu(\varepsilon)$, *що при досить малому* ε_0 *функції* $Y_j = Y_j(\psi, \tau, \varepsilon, \mu(\varepsilon))$ — 2π*-періодичні за кожною із компонент* ψ_ν, $\nu = \overline{1, m}$, *вектора* ψ, *двічі неперервно диференційовні по* ψ, τ *і для всіх* $(\psi, \tau, \varepsilon) \in R^m \times R \times (0, \varepsilon_0] = G_1$ *справджують нерівності*

$$\|Y_j\| \le d_1 \varepsilon^{\frac{1}{p}}, \quad \left\|\frac{\partial Y_j}{\partial \psi}\right\| \le d_2 \varepsilon^{\frac{1}{p}}, \quad \sum_{\nu}^{m} \left\|\frac{\partial^2 Y_j}{\partial \psi \partial \psi_\nu}\right\| \le d_3 \varepsilon^{\frac{1}{p}}, \tag{19}$$

$$\left\|\frac{\partial Y_j}{\partial \tau}\right\| \le d_4 \varepsilon^{\frac{1}{p}-1}, \quad \left\|\frac{\partial^2 Y_j}{\partial \psi \partial \tau}\right\| \le d_5 \varepsilon^{\frac{1}{p}-1}, \quad \left\|\frac{\partial^2 Y_j}{\partial \tau^2}\right\| \le d_6 \varepsilon^{\frac{1}{p}-2}. \tag{20}$$

Доведення. Розглянемо ітерації (18). Гладкість по ψ, τ і періодичність по ψ_ν, $\nu = \overline{1, m}$, функцій $Y_j = Y_j(\psi, \tau, \varepsilon, \mu)$ встановлюються, як і в [2]. Доведемо першу із нерівностей (19). Використовуючи лему і оцінки (8), одержуємо нерівність

$$\sup_{\psi,\tau} \| Y_j(\psi, \tau, \varepsilon, \mu) \| \leq \frac{K}{\gamma} n^2 c_1 \sup_{\psi,\tau} \| Y_{j-1}(\psi, \tau, \varepsilon, \mu) \|^2 + c_5 \mu^{\frac{1}{p-1}} +$$

$$+ \left(c_6 + \frac{2}{\gamma} K c_4\right) \frac{\varepsilon}{\mu} + c_4 c_6 \frac{\varepsilon^2}{\mu^2},$$

з якої при $\varepsilon < \mu$ виводимо

$$\sup_{\psi,\tau} \| Y_j \| \leq \frac{K}{\gamma} n^2 c_1 \sup_{\psi,\tau} \| Y_{j-1} \|^2 + c_5 \mu^{\frac{1}{p-1}} + \left(c_6 + \frac{2}{\gamma} K c_4 + c_4 c_6\right) \frac{\varepsilon}{\mu}. \tag{21}$$

Покладемо $\mu^{\frac{1}{p-1}} = \frac{\varepsilon}{\mu}$, тобто $\mu = \mu(\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{p-1}{p}}$. Враховуючи, що $Y_0 \equiv 0$, із (21) при

$$\varepsilon_0 \leq \min \left\{ \left(\frac{2}{\gamma} K n^2 c_1 d_1\right)^{-p}; \left(\frac{\rho}{2 d_1}\right)^p \right\}, \quad d_1 = 2\left(\frac{2}{\gamma} K c_4 + c_5 + c_4 c_6 + c_6\right),$$

одержуємо оцінку

$$\| Y_j(\psi, \tau, \varepsilon, \mu(\varepsilon)) \| \leq d_1 \varepsilon^{\frac{1}{p}} \quad \forall (\psi, \tau, \varepsilon) \in G_1, \ j \geq 0.$$

Зазначимо, що при вибраному вище значенні $\mu(\varepsilon)$ остання оцінка буде найкращою відносно порядку по ε.

За допомогою нерівностей [2, с. 124]

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \psi} (\varphi_{\tau, j}^t - \psi) \right\| \leq c_7 \varepsilon^{\frac{1}{p}} (1 + |t - \tau|) e^{c_7 \varepsilon^{\frac{1}{p}} |t - \tau|}, \quad c_7 = \text{const},$$

$$\sum_{\nu=1}^{m} \left\| \frac{\partial^2}{\partial \psi \partial \psi_\nu} \varphi_{\tau, j}^t \right\| \leq c_7 \varepsilon^{\frac{1}{p}} (1 + |t - \tau|^2) e^{c_7 \varepsilon^{\frac{1}{p}} |t - \tau|}$$

аналогічно встановлюємо дві останні оцінки (19). Відмітимо, що при цьому істотно використовуються обмеження на коефіцієнти Фур'є функцій $\tilde{a}(x, \varphi, \tau)$ і $\tilde{b}(x, \varphi, \tau, \varepsilon)$.

Оцінки (20) випливають із (2), (3), (8), (19) і тотожності

$$\frac{\partial Y_j}{\partial \tau} + \frac{\partial Y_j}{\partial \psi} \left(\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b\left(\bar{x}(\tau) + Y_{j-1}, \psi, \tau, \varepsilon, \varepsilon^{\frac{p-1}{p}}\right) \right) =$$

$$= H(\tau) Y_j + F(Y_{j-1}, \tau) + \delta\left(\bar{x}(\tau) + Y_{j-1}, \psi, \tau, \varepsilon^{\frac{p-1}{p}}\right) +$$

$$+ \varepsilon v\left(\bar{x}(\tau) + Y_{j-1}, \psi, \tau, \varepsilon^{\frac{p-1}{p}}\right) + \varepsilon A\left(\bar{x}(\tau) + Y_{j-1}, \psi, \tau, \varepsilon, \varepsilon^{\frac{p-1}{p}}\right),$$

в якій $Y_l = Y_l(\psi, \tau, \varepsilon, \varepsilon^{(p-1)/p})$ при $l = j - 1, j$. Теорему доведено.

Наступна теорема дає відповідь на питання про існування та гладкість інтегрального многовиду системи (1). Зазначимо, що для її доведення потрібно використати теорему 1 і схему доведення теореми 1.3.1 роботи [2]. Відмінність полягає в тому, що збіжність послідовностей $\{ Y_j \}$ і $\{ \frac{\partial}{\partial\psi} Y_j \}$ встановлюється не за рахунок малості норми матриці $\frac{\partial\tilde{a}}{\partial x}$, а за рахунок властивостей функції $h_\mu((\bar{k},\omega(t)))$. Згідно з лемою міра множини точок часового відрізка довжини 2Δ, для яких $h_\mu((\bar{k},\omega(t))) \neq 0$, прямує до нуля при $\mu == \varepsilon^{(p-1)/p} \to 0$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* (2) – (4). *Тоді при досить малому* $\varepsilon_0 > > 0$ *вірні наступні твердження*:

1) *в* $\sigma_1 \varepsilon^{1/p}$*-околі кривої* $\bar{x} = \bar{x}(\tau)$ *існує інтегральний многовид* $x = X(\psi, \tau, \varepsilon)$ *системи* (1), *де* $\psi, \tau, \varepsilon \in G_1$,

$$X(\psi,\tau,\varepsilon) = \bar{x}(\tau) + Y(\psi,\tau,\varepsilon) + \varepsilon u(\bar{x}(\tau) + Y(\psi,\tau,\varepsilon), \psi, \tau, \varepsilon^{\frac{p-1}{p}}),$$

$$Y(\psi,\tau,\varepsilon) = \lim_{j\to\infty} Y_j(\psi,\tau,\varepsilon,\varepsilon^{\frac{p-1}{p}});$$

2) *функція* $X(\psi,\tau,\varepsilon)$ *неперервно диференційовна по* ψ, τ, *задовольняє нерівність*

$$\left\| \frac{\partial X}{\partial\psi} \right\| + \varepsilon \left\| \frac{\partial X}{\partial\tau} \right\| \leq \sigma_2 \varepsilon^{1/p} \quad \forall (\psi,\tau,\varepsilon) \in G_1,$$

а $\frac{\partial X}{\partial\psi}$ *і* $\frac{\partial X}{\partial\tau}$ *справджують умову Ліпшиця*:

$$\left\| \frac{\partial X(\psi,\tau,\varepsilon)}{\partial\psi} - \frac{\partial X(\bar{\psi},\bar{\tau},\varepsilon)}{\partial\psi} \right\| \leq \sigma_3 \varepsilon^{1/p} \|\psi - \bar{\psi}\| + \sigma_3 \varepsilon^{1/p-1} |\tau - \bar{\tau}|,$$

$$\left\| \frac{\partial X(\psi,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} - \frac{\partial X(\bar{\psi},\bar{\tau},\varepsilon)}{\partial\tau} \right\| \leq \sigma_3 \varepsilon^{1/p-1} \|\psi - \bar{\psi}\| + \sigma_3 \varepsilon^{1/p-2} |\tau - \bar{\tau}|;$$

3) *на інтегральному многовиді система* (1) *має вигляд*

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + \tilde{b}(X(\varphi,\tau,\varepsilon),\varphi,\tau,\varepsilon).$$

Тут $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ *— сталі, незалежні від* ε.

1. *Самойленко А. М., Петришин Р. И.* Об интегральных многообразиях многочастотных колебательных систем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1990. – **54**, № 2. – С.378 – 395.
2. *Петришин Р. І.* Дослідження коливних систем з повільно змінними частотами за допомогою методу усереднення: Дис. … д-ра фіз.-мат. наук. – Київ, 1995. – 248 с.
3. *Плис В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
4. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высш. шк., 1977. – 431 с.

Одержано 26.03.97