УДК 517.9

Н. И. Ронто, А. М. Самойленко, С. И. Трофимчук
(Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ТЕОРИЯ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА: ДОСТИЖЕНИЯ И НОВЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ. I*

For the numerical-analytic method suggested by A. M. Samoilenko in 1965, the history of further development is described and the relation to other investigations is analyzed.

Викладена історія розвитку чисельно-аналітичного методу, запропонованого у 1965 р. А. М. Самойленком, та проаналізовано його зв'язок з іншими дослідженнями.

1. История метода последовательных периодических приближений. В начале 60-х годов ученые Киевской школы по нелинейной механике, возглавляемой Ю. А. Митропольским, значительное внимание уделяли проблеме нелинейных колебаний. В рамках этих исследований в 1965-1966 гг. одним из авторов этой работы был предложен метод изучения и построения T-периодических решений нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad x, f \in R^n, \qquad f(t,x) = f(t+T,x),$$
$$x(0) = x(T). \tag{1}$$

В работах А. М. Самойленко [1, 2] этот метод был назван „численно-аналитическим методом исследования периодических решений". В последующих публикациях математиков как Киевской, так и других школ встречались названия „численно-аналитический метод последовательных периодических приближений", „численно-аналитический метод А. М. Самойленко". Алгоритм метода чрезвычайно прост и связан с изучением уравнения

$$x(t,z) = z + \int_0^t f(s, x(s,z))\,ds - \frac{t}{T}\int_0^T f(s, x(s,z))\,ds. \tag{2}$$

Каждое его решение $x(t,z)$ есть T-периодическая функция: $x(0,z) = x(T,z)$, и если третье слагаемое в правой части (2) равно нулю, то $x(t,z)$ будет и решением (1). Верно и обратное утверждение. Таким образом, метод включает в себя два основных этапа: „аналитическую" часть — решение уравнения (2) методом последовательных приближений и „численную" часть — решение трансцендентного уравнения

$$\Delta(z) = \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x(s,z))\,ds = 0. \tag{3}$$

Алгоритм численно-аналитического метода в операторном виде может быть описан следующим образом. Обозначим через $\mathfrak{f}$ оператор Немыцкого, порожденный функцией $f(t,x)$:

$$\mathfrak{f}:\ C[0,T] \to C[0,T], \qquad \mathfrak{f}x(t) := f(t, x(t)), \qquad t \in [0,T].$$

Введем в рассмотрение отображения:

$$\mathcal{I}:\ C[0,T] \to C[0,T], \qquad \mathcal{I}x(t) = \int_0^t x(s)\,ds, \qquad t \in [0,T],$$

* Выполнена при частичной поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований при Министерстве науки Украины (проект № 14/269), а также гранта ОТКА ТО19095.

$$\mathcal{P}\colon\ C[0,T]\to CP_T[R^n],\qquad \mathcal{P}x(t)=x(t)-\frac{t}{T}[x(T)-x(0)],\qquad t\in[0,T],$$

$$Q\colon\ C[0,T]\to C[0,T],\qquad Q:=I-\mathcal{P}.$$

Легко проверить, что $\mathcal{P}$ — проектор, переводящий пространство всех непрерывных вектор-функций $C[0,T]=C(C[0,T],\mathbb{R}^n)$ в подпространство T-периодических функций $CP_T[\mathbb{R}^n]$. Тогда согласно идее метода краевая задача (1) эквивалентна системе уравнений

$$x=z+\mathcal{P}\mathcal{I}\dagger x,$$

$$Q\mathcal{I}\dagger x=0.$$

В последней системе (первое уравнение — интегральное, второе — определяющее) неизвестным является пара $(x(\cdot),z)$, причем $x(t),x(0)=z$ — искомое T-периодическое решение.

1.1. Основные положения. Перейдем к формулировке основных положений метода. В работах [1, 2], а также в монографиях А. М. Самойленко, Н. И. Ронто [3 – 5] было установлено, что метод „работает" при следующих предположениях:

Н1.1. Функция $f(t,x)=(f_1(t,x),\ldots,f_n(t,x))$ определена, непрерывна и T-периодична по t в области $(t,x)\in\mathbb{R}\times D$, где D — подобласть $\mathbb{R}^n$.

Н1.2. Функция $|f(t,x)|=(|f_1(t,x)|,\ldots,|f_n(t,x)|)$ в области определения ограничена вектором $M\in\mathbb{R}^n_+$ и удовлетворяет по переменной x условию Липшица с матрицей $K\in\mathbb{R}^{n\times n}_+$:

$$|f(t,x)|\le M,\qquad |f(t,x')|-|f(t,x'')|\le K|x'-x''|. \tag{4}$$

Н1.3. Множество

$$D_\beta=\{x\in R^n\colon S(x,\beta)\subset D\}\ne\varnothing, \tag{5}$$

т. е. множество точек $x\in\mathbb{R}^n$, содержащееся в D вместе со своей $\beta=\dfrac{T}{2}M$-окрестностью, не пусто.

Н1.4. Наибольшее собственное значение $\lambda_{\max}(K)$ матрицы K таково, что

$$T\lambda_{\max}(K)<q, \tag{6}$$

где $q=3{,}1\ldots$ (см. также п. 1.2.1).

Здесь всюду принято обозначение $|(x_1,x_2,\ldots,x_n)|=(|x_1|,|x_2|,\ldots,|x_n|)$ и неравенство между векторами покомпонентное. Использование „псевдонормы" $|x|$ вместо обычных норм $\|\cdot\|$ в R^n и оценок типа

$$\|f(t,x')\|-f(t,x'')\|\le K\|x'-x''\|,\qquad K\in\mathbb{R}^1,$$

вызвано желанием получить менее обременительные условия применимости метода.

В последующем удобно использовать термин „периодическая краевая задача" вместо „периодического решения системы дифференциальных уравнений" и заменить в области определения действительную ось $\mathbb{R}$ на $[0,T]$.

Рассмотрим последовательность T-периодических функций $\{x_m(t,z)\}$, зависящих от параметра $z\in\mathbb{R}^n$ и определенных рекуррентным соотношением

$$x_m(t,z)=z+\int_0^t\Big[f(s,x_{m-1}(s,z))-\frac{1}{T}\int_0^T f(\tau,x_{m-1}(\tau,z))\,d\tau\Big]\,ds, \tag{7}$$

где $m=1,2,\ldots$ и $x_0(t,z)=z$.

Очевидно, что для каждого $m \in N$: $x_m(t, z) = x_m(t+T, z)$ и $x_m(0, z) = z$.

Справедливо следующее утверждение о сходимости этой последовательности и о предельной функции $x^*(t, z)$.

Теорема 1. *Пусть T-периодическая краевая задача* (1) *удовлетворяет условиям* H1.1 – H1.4. *Тогда для каждого $z \in D_\beta$:*

1) $\{x_m(t, z)\}$ *равномерно сходится:*

$$\lim_{m\to\infty} x_m(t, z) = x^*(t, z)\,; \tag{8}$$

2) *функция $x^*(t, z)$ является единственным в области D T-периодическим решением уравнения*

$$x(t) = z + \int_0^t \left[f(s, x(s)) - \frac{1}{T}\int_0^T f(\tau, x(\tau))\, d\tau \right] ds \tag{9}$$

или, что то же самое, T-периодическим решением следующей „возмущенной" краевой задачи:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) - \Delta(z),$$
$$x(0) = x(T), \tag{10}$$

где „возмущение"

$$\Delta(z) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t, x^*(t, z))\, dt\,;$$

3) *справедлива оценка*

$$|x^*(t, z) - x_m(t, z)| \le \alpha_1(t) Q^m (E-Q)^{-1} M, \qquad t \in [0, T], \tag{11}$$

где $\alpha_1(t) = 2t\left(1 - \dfrac{t}{T}\right) \le \dfrac{T}{2}$, $Q = \dfrac{T}{q}K$;

4) *функция* $\Delta(z)\colon D_\beta \to \mathbb{R}^n$ *липшицева.*

Для того чтобы решение $x^*(t, z)$ задачи (10) было решением исходной периодической краевой задачи (1), необходимо и достаточно, чтобы z удовлетворяло следующему определяющему уравнению:

$$\Delta(z) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t, x^*(t, z))\, dt = 0 \tag{12}$$

(n уравнений, n неизвестных). Возникает вопрос: позволяет ли достаточно специальная процедура построения определяющего уравнения найти все T-периодические решения задачи (1) ?

Следующее утверждение показывает, что определяющее уравнение (12) в действительности „улавливает" все T-периодические решения (1) в рассматриваемой области.

Теорема 2. *При выполнении условий* H1.1 – H1.4 *корни $z = z^*$ определяющего уравнения $\Delta(z) = 0$ определяют начальные значения всех T-периодических решений $x(t)$ задачи* (1), *лежащих в D и таких, что $z \in D_\beta$.*

Конечно, на практике вычисление функции $\Delta(z)$ не всегда возможно (за исключением, пожалуй, автономных систем, где $\Delta(z) = f(z)$). Поэтому приходится ограничиваться построением первых приближений

$$\Delta_m(z) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t, x_m(t, z))\,dt, \tag{13}$$

где m — некоторое натуральное число. Следующая теорема показывает, как можно сделать вывод о существовании решений точного определяющего уравнения (12), исходя из свойств приближенной определяющей функции $\Delta_m(z)$.

Теорема 3. *Предположим, что выполняются условия* H1.1 – H1.4 *и, кроме того:*

а) *существует выпуклая замкнутая область* $D_1 \subset D_\beta$ *такая, что для некоторого фиксированного натурального* $m \geq 1$ *приближенное определяющее уравнение*

$$\Delta_m(z) = 0$$

имеет в D_1 *решение* $z = z_m$ *ненулевого индекса;*

б) *на границе* ∂D_1 *области* D_1 *выполнено неравенство*

$$\inf_{z \in \partial D_1} |\Delta_m(z)| > \frac{q}{3} Q^{m+1}(E-Q)^{-1}M.$$

Тогда T*-периодическая краевая задача* (1) *имеет решение* $x = x^*(t)$ *с начальным значением* $x^*(0) = z^* \in D_1$.

Численно-аналитический метод позволяет также указать области, свободные от T-периодических решений.

Теорема 4. *Предположим, что выполнены условия* H1.1 – H1.4 *и область* $D_2 \subset D_\beta$ *такова, что при некотором* $m \in N$, $z \in D_2$

$$|\Delta_m(z)| > \sup_{z \in D_2}\left[K\left(E + \frac{T}{3}K(E-Q)^{-1}\right)\right]\rho(z, \partial D_2) + \frac{q}{3}Q^{m-1}(E-Q)^{-1}M. \tag{14}$$

Тогда для задачи (1) *не существует* T*-периодического решения с начальным значением из* D_2.

Очевидно, если для всех m и произвольного $z \in D_2$ выполняется неравенство (14) со знаком $\leq$, то это будет необходимым условием того, чтобы подобласть D_2 содержала точку, являющуюся начальным значением периодического решения задачи (1).

1.2. Уточнение условий применимости. В дальнейшем численно-аналитический метод последовательных периодических приближений (который далее будем называть просто метод) развивался в различных направлениях. Часть работ была связана с распространением оригинальной схемы на другие классы краевых задач. Обзор этих работ содержится в последующих частях данного обзора. Заметим, что эти некоторые новые обобщения метода достаточно далеко отходят от первоначальной схемы и могут быть рассмотрены как новые приемы исследования краевых задач, возникшие под влиянием работ [3 – 5]. Этот вопрос подробнее рассматривается в заключительной части обзора. В значительно меньшем количестве работ изучается расширение области применения классического варианта метода, т. е. получение более тонких оценок сходимости, ослабление условий H1.1 – H1.4 и т. п. Важность таких исследований объясняется и тем фактом, что они могут быть перенесены на другие типы краевых задач. Рассмотрим подробнее соответствующие результаты.

1.2.1. Априорные оценки. Улучшение априорных оценок метода, фигурирующих в теоремах п.1.1, связано, в первую очередь, с уточнением константы q в неравенстве (6) (ясно, что ее увеличение расширяет область применения метода).

Этот вопрос затрагивался в ряде публикаций. Основные моменты его решения и некоторые комментарии представлены ниже.

1. 1965 г. А. М. Самойленко [1, 2], $q = 3, 1$.

2. 1976 г. А. М. Самойленко, Н. И. Ронто [4, 5], $q = \pi$.

3. 1982 г. А. М. Самойленко, В. Н. Лаптинский [6], $q = 3{,}414 \ldots$ (доказательство содержит пробел, устраняемый применением теоремы Крейна – Рутмана [7]).

4. 1985 г. П. П. Забрейко, Н. А. Евхута [8, 9], Е. П. Трофимчук [10], $q = 3{,}414 \ldots$ (получаемые априорные оценки сложны, поскольку требуют вычисления $A^m(I-A)^{-1}$, где A — некоторый интегральный оператор).

5. 1992 г. M. Kwapisz [11], $q = \sqrt{10} \approx 3{,}1622$.

6. 1996 г. M. Ronto, J. Mészáros [12], $q = \dfrac{10}{3}$.

7. 1996 г. M. Rontó, A. Ronto, S. Trofimchuk [13], $q = 3{,}4046 \ldots$ (указан метод, позволяющий получить простые априорные оценки для любого $q < 3{,}414 \ldots$).

8. 1996 г. M. Rontó, A. Ronto, S. Trofimchuk [13], $q = 2\pi$? (Гипотеза. См. также Е. П. Трофимчук [10], где, в частности, доказано, что $q \le 2\pi$).

Заметим, что результаты работ [1, 2, 4, 5, 11, 12] содержат также простые априорные оценки метода.

Задача 1. *Получить аналог оценки* (6), *считая выполненным условие*

$$|f(t,x') - f(t,x'')| \le K(t)|x' - x''|, \tag{15}$$

где компоненты $K_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, *матрицы* $K(t)$ *являются неотрицательными, суммируемыми функциями.*

Второе, важное для нас условие — это предположение H1.3. Оптимальный вариант — это вовсе отказаться от него. Можно также пытаться уменьшить величину

$$\beta = \frac{T}{2}M. \tag{16}$$

Очевидное улучшение состоит в замене первого неравенства (4) на

$$|f(t,x)| \le M(t),$$

и тогда в качестве β можно взять

$$\beta = \max_{t \in [0,T]} \left[\left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t M(s)\,ds + \frac{t}{T} \int_t^T M(s)\,ds \right].$$

В статье M. Rontó, J. Mészáros [12] оценка в лемме 3.1 [3, с. 13]

$$\left| \int_\tau^t \left[f(t) - \frac{1}{T} \int_\tau^{\tau+T} f(s)\,ds \right] dt \right| \le 2(t-\tau)\left(1 - \frac{t-\tau}{T}\right) \max_{t \in [\tau, \tau+T]} |f(t)|$$
$$\forall\ t \in [\tau, \tau+T] \tag{17}$$

улучшена при $\tau = 0$:

$$\left| \int_0^t \left[f(t) - \frac{1}{T} \int_0^T f(s)\,ds \right] dt \right| \le \frac{1}{2}\alpha_1(t) \left[\max_{t \in [0,T]} f(t) - \min_{t \in [0,T]} f(t) \right],$$

где $\alpha_1(t) = 2t\left(1 - \dfrac{t}{T}\right)$, $|\alpha_1(t)| \le \dfrac{T}{2}$. Таким образом, вместо условия H1.3 можно брать H1.3′: $\beta = \dfrac{T}{2}M'$, где

$$M' = \frac{1}{2}\left[\max_{(t,x) \in [0,T] \times D} f(t,x) - \min_{(t,x) \in [0,T] \times D} f(t,x) \right].$$

Заметим, что всегда $M' \le M$, причем $M' = M$ лишь в том случае, когда

$$\max_{t \in [0, T] \times D} f(t, x) = - \min_{t \in [0, T] \times D} f(t, x).$$

Наконец, в работе M. Rontó, S. Trofimchuk [14] показано, что выполнение условия H1.4 в сочетании с условием подлинейного роста

$$|f(t, x)| \le K|x| + r(t) \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^{n+1},$$
$$r_i(t) \in L_1[0, T], \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

позволяет вообще отказаться от условия H1.3 (см. также заключительную часть обзора).

Заметим, что аналогичные улучшения оценок проводились также и для некоторых других краевых задач. В последующих частях обзора представлены, в частности, новые оценки для уравнений второго порядка (см. п. 3.1), разностных уравнений (см. п. 3.7 и M. Rontó, A. Ronto, S. Trofimchuk [13]).

В этом направлении развития метода нам представляются интересными результаты, полученные в [14]. Оказывается, изучая вопрос существования решений в „большой" области D (например, в шаре большого радиуса), можно ограничиться в некоторых случаях проверкой условий H1.2 – H1.4 лишь в окрестности границы ∂D (например, сферы). Внутри же области D, где лежит искомое T-периодическое решение уравнения (1), допускается нелипшицевость функции $f(t, x)$.

Справедливо следующее утверждение [14] (теорема 20]:

Теорема 5. *Пусть функция $f(t, x)$ удовлетворяет условию Каратеодори в области $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ и условию Липшица*

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \le l(t)\|x_1 - x_2\|$$

для всех x_i: $\|x_i\| > d$ и почти всех $t \in [0, T]$, где $l(t) \in L_1([0, T])$, $l(t) \ge 0$. Предположим, что

$$\max_{t \in [0, T]} \left[\left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t l(s)\, ds + \frac{t}{T} \int_t^T l(s)\, ds \right] < \frac{1}{2}.$$

Тогда:

1. *Определена многозначная определяющая функция* $\Delta(z)\colon \mathbb{R}^n \to$ $\to \mathrm{Comp}(\mathbb{R}^n)$;

2. *Существует такое $r > 0$, что в области $\|z\| > r$ функция $\Delta(z)$ однозначна.*

3. *Если, кроме того,*

$$\Delta(z) \ne 0 \quad \forall z\colon \|z\| = r, \qquad \deg(\Delta(z), \partial B_r(0), 0) \not\equiv 0,$$

то уравнение (1) *имеет T-периодическое решение*

$$x(t)\colon [0, T] \to B_r(0),$$

где $B_r(0)$ — шар радиуса r с центром в точке $x = 0$.

1.2.2. Связь между симметричными свойствами дифференциального уравнения и определяющими уравнениями. Используя свойство симметрии функции $f(t, x)$ в уравнении (1), в ряде случаев удается упростить исследование определяющего уравнения (12).

Так, рассмотрим, следуя А. М. Самойленко и Н. И. Ронто [3, с. 37], случай нечетности по t:

$$f(-t, x) = -f(t, x). \tag{18}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть правая часть системы дифференциальных уравнений* (1) *удовлетворяет условиям* H1.1 – H1.4 *и условию нечетности* (18). *Тогда все решения* $x = x(t)$ *системы* (1), *для которых начальные значения* $x(0) \in D_\beta$, *периодичны с периодом* T.

Доказательство основано на том факте, что среднее на периоде от нечетной функции равно нулю, и поэтому $\Delta(z) \equiv 0$ для всех $z \in D_\beta$.

Эту простую теорему можно рассматривать как первый шаг в использовании свойства (18). Данное утверждение можно значительно усилить.

Задача 2. *Установить существование* T-*периодических решений уравнения* (1) *при условии* (18), *предполагая всего лишь непрерывность* $f(t, x)$.

В монографии [15] Дж. Хейл использовал более общие условия симметрии функции $f(t, x)$, а именно, предполагалось, что существует такая матрица Q, что

$$Q^2 = I, \qquad Qf(-t, Qx) = -f(t, x). \tag{19}$$

Это условие включает в себя особый случай четности и нечетности функции $f(t, x)$.

Модифицируя результаты Дж. Хейла [15, с. 60 – 61] (теоремы 6.5, 6.6) применительно к схеме численно-аналитического метода, получаем следующее усиление теоремы 6.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия симметрии* (19) *и предположения* H1.1 – H1.4. *Тогда решение* $x(t, z)$ *интегрального уравнения* (2) *удовлетворяет соотношениям*

$$Qx(-t, z) = x(t, z), \qquad f(-t, x(-t, z)) = -Qf(t, x(t, z))$$

для всех z *таких, что* $Qz = z$.

Доказательство. В силу теоремы 1 существует единственное T-периодическое решение $x(t, z)$ интегрального уравнения (2) для всех $t \in (-\infty, \infty)$. Заменим в (2) t на $-t$ и умножим обе части уравнения на Q. В итоге получим

$$Qx(-t, z) = Qz + Q\int_0^{-t} f(s, x(s, z))\,ds + \frac{t}{T}Q\int_0^T f(s, x(s, z))\,ds.$$

Пусть z таково, что $Qz = z$. Заменяя s на $-u$, используя свойство (19) и тот факт, что среднее от T-периодической функции $f(s, x(-s, z))$ может быть вычислено по любому отрезку длины T, получаем

$$Qx(-t, z) = z - \int_0^t Qf(-u, QQx(-u, z))\,du -$$

$$- \frac{t}{T}\int_0^{-T} Qf(-u, QQx(-u, z))\,du = z + \int_0^t f(u, Qx(-u, z))\,du -$$

$$- \frac{t}{T}\int_{-T}^0 f(u, Qx(-u, z))\,du = z + \int_0^t f(u, Qx(-u, z))\,du -$$

$$- \frac{t}{T}\int_0^T Qf(u, QQx(-u, z))\,du.$$

В силу единственности решения интегрального уравнения (2) $Qx(-t, z) = x(t, z)$. Далее,

$$f(-t, x(-t, z)) = QQf(-t, QQx(-t, z)) = QQf(-t, Qx(t, z)) = -Qf(t, x(t, z)).$$

Заметим, что аналог этого результата применительно к методу Чезари – Хейла (см. п. 2.2) содержится в следствии 6.1 [15, с. 61].

Следствие 1. *Предположим, что выполнены условия теоремы 7 и матрица Q диагональная:*

$$Q = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n), \qquad \sigma_j \in \{-1, +1\}.$$

Пусть k^- — число -1, а k^+ — число $+1$ в матрице Q, $k^- + k^+ = n$.

Тогда вектор

$$z = \left(\left|\frac{\sigma_1+1}{2}\right| a_1, \left|\frac{\sigma_2+1}{2}\right| a_2, \ldots, \left|\frac{\sigma_n+1}{2}\right| a_n \right) = z(a_{i_1}, \ldots, a_{i_{k^+}}),$$

зависящий от k^+ чисел $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{k^+}} \in \mathbb{R}$, где индексы $i_1, i_2, \ldots, i_{k+}$ обозначают положения $+1$ в ряду $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, и удовлетворяющий системе k^- уравнений (k^+ неизвестных)

$$\frac{|\sigma_i - 1|}{2} \int_0^T f_i\Big(s, x(s, z(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{k^+}}))\Big) ds = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

задает начальное значение дла T-периодического решения системы (1).

Таким образом, свойство симметрии (19) позволяет уменьшить размерность системы определяющих уравнений (3) с n до k^-, что, конечно, упрощает схему метода.

Рассмотрм следующий пример.

Пример 1. Исследуем T-периодическое решение уравнения второго порядка

$$x'' = f(t, x, x'),$$

где $f(-t, -x, y) = -f(t, x, x')$.

Запишем данное уравнение в виде системы

$$\frac{dx}{dt} = y,$$
$$\frac{dy}{dt} = f(t, x, y). \tag{20}$$

Несложно убедиться, что правая часть (20) удовлетворяет условию (19) с матрицей $Q = \operatorname{diag}(-1, 1)$. Следовательно, любой вектор

$$z = (0, a)$$

будет начальным значением для T-периодического решения системы (20), как только выполнены гипотезы типа H.1.1 – H.1.4, и число a удовлетворяет скалярному определяющему уравнению

$$\frac{1}{T}\int_0^T y(s, (0, a))\, ds = \frac{1}{T}\int_0^T y(s, z(a))\, ds = 0. \tag{21}$$

Другие интересные примеры, показывающие как использование свойства (19) может существенно упрощать исследование определяющих уравнений, можно найти в [15] (§7). Следует отметить, что эти рассуждения полезны и при изучении характеристического уравнения метода усреднения (см. [15], § 7).

2. Связь с другими исследованиями. Естественно, что при большом разнообразии подходов к рассмотрению краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, R. Conti [16], J. Mawhin [17, 18], A. Capietto, J. Mawhin, F. Zanolin [19], А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко [20], И. Т. Кигурадзе [21], M. Farkas [22], N. Rouche, J. Mawhin [23]) численно-аналитический метод должен иметь характеристики, общие с некоторыми из них. Действительно, уравнения или даже основные приемы метода тесно связаны, а иногда и совпадают, с уравнениями или приемами некоторых методов, появившихся значительно раньше (метод Ляпунова – Шмидта [18, с. 27] или, почти одновременно, метод Чезари – Хейла [15, 24 – 27]). Однако разные цели, преследуемые каждым из указанных авторов, провели к существенному различию содержательных частей и, соответственно, доказываемых теорем.

2.1. Уравнение Ляпунова – Шмидта. Покажем, как основные уравнения (2), (3) могут быть получены в результате непосредственного применения схемы Ляпунова – Шмидта к периодической краевой задаче (1). Вначале, следуя Ж. Мавену [18], напомним о получении уравнения Ляпунова – Шмидта. Этот метод целесообразно применять при исследовании уравнения

$$Ax = Nx, \tag{22}$$

где $A, N : X \to Z$ — непрерывные операторы в банаховых пространствах X, Z, A — линейный и необратимый, N — нелинейный оператор, который удовлетворяет условию Липшица с достаточно малой константой. (В случае обратимости оператора A уравнение (22) имеет единственное решение в силу теоремы Банаха о неподвижной точке и может быть исследовано методом последовательных приближений.)

От оператора A мы будем требовать существования проекторов $P: X \to X$, $P(X) = \ker A$, $Q: Z \to Z$, $Q(Z) = \operatorname{Im} A$. Если положить

$$X = \ker A \oplus X_1, \qquad Z = \operatorname{Im} A \oplus Z_1 \tag{23}$$

и обозначить через A_1 ограничение $A: X_1 \to \operatorname{Im} A$, то, согласно теореме Банаха об обратном отображении существует $A_1^{-1}: \operatorname{Im} A \to X_1$. Пусть $x = k + v$ — разложение $x \in X$ в соответствии с (23). Тогда

$$(22) \Leftrightarrow Av = N(k+v) \Leftrightarrow [Av = QN(k+v),\ (I-Q)N(k+v) = 0] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [v = A_1^{-1}QN(k+v),\ (I-Q)N(k+v) = 0]. \tag{24}$$

Зафиксируем произвольное $k \in \ker A$. В силу предположения о малости константы Липшица для N первое уравнение системы имеет решение $v = v(k)$. Это решение может быть найдено методом последовательных приближений. Теперь остается лишь найти решения k^* бифуркационного уравнения

$$(I-Q)N(k+v(k)) = 0,$$

чтобы получить все решения $k^* + v(k^*)$ нашего уравнения (конечно, всем рассуждениям выше можно придать локальный характер, рассматривая операторы A, N в некоторой окрестности из X).

В конкретном случае задачи (1) естественно положить

$$X = \{x(t) \in C^1[0,T]:\ x(0) = x(T)\}, \qquad Z = C[0,T],$$
$$Ax = \frac{dx}{dt}, \qquad (Nx)(t) = f(t, x(t)).$$

Тогда, очевидно,

$$\ker A = \{x_0 \in R^n\}, \qquad \operatorname{Im} A = \left\{ v(t) \in C[0,T]:\ \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\,dt = 0 \right\}$$

и поэтому можно выбрать

$$(Px)(t) = x(0), \qquad ((I-P)x)(t) = x(t) - x(0),$$
$$(Qx)(t) = x(t) - \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt, \qquad ((I-Q)x)(t) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt.$$

Переписывая теперь уравнения Ляпунова – Шмидта (24) в этих обозначениях, получаем в точности уравнения (2), (3). Более того, по схеме Ляпунова – Шмидта сначала мы решаем итерационным методом уравнение (2) относительно $x(t, z)$, фиксируя $z \in R^n = \ker A$ и предполагая липшицевость нелинейного оператора Немыцкого $f(t, x)$ с малой константой. Второй этап метода заключается в исследовании бифуркационного уравнения. Это в точности повторяет процедуру численно-аналитического метода.

2.2. Метод Чезари – Хейла для слабонелинейных систем дифференциальных уравнений. Вновь вернемся к задаче (1). Предположим, что выполняются условия H1.1 – H1.3. Вместо неравенства H1.4 нам понадобятся более жесткие условия

H2.4: $T\lambda_{\max}(K) < 2$.

Рассмотрим последовательность T-периодических функций, зависящих от параметра $z \in R^n$ и определенных рекуррентным соотношением

$$x_m(t, z) = z + \int_{\xi_{m-1}}^{t} \left[f(s, x_{m-1}(s, z) - \frac{1}{T}\int_0^T f(\tau, x_{m-1}(\tau, z)\,d\tau \right] ds,$$

$$m = 1, 2, \ldots; \qquad x_0(t, z) = z, \tag{25}$$

где вектор ξ_{m-1} на каждом шаге выбран таким образом, чтобы интегральное среднее

$$Sx_m(t, z) = \frac{1}{T}\int_0^T x_m(t, z)\,dt = z. \tag{26}$$

(В (25) компоненты вектора ξ_{m-1} задают нижние пределы интегрирования для соответствующих координат вектора $f(t, x)$.) Существование таких средних ξ_{m-1} доказано в работе [15, с. 51]. Заметим, что хотя ξ_{m-1} определяется неоднозначно на каждом шаге итерации, последовательные приближения $x_m(t, z)$ находятся однозначно, независимо от выбранного ξ_{m-1}.

В самом деле, если бы существовали две разные функции $x_m(t, z, \xi'_{m-1})$ и $x_m(t, z, \xi''_{m-1})$, то их разность была бы константой, так как

$$\frac{dx_m(t, z, \xi'_{m-1})}{dt} = \frac{dx_m(t, z, \xi''_{m-1})}{dt}.$$

А поскольку каждая из этих функций имеет одно и то же среднее значение z, то эта константа оказалась бы равной нулю. Таким образом, итерационный процесс (25) корректно определен. Справедливо следующее утверждение о сходимости последовательности (25) и ее предельной функции.

Теорема 8. *Предположим, что T-периодическая краевая задача* (1) *удовлетворяет условиям* H1.1 – H1.3 *и* H2.4. *Тогда:*

1. *Последовательность* $\{x_m(t, z)\}$ *вида* (25) *равномерно сходится к некоторой функции* $x^*(t, z)$, *т. е.* $\lim_{m\to\infty} x_m(t, z) = x^*(t, z)$.

2. *Можно указать такой вектор* ξ^*, *что функция* $x(t) = x^*(t, z)$ *является единственным в области* D *T-периодическим решением интегрального уравнения*

$$x(t) = z + \int_{\xi^*}^{t} \left[f(s, x(s) - \frac{1}{T}\int_0^T f(\tau, x(\tau)\,d\tau \right] ds,$$

т. е. T-периодическим решением возмущенной краевой задачи

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) - \Delta(z),$$

$$x(0) = x(T),$$

причем таким, что $Sx(t) = z$, *где возмущение*

$$\Delta(z) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t, x^*(t, z))\,dt.$$

3. *Справедлива оценка погрешности*

$$|x^*(t, z) - x_m(t, z)| \le \frac{T}{2} Q^m (E - Q)^{-1} M, \qquad t \in [0, T],$$

где $Q = \dfrac{T}{q} K$, $q = 2$.

Следствие 2. *При выполнении условий* Н.1.1 – Н.1.3 *и* Н.2.4 *корни определяющего уравнения*

$$\Delta(z) = 0$$

определяют все T*-периодические решения* $x(t)$ *системы* (1), *лежащие в* D *и такие, что* $Sx(t) = z \in D_\beta$.

Заметим, что утверждения теоремы 8 и следствия 2, а также их доказательства, являются в нашей редакции переформулировкой теорем 6.1, 6.2 из [15] (§6).

Доказательство. В силу леммы 3.1 [3, с. 13] для каждой непрерывной функции $f(t)$ справедливо неравенство

$$\left|\int_\tau^t \left[f(t) - \frac{1}{T}\int_\tau^{\tau+T} f(s)\,ds\right] dt\right| \le \alpha_1(t-\tau) \max_{t \in [\tau, \tau+T]} |f(t)| \le \frac{T}{2} M$$

для всех $t \in [\tau, \tau + T]$, где

$$\alpha_1(t) = 2t\left(1 - \frac{t}{T}\right).$$

Поэтому для всех $t \in [\tau, \tau + T]$

$$|x_{k+1}(t, z) - z| \le \frac{MT}{2}.$$

Следовательно, итерационный процесс (25) корректно определен для всех $z \in \in D_\beta$. Для того чтобы оценить разность

$$\delta_k(t, z) = x_{k+1}(t, z) - x_k(t, z),$$

заметим, что согласно (26)

$$S\delta_k(t, z) = 0,$$

$$\frac{d\delta_k(t, z)}{dt} = h(t), \qquad k = 1, 2, \dots,$$

где

$$h(t) = f(t, x_k(t, z)) - f(t, x_{k-1}(t, z)) - Sf(t, x_k(t, z)) + Sf(t, x_{k-1}(t, z)).$$

Поскольку $\delta_k(t, z)$ является T-периодической функцией и $Sh(t) = 0$, то можно указать вектор ξ^* такой, что

$$\delta_k(t, z) = \int_{\xi^*}^t h(s)\,ds.$$

Поэтому

$$|\delta_k(t,z)| = \left| \int_{\xi^*}^{t} \left[(f(t, x_k(t,z)) - f(t, x_{k-1}(t,z))) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{T} \int_{\xi^*}^{\xi^*+T} (f(s, x_k(s,z)) - f(s, x_{k-1}(s,z)))\,ds \right] dt \right| \le \frac{KT}{2} |\delta_{k-1}(t,z)|.$$

Дальнейшее доказательство теоремы можно осуществить аналогично доказательству основной леммы из [3, с. 16]. На основании изложенного выше можно сделать следующие выводы:

Несмотря на совпадение дифференциальных уравнений для последующих итераций методов Чезари – Хейла и численно-аналитического, интегральные уравнения этих методов различны.

Параметр z в численно-аналитическом методе определяет начальные значения T-периодических решений, а в методе Чезари – Хейла — их среднее. Поэтому, решая определяющее уравнение в численно-аналитическом методе, мы сразу указываем искомое T-периодическое решение, а в схеме Чезари – Хейла получаем лишь утверждение о существовании T-периодического решения со средним z, но его начальные данные (или вектор ξ^*) еще предстоит определить.

Метод Чезари – Хейла не дает конструктивного способа вычисления вектора ξ_{m-1} в (25). Более того, поскольку ξ_{m-1} меняется на каждом шаге итерации, то априорные оценки скорости сходимости, приведенные в монографии [15], слабее по сравнению с оценками для метода из [3].

Может быть именно поэтому в монографии [15] рассматриваются системы дифференциальных уравнений с малым параметром $|\varepsilon| \ll 1$.

В этом же случае численно-аналитический метод и метод Чезари – Хейла фактически совпадают с методом усреднения.

***Замечание* 1.** Оценки сходимости из теоремы 8 ($q = 2$) более точны, чем в теореме 6.1 [15] (§6), где $q = \dfrac{1}{2}$.

2.3. Схема Чезари для существенно нелинейных систем уравнений. Возникает вопрос: можно ли так усовершенствовать метод, чтобы снять ограничения типа H1.3 и H1.4 на правую часть системы (1) ?

Оказывается, это можно сделать различными способами.

Один из них, предложенный в работе M. Kwapisz [28], мы обсудим в последующих частях обзора.

Здесь же остановимся на методе Чезари [25], решающем аналогичную проблему для метода Чезари – Хейла, описанного выше. Поскольку, как мы убедились, численно-аналитический метод и метод Чезари – Хейла подобны, то аналогичным образом можно усовершенствовать метод последовательных периодических приближений и его модификации.

Суть метода Чезари хорошо изложена в монографиях [15, 23] и, особенно ясно, — в статье H. Knobloch [29].

Следуя этим работам, вкратце изложим его применение к решению периодической краевой задачи (1). В методе Чезари фиксируется уже не среднее z, а $(2m+1)$ n-мерных векторных параметра

$$(a_0, a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m) = \mathbf{a} \in \mathbb{R}^{(2m+1)n},$$

определяющие начальную функцию

$$x_0(t, \mathbf{a}) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} \left(a_k \cos \frac{2\pi k}{T} t + b_k \sin \frac{2\pi k}{T} t \right).$$

Интегральное уравнение метода Чезари имеет вид

$$x(t) = x(t, \mathbf{a}) = x_0(t, \mathbf{a}) + \int_0^t f(s, x(s, \mathbf{a}))\, ds -$$

$$- \frac{t}{T}\int_0^T f(s, x(s, \mathbf{a}))\, ds + F(f)(t). \tag{27}$$

Продолжая идею метода Чезари – Хейла, оператор F следует подобрать так, чтобы функция

$$\int_0^t f(s, x(s, \mathbf{a}))\, ds - \frac{t}{T}\int_0^T f(s, x(s, \mathbf{a}))\, ds + F(f)(t)$$

была T-периодической и не содержала бы первые $(2m+1)$ гармоник. В частности, если $m = 0$, то мы приходим к интегральному уравнению метода Чезари – Хейла.

В других обозначениях уравнение (27) можно переписать так:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\, ds - \frac{t}{T}\int_0^T f(s, x(s))\, ds + P_m L f x,$$

или

$$x = x_0 + Lfx - P_m Lfx = x_0 + [I - P_m]Lfx, \tag{28}$$

где

$$[Lfx](t) = \int_0^t f(s, x(s))\, ds - \frac{t}{T}\int_0^T f(s, x(s))\, ds,$$

а

$$[P_m x](t) = \sum_{k=0}^{m}\left(A_k \cos\frac{2\pi}{T}kt + B_k \sin\frac{2\pi}{T}kt\right)$$

— начальный отрезок ряда Фурье функции $x(t)$. Предположим, что $x = x(t)$ — решение уравнения (28). Очевидно, функция $x(t)$ будет решением задачи (1), если

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(s, x(s, \mathbf{a}))\, ds = 0,$$

$$\frac{dx_0(t, \mathbf{a})}{dt} = \left[\frac{d}{dt}P_m Lfx\right](t), \qquad m \geq 1. \tag{29}$$

Элементарные выкладки показывают, что определяющие уравнения (29) можно записать в виде

$$\Delta(\mathbf{a}, t) = \frac{dx_0(t, \mathbf{a})}{dt} - P_m f(t, \mathbf{a}) \equiv 0. \tag{30}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, из (30) получаем систему $(2m+1)n$ скалярных бифуркационных уравнений с тем же количеством неизвестных.

В работе [29] установлены условия, при которых итерационный процесс

$$x_{m+1}(t, \mathbf{a}) = x_0 + [I - P_m]Lfx_m, \qquad m = 0, 1, \ldots, \tag{31}$$

корректно определен и сходится в CP_T.

Пусть выполнены следующие условия:

НС.1: $f(t, x)$ определена и непрерывна в области

$$W = \left\{(t, x)\colon 0 \le t \le T,\ |x|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i| \le A\right\}.$$

НС.2: Функции $f(t, \xi(t)) \in L_1[0, T] \quad \forall\, \xi(t) \in CP_T,\ |\xi(t)| \le A$.

НС.3: $\exists\, k_0 > 0,\ k_1 > 0,\ l > 0$ такие, что

$$|f(t, x)|_\infty \le k_0 |x|_\infty + k_1, \qquad |f(t, x) - f(t, y)|_\infty \le l\,|x - y|_\infty$$

для всех $t \in [0, T]$; $(t, x), (t, y) \in W$.

НС.4: число m достаточно большое, а именно, такое, что

$$\chi(m) \cdot l < 1, \qquad \chi(m)(k_0 A + k_1) < A \qquad (A < \infty);$$

$$\chi(m) \cdot l < 1 \qquad (A = \infty),$$

где функция $\chi(m)$ зависит от m и удовлетворяет неравенству

$$\chi(m) \le q(T)\frac{\log m}{m}, \qquad m \ge 2,$$

(функция $\chi(m)$ введена в лемме 2 [29], где, к сожалению, значение $q(T)$ не вычислено).

Аналогом основной теоремы 1 для метода Чезари является следующее утверждение.

Теорема 9. *Пусть система* (1) *удовлетворяет условиям* НС.1 – НС.4 *и, если* $A < \infty$, *то вектор*

$$\mathbf{a} = (a_0, a_1, b_1, \dots, a_m, b_m) \in \mathbb{R}^{(2m+1)n}$$

таков, что

$$|x_0(t, \mathbf{a})| \le A - \chi(m)(k_0 A + k_1).$$

Тогда итерационный процесс (31) *сходится к единственному решению*

$$\xi = \xi(t, a)$$

уравнения (28). *При этом* $\xi(t, \mathbf{a})$ *будет периодическим решением дифференциального уравнения* (1) *тогда и только тогда, когда в* (30) $\Delta(t, a) \equiv 0$. *Обратно, если функция* $\xi = \xi(t) \in CP_T$ *такая, что*

$$|\xi(t)| \le A, \qquad P_m \xi(t) = x_0(t, \mathbf{a}),$$

и является решением дифференциального уравнения (1), *то* $\xi = \xi(t, \mathbf{a})$ *и* $\Delta(\mathbf{a}, t) \equiv 0$.

Замечание 2. В работе [29] на самом деле был рассмотрен более общий случай, когда в условии

НС.3: $k_0 = k_0(t),\ k_1 = k_1(t),\ l = l(t)$.

Нельзя не согласиться с замечанием Дж. Хейла [15, с. 131] о крайней сложности изучения определяющего уравнения (30). При этом в качестве первого приближения вектора $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0$ можно брать вектор, задаваемый галеркинским приближением m-го порядка к решению уравнения (1). Именно так поступил Чезари [25], изучая уравнение

$$x'' + x^3 = \sin t.$$

Отметим также, что в оригинальной статье [25] была использована L_2-норма, что отличает ее от цитируемой выше работы [29].

Работа [25] стимулировала появление многих интересных работ, результаты которых было бы полезно проанализировать с позиций численно-аналитического метода. В связи с этим укажем на монографию [18] и обширную библиографию в ней, а также на [15, 27].

2.4. Теорема Мавена. Крайне поучительно сравнить интегральные операторы методов Чезари и Чезари – Хейла с интегральным оператором M_J, введенным Мавеном [23, с. 101 – 107]. В частности, для дифференциального уравнения (1) без выделенной линейной части оператор M_J имеет вид

$$M_J x(\cdot) = \frac{1}{T}\int_0^T x(\tau)\,d\tau + \frac{1}{T} J \int_0^T f(\tau, x(\tau))\,d\tau +$$

$$+ \int_0^{\cdot} \left[f(\tau, x(\tau)) - \frac{1}{T}\int_0^T f(\sigma, x(\sigma))\,d\sigma \right] d\tau -$$

$$- \frac{1}{T}\int_0^T \left(\int_0^t \left[f(\tau, x(\tau)) - \frac{1}{T}\int_0^T f(\sigma, x(\sigma))\,d\sigma \right] d\tau \right) dt.$$

В работе [23, с. 102] доказано, что все T-периодические решения уравнения (1) совпадают с неподвижными точками оператора M_J, когда $\det J \neq 0$.

С использованием оператора M_J в [23] получен следующий интересный результат.

Теорема 10. *Пусть* $\Omega \in \mathbb{R}^n$ *— ограниченная область. Предположим, что дифференциальные уравнения семейства*

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(t, x), \qquad 0 \le \varepsilon \le 1, \qquad x \in R^n, \qquad t \in [0, T] \tag{32}$$

не имеют T*-периодических решений с начальными данными* $x(0) \in \partial\Omega$ *и, кроме того, множество* $\Pi(\varepsilon) = \{x_\varepsilon(t)\}$ *всех* T*-периодических решений уравнения* (32) *с начальным значением в* Ω *равномерно ограничено:*

$$|x_\varepsilon(t)| < M \qquad \forall\, \varepsilon,\ \forall\, x_\varepsilon(t) \in \Pi(\varepsilon):\ x_\varepsilon(0) \in \Omega.$$

Положим

$$\Delta_{\varepsilon=0}(z) = T^{-1}\int_0^T f(s, z)\,ds \neq 0$$

для всех $z \in \partial\Omega$. *Если* $\deg\left(\Delta_{\varepsilon=0}(z), \partial\Omega, 0\right) \neq 0$, *то периодическая краевая задача* (1) *имеет, по крайней мере, одно решение.*

Формулировку этого утверждения мы взяли из [14], где она была доказана с использованием численно-аналитического метода.

Более общий вариант этой теоремы для систем дифференциальных уравнений k-го порядка можно найти в [23, с. 186] (теорема 3.17). Интересно, что утверждение типа теоремы 10 впервые было доказано Ж. Мавеном в 1969 г. (см. [23, 30]) для локально липшицевых уравнений с использованием метода Чезари.

Эту теорему можно также рассматривать как следствие теории степени совпадения (англ. coincidence degree) (см. [23, с. 225, 18], а также монографию R. E. Gaines, J. Mawhin [31].

1. *Самойленко А. М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. I // Укр. мат. журн. – 1965. – **17,** № 4. – С. 82–93.
2. *Самойленко А. М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. II // Там же. – 1966. – **18,** № 2. – С. 50–59.
3. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитический метод исследования периодических решений. – Киев: Выща шк., 1976. – 180 с.
4. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.

5. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1992. – 279 с.
6. *Самойленко А. М., Лаптинский В. Н.* Об оценках периодических решений дифференциальных уравнений // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – № 1. – С. 30–32.
7. *Крейн М. Г., Рутман М. А.* Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // Успехи мат. наук. – 1948. – **3,** вып. 1 (23). – С. 3–95.
8. *Евхута Н. А., Забрейко П. П.* О методе А. М. Самойленко отыскания периодических решений квазилинейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Укр. мат. журн. – 1985. – **37,** № 2. – С. 162–168.
9. *Евхута Н. А., Забрейко П. П.* О сходимости метода последовательных приближений А. М. Самойленко отыскания периодических решений // Докл. АН БССР. – 1985. – **29,** № 1. – С. 15–18.
10. *Трофимчук Е. П.* Интегральные операторы метода последовательных периодических приближений // Мат. физика и нелинейн. механика. – 1990. – Вып. 13 (47). – С. 31–36.
11. *Kwapisz M.* Some remarks on an integral equation arising in applications of numerical-analytic method of solving of boundary value problems // Укр. мат. журн. – 1992. – **44,** № 1. – С. 128–132.
12. *Rontó M., Mészáros J.* Некоторые замечания о сходимости численно-аналитического метода последовательных приближений // Там же. – 1996. – **48,** № 1. – С. 90–95.
13. *Rontó M., Ronto A., Trofimchuk S. I.* Numerical-analytic method for differential and difference equations in partially ordered Banach space, and some applications. – Miskolc, 1996. – 60 p. (Preprint / Univ. Miskolc. Inst. Math., 96-02).
14. *Rontó M., Trofimchuk S. I.* Numerical-analytic method for non-linear differential equations. – Miskolc, 1996. –19 p. (Preprint / Univ. Miskolc. Inst. Math., 96–01).
15. *Хейл Дж.* Колебания в нелинейных системах. – М.: Мир, 1966. – 230 с.
16. *Conti R.* Recent trends in the theory of boundary value problems for ordinary differential equations // Boll. Unione mat. ital. – 1967. – **22,** № 2. – P. 135–178.
17. *Mawhin J.* Recent trends in boundary value problems // Abh. Wiss. DDR. Abt. Math. Naturwiss. Techn. – 1977. – № 4. – P. 51–70.
18. *Mawhin J.* Topological degree methods in non-linear boundary value problems // Conf. Board Math. Sci. Regional Conf. Series in Math. – Providence: Amer. Math. Soc., 1979. – **40.** – 122 p.
19. *Capietto A., Mawhin J., Zanolin F.* A continuation approach to super-linear periodic boundary value problems // J. Different. Equat. – 1990. – **88.** – P. 347–395.
20. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 318 с.
21. *Кигурадзе И. Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Современные проблемы математики. Новейшие достижения. – М.: Наука, 1987. – **30.** – С. 3–103.
22. *Farkas M.* Periodic motions. – New York: Springer, 1994. – 577 p.
23. *Rouche N., Mawhin J.* Ordinary differential equations. Stability and periodic solutions. – Boston: Pitman, 1980. – 260 p.
24. *Cesari L., Hale J.* A new sufficient conditions for periodic solutions of weakly non-linear differential systems // Proc. Amer. Math. Soc. – 1957. – **8.** – P. 757–764.
25. *Cesari L.* Functional analysis and periodic solutions of nonlinear differential equations // Contrib. to differential equat. – New York: Wiley and Sons, 1963. – V. 1. – P. 149–187.
26. *Cesari L.* Functional analysis, nonlinear differential equations and the alternative method // Nonlinear Function. Anal. and Appl. – New York: Dekker, 1976. – P. 1–197.
27. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1964. – 477 с.
28. *Kwapisz M.* On modification of the integral equation of Samoilenko's numerical-analytic method of solving boundary value problems // Math. Nachr. – 1992. – **157.** – P. 123–135.
29. *Knobloch H. W.* Remarks on a paper of L. Cesari on functional analysis and nonlinear differential equations // Michigan Math. J. – 1963. – **16,** № 4. – P. 417–430.
30. *Mawhin J.* Degré topologique et solutions périodiques des systèmes différentiels non linéaries // Bull. Soc. Roy. Sci. Liège. – 1969. – **38.** – P. 308–398.
31. *Gaines R. E., Mawhin J.* Consciderence degree and nonlinear differential equations. – New York: Springer, 1977. – 262 p.

Получено 26.09.97