УДК 517.946

И. В. Скрыпник, Д. В. Ларин
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ПРИНЦИП АДДИТИВНОСТИ В УСРЕДНЕНИИ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ

The averaging of Dirichlet problems is studied for the degenerate nonlinear elliptic equations of second order in domains with a fine-grained boundary under the condition that the weight function belongs to certain Muckenhoupt class. A pointwise estimate for solutions of the model degenerate nonlinear problem is proved. The averaged boundary-value problem is constructed under new structural conditions on a perforated domain. In particular, the smallness of diameters of cavities with respect to the distances between them is not allowed.

Вивчається усереднення задач Діріхле для вироджених нелінійних еліптичних рівнянь другого порядку в областях з дрібнозернистою межею за умови, що вагова функція належить до певного класу Макенхаупта. Доведено поточкову оцінку розв'язків модельної виродженої нелінійної задачі. Побудовано усереднену граничну задачу при нових структурних умовах відносно перфорованої області. Зокрема, не припускається малість діаметрів порожнин відносно віддалей між ними.

Пусть Ω — ограниченная область в n-мерном евклидовом пространстве R^n и при каждом натуральном s задано конечное семейство $\{F_i^{(s)} : i = 1,\ldots, I(s)\}$ замкнутых непересекающихся множеств, содержащихся в Ω. В области $\Omega^{(s)} = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{I(s)} F_i^{(s)}$ рассматривается вырождающаяся квазилинейная эллиптическая задача

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_j\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = a_0\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \qquad x \in \Omega^{(s)}, \tag{1}$$

$$u(x) = f(x), \qquad x \in \partial\Omega^{(s)} \tag{2}$$

при весовом характере условий на коэффициенты $a_j(x, u, g)$. Здесь $f(x)$ — некоторая известная, определенная в $\overline{\Omega}$ функция.

Формулируемые далее условия обеспечивают существование решения задачи (1), (2) при каждом s. Изучается возможность аппроксимации задачи (1), (2) новой усредненной задачей в области Ω, к решению которой сходится последовательность решений задач (1), (2) при $s \to \infty$.

В статье изменено построение основного асимптотического разложения последовательности решений (1), (2), что позволило ввести новые структурные условия на семейство $\{F_i^{(s)} : i = 1,\ldots, I(s)\}$. Условия выражаются в терминах весовой емкости $F_i^{(s)}$ и расстояний между содержащими их шарами, когда нет малости диаметров множеств относительно соответствующих расстояний. Отметим, что из конструкции поправочного члена усредненного уравнения непосредственно следует принцип аддитивности: если семейство $\{F_i^{(s)} : i = 1,\ldots, I(s)\}$ представить произвольным образом как объединение двух подсемейств, то поправочный член, соответствующий всему семейству, равен сумме поправочных членов, соответствующих подсемействам.

Отметим, что в невырожденном случае линейные задачи для областей с мелкозернистой границей изучены в работах В. А. Марченко и Е. Я. Хруслова (см., например, [1]), а нелинейные задачи — в работах одного из авторов (см., например, [2 – 6]).

1. Формулировка условий и результатов. Пусть w — локально интегрируемая неотрицательная функция в R^n.

Будем говорить, что w принадлежит классу Макенхаупта A_q в R^n ($w \in A_q(R^n)$), $1 < q < \infty$, если для произвольного шара $B \subset R^n$ функция w удовлетворяет условию

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B [w(x)]^{-1/(q-1)}\,dx\right)^{q-1} \le C_{q,w},$$

где постоянная $C_{q,w}$ не зависит от выбора шара B. Здесь и далее $|B|$ — мера Лебега шара B.

Определение класса $A_q(R^n)$ и свойства функций из этого класса подробно рассмотрены в [7], гл. 15.

Следуя [8], будем говорить, что w принадлежит классу D_μ в R^n ($w \in D_\mu(R^n)$), если при некоторой постоянной $C_{\mu,w}$, не зависящей от ρ, t, x_0, выполнено неравенство

$$\frac{w(B(x_0,\rho))}{w(B(x_0,t))} \le C_{\mu,w}\left(\frac{\rho}{t}\right)^{n\mu}$$

для произвольных $B(x_0,\rho)$, $B(x_0,t)$, $0 < t \le \rho$. Здесь и далее $B(x_0,\rho)$ — шар радиуса ρ с центром в x_0,

$$w(E) = \int_E w(x)\,dx,$$

где $E \subset R^n$ — борелевское множество.

Будем предполагать, что функции $a_j(x,u,g)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, определены при $x \in \overline{\Omega}$, $u \in R^1$, $g \in R^n$ и удовлетворяют следующим условиям:

A$_1$) функции $a_j(x,u,g)$ непрерывны по u, g при почти всех $x \in \overline{\Omega}$, измеримы по x при любых u, g; $a_j(x,u,0) = 0$ при $x \in \Omega$, $u \in R^1$, $j = 1, \ldots, n$;

A$_2$) существуют положительные постоянные ν_1, ν_2, ε такие, что при $2 \le p < n$ и всех значениях $x \in \overline{\Omega}$, $u, v \in R^1$, $g', g'' \in R^n$ выполнены неравенства

$$\begin{gathered}
\sum_{j=1}^{n} [a_j(x,u,g') - a_j(x,u,g'')](g'_j - g''_j) \ge \\
\ge \nu_1 |g' - g''|^p w(x), \\
a_0(x,u,g')u \ge -(\nu_1 - \varepsilon)|g'|^p w(x) - \varphi(x)(1+|u|)w(x), \\
\sum_{j=1}^{n} |a_j(x,u,g') - a_j(x,v,g'')| \le \\
\le \nu_2\left(|u|^{p_1} + |v|^{p_1} + |g'|^p + |g''|^p\right)^{(p-2)/p}(|u-v| + |g'-g''|)w(x), \\
|a_0(x,u,g')| \le \nu_2\left(|u|^{p_1} + |g'|^p\right)^{(p_1-1)/p_1} w(x) + \varphi(x)w(x),
\end{gathered} \tag{3}$$

где функция $w(x)$ такова, что $w(x) \in A_{p-1+p/n}(R^n)$,

$$[w(x)]^{-1/(p-1)} \in D_\mu(R^n), \qquad \mu < \frac{p}{p-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Можно показать (см., например, [7], гл. 15), что если $w(x) \in A_q(R^n)$, то $w(x) \in A_{q_0}(R^n)$, где $q_0 < q$. Так что функция $w(x)$ из условия (3) принадлежит $A_{p_0}(R^n)$, где $p_0 < p - 1 + p/n$. Будем предполагать, что постоянная p_1 в предположении A_2) удовлетворяет неравенству

$$p \le p_1 < \frac{npp_0}{np_0 - p},$$

а функция $\varphi(x)$ — условию

$$\varphi(x) \in L_r(\Omega, w), \qquad r > \frac{np_0}{p}.$$

Отметим, что функции $a_j(x, u, g)$ можно продолжить по x вне Ω с сохранением всех указанных свойств.

Обобщенным решением задачи (1), (2) будем называть функцию $u(x) \in W_p^1(\Omega^{(s)}, w)$ такую, что $u(x) - f(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega^{(s)}, w)$ и для произвольной функции $\varphi(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega^{(s)}, w)$ выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_{\Omega^{(s)}} \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_j\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + a_0\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \varphi(x) \right\} dx = 0. \tag{4}$$

При этом предполагается, что $f(x) \in W_p^1(\Omega, w)$. Определения и свойства весовых соболевских пространств $W_p^1(\Omega, w)$, $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega, w)$ подробно рассмотрены в [7, 8].

Теорема 1. *При выполнении условий* A_1, A_2, *при каждом* s *задача* (1), (2) *имеет, по крайней мере, одно решение* $u_s(x)$. *Существует постоянная* R, *не зависящая от* s, *такая, что при всех* s *выполнена оценка*

$$\| u_s \|_{W_p^1(\Omega^{(s)}, w)} \le R.$$

Утверждение теоремы доказывается методами, основанными на общей теории монотонных операторов, и может быть получено методом, изложенным в работе [7] (см. Приложение 1).

Далее через $u_s(x)$ обозначим одно из возможных решений задачи (1), (2), удовлетворяющее указанной оценке. Тем самым последовательность $\{ u_s(x) \}$ будем считать фиксированной. Функции $u_s(x)$, определенные при $x \in \Omega^{(s)}$, продолжим на Ω, полагая $u_s(x) = f(x)$ при $x \in \bigcup_{i=1}^{I(s)} F_i^{(s)}$. Так получающиеся функции $u_s(x)$, определенные при $x \in \Omega$, принадлежат $W_p^1(\Omega, w)$, и для них выполнена оценка

$$\| u_s \|_{W_p^1(\Omega, w)} \le R_1 \tag{5}$$

с не зависящей от s постоянной R_1.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* A_1, A_2 *и* $f(x) \in W_q^1(\Omega, w) \cap L_\infty(\Omega, w)$, $q > np_0$. *Тогда существует не зависящая от* s *постоянная* M *такая, что при всех* s *справедлива оценка*

$$\underset{x \in \Omega}{\operatorname{vrai\,max}} |u_s(x)| \le M. \tag{6}$$

Утверждение теоремы доказывается методом Мозера (см., например, [4], гл. 9).

Из оценки (5) следует, что последовательность $u_s(x)$ содержит слабо сходящуюся подпоследовательность, поэтому, переходя, если нужно, к подпоследовательности, можем считать, что $u_s(x)$ слабо сходится в $W_p^1(\Omega, w)$ к некоторой функции $u_0(x)$.

Перейдем к формулировке условий на множества $F_i^{(s)}$. Обозначим через $d_i^{(s)}$ нижнюю грань радиусов шаров, содержащих $F_i^{(s)}$ и пусть $x_i^{(s)}$ — такая точка, что $F_i^{(s)} \subset \overline{B\left(x_i^{(s)}, d_i^{(s)}\right)}$. Через $r_i^{(s)}$ обозначим расстояние от $B\left(x_i^{(s)}, d_i^{(s)}\right)$ до множества $\bigcup_{j \neq i} B\left(x_j^{(s)}, d_j^{(s)}\right) \cup \partial\Omega$.

Пусть E — компактное подмножество $B(x_0, 1)$, $E \subset B(x_0, 1/2)$. Будем называть (p, w)-емкостью множества E (см., например, [7], гл. 2) число

$$\operatorname{cap}_{p,w}(E) = \inf \int_{B(x_0,1)} \left|\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}\right|^p w(x)\,dx,$$

где нижняя грань берется по всем функциям $\varphi(x) \in C_0^\infty(B(x_0, 1))$, равным единице на E.

Относительно множеств $F_i^{(s)}$ будем считать выполненными следующие предположения:

B$_1$) справедливо равенство

$$\lim_{s\to\infty} (d_s + r_s) = 0,$$

где

$$d_s = \max\left\{ d_1^{(s)}, \ldots, d_{I(s)}^{(s)} \right\}, \qquad r_s = \max\left\{ r_1^{(s)}, \ldots, r_{I(s)}^{(s)} \right\};$$

B$_2$) существуют подмножества индексов J_s, I_s такие, что

$$\{ i = 1, \ldots, I(s) \} = J_s \cup I_s, \qquad J_s \cap I_s = \varnothing$$

и выполнены условия: существуют положительная постоянная b_0 и стремящаяся к нулю при $s \to \infty$ числовая последовательность R_s, удовлетворяющая следующим условиям: $R_s \geq d_s$, $R_s \geq r_s$ и

$$\lim_{s\to\infty} \max_{y\in\Omega} \left\{ \max_{i \in I_s\left(K_{3R_s}(y)\right)} \frac{w\left(K_{R_s}(y)\right)\left[r_i^{(s)} \right]^p}{\overline{w}_i^{(s)}} \right\} = 0,$$

где $I_s\left(K_{3R_s}(y)\right) = \left\{ i \in I_s : x_i^{(s)} \in K_{3R_s}(y) \right\}$. Здесь и далее

$$K_{R_0}(y) = \left\{ x \in R^n : \left| x_j - y_j \right| \leq R_0,\ j = 1, \ldots, n \right\},$$

$$\overline{w}_i^{(s)} = \min_{x \in S\left(x_i^{(s)},\, d_i^{(s)} + r_i^{(s)}/2\right)} w\left(B(x, r_i^{(s)})\right)$$

и $S(x_0, \rho)$ — сфера радиуса ρ с центром в x_0; существует непрерывная неубывающая функция $b(t)$, $b(0) = 0$, такая, что

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{i\in J_s} \operatorname{cap}_{p,w}\left(F_i^{(s)}\right) = 0, \tag{7}$$

$$\sum_{i \in I_s(B(x_0, R))} \operatorname{cap}_{p, w}\left(F_i^{(s)}\right) \leq b_0 w(B(x_0, R)) \quad \text{при } R \geq R_s, \tag{8}$$

$$\operatorname{cap}_{p, w}\left(F_i^{(s)}\right) \leq b(r_s)\left[r_i^{(s)}\right]^{-p} \overline{w}_i^{(s)}, \qquad i \in I_s, \tag{9}$$

где x_0 — произвольная точка области Ω,

$$I_s(B(x_0, R)) = \left\{i \in I_s : x_i^{(s)} \in B(x_0, R)\right\}.$$

Для формулировки еще одного условия на $F_i^{(s)}$, обеспечивающего возможность построения граничной задачи для $u_0(x)$, нам понадобятся вспомогательные функции $v_i^{(s)}$, определяемые как решения модельных задач.

Пусть $\psi(x)$ — функция класса $C_0^\infty(B(0,1))$, равная единице в $B(0,1/2)$. Для произвольного вещественного k при $d_i^{(s)} < 1/2$ обозначим через $v_i^{(s)}(x,k)$ функцию, принадлежащую $k\psi\left(x - x_i^{(s)}\right) + \overset{\circ}{W}{}_p^1\left(D_i^{(s)}, w\right)$ и удовлетворяющую тождеству

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{D_i^{(s)}} a_j\left(x, 0, \frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = 0 \tag{10}$$

для $\varphi(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^1\left(D_i^{(s)}, w\right)$. Здесь $D_i^{(s)} = B\left(x_i^{(s)}, 1\right) \setminus F_i^{(s)}$. Существование и однозначность определения функции $v_i^{(s)}(x,k)$ доказывается методом монотонных операторов (см., например, [7], Приложение 1). Далее, вне $D_i^{(s)}$ полагаем $v_i^{(s)}(x,k) = k\psi\left(x - x_i^{(s)}\right)$.

Будем предполагать выполнение следующего условия:

C) существует непрерывная при $(x,k) \in \Omega \times R^1$ функция $c(x,k)$ такая, что для произвольного шара $B \subset \Omega$ выполнено равенство

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{i \in I_s(B)} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{k} \int_{B_i^{(s)}} a_j\left(x, 0, \frac{\partial v_i^{(s)}(x,k)}{\partial x}\right)\frac{\partial v_i^{(s)}(x,k)}{\partial x_j} dx = K \int_B c(x,k)\,dx, \tag{11}$$

причем стремление к пределу в (11) является равномерным по k на любом ограниченном интервале изменения k. В (11) $I_s(B)$ —множество тех номеров i, для которых $i \in I_s$, $x_i^{(s)} \in B$; $B_i^{(s)} = B\left(x_i^{(s)}, d_i^{(s)} + r_i^{(s)}/2\right)$.

Основным результатом данной статьи является следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* A_1, A_2, B_1, B_2, C,

$$f(x) \in W_q^1(R^n, w) \cap L_\infty(R^n, w), \qquad q > np_0$$

и $u_s(x)$ *— слабо сходящаяся к* $u_0(x)$ *последовательность решений задачи* (1), (2). *Тогда последовательность* $u_s(x)$ *сильно сходится в* $W_m^1(\Omega, w)$ *при любом* $m < p$ *и функция* $u_0(x)$ *является решением задачи*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_j\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) - a_0\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) +$$

$$+ c(x, f(x) - u(x)) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{12}$$

$$u(x) = f(x), \qquad x \in \partial\Omega. \tag{13}$$

Доказательству теоремы посвящены три следующих пункта. В п. 2 доказывается поточечная и интегральные оценки решений модельной задачи. В пп. 3, 4 изучается поведение членов асимптотического разложения. Выводу усредненной граничной задачи (12), (13) посвящен п. 5.

Принцип аддитивности. Предположим, что выполнены условия A_1, A_2, B_1, B_2 и при каждом s задано разбиение семейства множеств $F_i^{(s)}$ на два непересекающихся подсемейства

$$\{ F_i^{(s)} : i = 1,\ldots, I(s)\} = \{ F_i^{(s)} : i \in I^{(1)}(s)\} \cup \{ F_i^{(s)} : i \in I^{(2)}(s)\},$$
$$I^{(1)}(s) \cap I^{(2)}(s) = \varnothing.$$

Предположим также, что для каждого из подсемейств $\{ F_i^{(s)} : i \in I^{(j)}(s)\}$, $j = 1, 2$, выполнено условие C соответственно с функцией $c^{(j)}(x, k)$. Тогда условие C выполнено для семейства $\{ F_i^{(s)} : i = 1,\ldots, I(s)\}$ с функцией $c(x, k)$, равной $c^{(1)}(x, k) + c^{(2)}(x, k)$.

Утверждение следует из равенства (11).

***Замечания* 1.** Непосредственно из условия (11) следует независимость $c(x, k)$ от $\{ F_i^{(s)} : i \in J_s\}$. А значит, множества $\{ F_i^{(s)} : i \in J_s\}$, удовлетворяющие условию (7), не влияют на построение усредненной граничной задачи.

2. Если в статье [6] предположить следующее дополнение в условии B_2 на последовательность R_s:

$$R_s \geq r_s, \qquad R_s \geq d_s, \qquad \lim_{s\to\infty} \frac{R_s^n}{[\, r_s' \,]^{n-m}} = 0,$$

где $r_s' = \min\{ r_i^{(s)} : i = 1,\ldots, I(s)\}$, то в этом случае анализ поведения члена $R_{1,n}^{(s)}$, определяемого равенством (65) в [6], проводится так же, как и для соответствующего члена в п. 4 данной статьи.

2. Оценки решений модельной задачи. Докажем оценки для вспомогательной функции $v_i^{(s)}(x, k)$. Для краткости в этом пункте будем писать $v(x, k)$, D, F, x_0, d вместо $v_i^{(s)}(x, k)$, $D_i^{(s)}$, $F_i^{(s)}$, $x_i^{(s)}$, $d_i^{(s)}$. В этом пункте и далее через c_j, $j = 1, 2, \ldots$, будем обозначать постоянные, зависящие лишь от ν_1, ν_2, n, p, μ, M, $C_{p_0, w}$, $C_{\mu, w}$.

Легко показать, что для функции $v(x, k)$ справедлива оценка

$$0 \leq \operatorname{sign} k\, v(x, k) \leq |k|. \tag{14}$$

Для проверки второго неравенства, например, при $k > 0$ достаточно подставить в интегральное тождество

$$\sum_{j=1}^{n} \int_D a_j\left(x, 0, \frac{\partial v(x, k)}{\partial x}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = 0, \qquad \varphi(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(D, w) \tag{15}$$

вместо $\varphi(x)$ функцию $\varphi_1(x) = \max\{ v(x, k) - k, 0\}$ и воспользоваться условием A_2.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* A_1, A_2. *Тогда существует постоянная* K_1, *зависящая лишь от* ν_1, ν_2, n, p, *такая, что справедлива оценка*

$$\int_D \left| \frac{\partial v(x, k)}{\partial x} \right|^p w(x)\, dx \leq K_1 |k|^p \operatorname{cap}_{p, w}(F). \tag{16}$$

Доказательство леммы 1 аналогично соответствующему доказательству леммы 2 из [9] и поэтому его опускаем.

При $0 < t < |k|$ обозначим

$$E_t = \{ x \in D: |v(x, k)| \le t \}. \tag{17}$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* A_1, A_2. *Тогда существует постоянная* K_2, *зависящая лишь от* ν_1, ν_2, n, p, *такая, что справедлива оценка*

$$\int\limits_{E_t} \left| \frac{\partial v(x, k)}{\partial x} \right|^p w(x) dx \le K_2 t |k|^{p-1} \operatorname{cap}_{p, w}(F). \tag{18}$$

Доказательство леммы 2 аналогично соответствующему доказательству леммы 3 из [9] и поэтому его опускаем.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* A_1, A_2. *Тогда существует постоянная* K, *зависящая только от* ν_1, ν_2, n, p, μ, M, $C_{p_0, w}$, $C_{\mu, w}$, *такая, что справедлива оценка*

$$|v(x, k)| \le K|k| \left\{ \operatorname{cap}_{p, w}(F) \frac{[\rho(x, B(x_0, d))]^p}{w(B(x, \rho(x, B(x_0, d))))} \right\}^{1/(p-1)} \tag{19}$$

для произвольной точки $x \in B(x_0, 1) \setminus B(x_0, d)$. *Здесь* $\rho(x, B(x_0, d))$ — *расстояние от точки* x *до шара* $B(x_0, d)$.

Доказательство. Пусть ξ — произвольная точка области $B(x_0, 1) \setminus B(x_0, d)$ и $\rho = \rho(\xi, B(x_0, d)) > 0$. Обозначим числовую последовательность через

$$\rho_j = \frac{\rho}{4}(3 - 2^{-j}), \quad j = 1, 2, \ldots,$$

и через $\psi_j(x)$ функции, равные единице на множестве $B_j = B(\xi, \rho_j)$, нулю вне B_{j+1} и такие, что

$$0 \le \psi_j(x) \le 1, \quad \left| \frac{\partial \psi_j(x)}{\partial x} \right| \le \frac{2^{j+4}}{\rho}.$$

Подставим в интегральное тождество (15) пробную функцию

$$\varphi(x) = |v(x, k)|^{\sigma+1} [\psi_j(x)]^{\tau+p} \operatorname{sign} k,$$

где σ, τ — произвольные положительные числа. Используя неравенства (3) и неравенство Юнга, имеем

$$\int\limits_D |v(x, k)|^\sigma \left| \frac{\partial v(x, k)}{\partial x} \right|^p [\psi_j(x)]^{\tau+p} w(x) dx \le$$
$$\le C_1 (\tau + p)^p \frac{2^{jp}}{\rho^p} [m_{j+1}]^{p-1} \int\limits_D |v(x, k)|^{\sigma+1} [\psi_j(x)]^\tau w(x) dx, \tag{20}$$

где $m_j = \max \{ |v(x, k)|: x \in \overline{B}_j \}$.

Применяя далее процедуру, аналогичную использованной при доказательстве теоремы 1 из [9], из весовой теоремы вложения (см., например, теорему 1.5 из [8]) и оценки (20) получаем следующее неравенство:

$$[m_j]^{p + np_0(p-1)/p} \le C_2 \frac{2^{jnp_0}}{w(B(\xi, \rho))} [m_{j+1}]^{np_0(p-1)/p} \int\limits_{B_{j+1}} |v(x, k)|^p [\psi_j(x)]^p w(x) dx. \tag{21}$$

Здесь и далее нам понадобится следующая вспомогательная лемма, доказательство которой аналогично доказательству леммы 2.2 из [10].

Лемма 3. *Пусть* $2 \le p < n$ *и* $w(x) \in A_{p-1+p/n}(R^n)$, $[w(x)]^{-1/(p-1)} \in D_\mu(R^n)$, $\mu < p(1-1/n)/(p-1)$. *Тогда для произвольной функции* $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(B(0,R), w)$ *и произвольного числа* ρ, *удовлетворяющего условию* $0 < \rho \le R$, *выполняется неравенство*

$$\int\limits_{B(0,\rho)} |v(x)|^p w(x)\,dx \le C\rho^p \int\limits_{B(0,\rho)} \left|\frac{\partial v(x)}{\partial x}\right|^p w(x)\,dx \tag{22}$$

с постоянной C, *зависящей лишь от* n, p, μ, $C_{p,w}$, $C_{\mu,w}$.

Отметим, что с помощью леммы 3 легко доказывается следующее утверждение.

***Следствие* 1.** *Пусть* $2 \le p < n$ *и* $w(x) \in A_{p-1+p/n}(R^n)$, $[w(x)]^{-1/(p-1)} \in D_\mu(R^n)$, $\mu < p(1-1/n)/(p-1)$. *Тогда для произвольных чисел* $0 < \rho_1 \le \rho_2 < \infty$ *и произвольной точки* $x_0 \in R^n$ *выполняется неравенство*

$$\frac{w(B(x_0,\rho_1))}{w(B(x_0,\rho_2))} \le C_0\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^p \tag{23}$$

с постоянной C_0, *зависящей лишь от* n, p, μ, $C_{p_0,w}$, $C_{\mu,w}$.

Оценим интеграл в правой части (21), применив леммы 3, 2. Имеем

$$\int\limits_{B_{j+1}} |v(x,k)|^p \left[\psi_j(x)\right]^p w(x)\,dx \le$$

$$\le \int\limits_{B_{j+1}} \left|v_{m_{j+1}}(x,k)\right|^p w(x)\,dx \le$$

$$\le C_3\rho^p \int\limits_{E_{m_{j+1}}} \left|\frac{\partial v(x,k)}{\partial x}\right|^p w(x)\,dx \le$$

$$\le C_4\rho^p m_{j+1}|k|^{p-1}\operatorname{cap}_{p,w}(F).$$

Здесь $v_{m_{j+1}}(x,k) = \min\{|v(x,k)|, m_{j+1}\}$. Отсюда и из (21) следует неравенство

$$m_j^{p+np_0(p-1)/p} \le$$

$$\le C_5 2^{jnp_0} \frac{\rho^p}{w(B(\xi,\rho))}\left[m_{j+1}\right]^{(p-1)np_0/p+1}|k|^{p-1}\operatorname{cap}_{p,w}(F).$$

Применяя далее лемму 1.5 из [4] (гл. 8), из последнего неравенства получаем

$$m_1 \le C_6|k|\left\{\operatorname{cap}_{p,w}(F)\frac{\rho^p}{w(B(\xi,\rho))}\right\}^{1/(p-1)},$$

что и завершает доказательство неравенства (19).

***Следствие* 2.** *Пусть выполнены условия теоремы* 4 *и* $\rho(x, B(x_0,d)) \ge \alpha d$, *где* $\alpha \in R^1_+$. *Тогда существует постоянная* K_3, *зависящая лишь от* α, ν_1, ν_2, n, p, μ, M, $C_{p_0,w}$, $C_{\mu,w}$, *такая, что выполнена оценка*

$$|v(x,k)| \le K_3|k|\left\{\operatorname{cap}_{p,w}(F)\frac{[\rho(x,B(x_0,d))]^p}{w((B(x_0,\rho(x,B(x_0,d))))}\right\}^{1/(p-1)}. \qquad (24)$$

Оценка (24) сразу следует из теоремы 4 и следующей леммы, доказательство которой может быть получено с помощью неравенства Гельдера.

Лемма 4. *Пусть* $w(x) \in A_{p_0}(R^n)$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\left(\frac{|E|}{|B|}\right)^p \le C_{p_0,w}\frac{w(E)}{w(B)}, \qquad (25)$$

где B — *шар в* R^n *и* E — *измеримое подмножество* B.

***Замечание* 3.** Определенная в условии С функция $c(x,k)$ удовлетворяет оценкам

$$\begin{gathered} 0 \le c(x,k)\operatorname{sign} k \le A|k|^{p-1}, \\ |c(x,k')-c(x,k'')| \le A(|k'|+|k''|)^{p-1-1/(p-1)}|k'-k''|^{1/(p-1)}, \end{gathered} \qquad (26)$$

где A зависит только от ν_1, ν_2, n, p, $C_{p_0,w}$, b_0, диаметра Ω.

Доказательство оценок (26) аналогично доказательству оценок (36) из [6] и поэтому мы его опускаем.

3. Асимптотическое разложение последовательности решений. Пусть $u_s(x)$ — фиксированная последовательность решений задачи (1), (2), удовлетворяющая оценкам (5), (6) и слабо сходящаяся в $W_p^1(\Omega,w)$ к функции $u_0(x)$. Продолжим $u_0(x)$ вне Ω, полагая $u_0(x)=f(x)$ при $x \in R^n \setminus \Omega$. В теореме 3 предполагалась принадлежность $f(x)$ пространству $W_q^1(R^n,w)$, $q > np_0$, а значит, для продолженной таким образом функции $u_0(x)$ имеем $u_0(x) \in W_p^1(R^n,w)$.

Пусть $K(\xi)$ — фиксированная, бесконечно дифференцируемая функция на R^1, равная нулю при $|\xi| \ge 1$ и удовлетворяющая условиям

$$0 \le K(\xi) \le 2\omega_n, \qquad \int_{R^n} K(|x|)dx = 1,$$

где ω_n — мера шара $B(0,1) \subset R^n$.

Определим следующие усреднения функций $u_0(x)$, $f(x)$:

$$u_s^{(0)}(x) = \frac{1}{(3R_s)^n}\int_{R^n} K\left(\frac{|x-y|}{3R_s}\right)u_0(y)dy,$$

$$f_s(x) = \frac{1}{(3R_s)^n}\int_{R^n} K\left(\frac{|x-y|}{3R_s}\right)f(y)dy,$$

где R_s — последовательность, определенная в условии B_2. Известно, что $u_s^{(0)}(x)$, $f_s(x)$ сильно сходятся при $s \to \infty$ в $W_p^1(\Omega,w)$ соответственно к $u_0(x)$, $f(x)$ (см., например, лемму 2.4 из [11]).

Введем подмножества индексов J_s', J_s'':

$$J_s' = \left\{ i \in J_s : \operatorname{cap}_{p,w}\left(F_i^{(s)}\right) > \left[\frac{d_i^{(s)}+r_i^{(s)}}{r_i^{(s)}}\right]^p \times\right.$$

$$\times \left[\min_{x \in S\left(x_i^{(s)},\, d_i^{(s)} + [\ln(1/(r_s+d_s))]^{-1} r_i^{(s)}\right)} w\left(B\left(x, r_i^{(s)}\right)\right) \right] \ln \frac{1}{r_s + d_s} \right\},$$

$$J_s'' = \left\{ i \in J_s :\ \operatorname{cap}_{p,w}\left(F_i^{(s)}\right) \le \left[\frac{d_i^{(s)} + r_i^{(s)}}{r_i^{(s)}} \right]^p \times \right.$$

$$\left. \times \left[\min_{x \in S\left(x_i^{(s)},\, d_i^{(s)} + [\ln(1/(r_s+d_s))]^{-1} r_i^{(s)}\right)} w\left(B\left(x, r_i^{(s)}\right)\right) \right] \ln \frac{1}{r_s + d_s} \right\}$$

и последовательность $\rho_i^{(s)}$:

$$\rho_i^{(s)} = \left\{ \ln \frac{1}{r_s + d_s} \right\}^{-1} r_i^{(s)} \ \text{ при } \ i \in J_s,$$

$$\rho_i^{(s)} = \frac{r_i^{(s)}}{2} \ \text{ при } \ i \in I_s. \tag{27}$$

Здесь множества J_s, I_s, числа r_s, d_s определены в условиях B_1, B_2. Определим средние значения функций $u_s^{(0)}(x)$, $f_s(x)$ относительно шара $B_{i,s} = B\left(x_i^{(s)}, d_i^{(s)} + \rho_i^{(s)}\right)$ равенствами

$$u_i^{(s)} = \frac{1}{w(B_{i,s})} \int_{B_{i,s}} u_s^{(0)}(x) w(x)\, dx,$$

$$f_i^{(s)} = \frac{1}{w(B_{i,s})} \int_{B_{i,s}} f_s(x) w(x)\, dx. \tag{28}$$

Пусть также

$$\mu_i^{(s)} = 5 \left\{ K\left(2M\left(1 + [3^{np} C_0 C_{p,w}]^{1/(p-1)}\right) + 1 + d_0\right) \times \right.$$

$$\left. \times \left\{ \operatorname{cap}_{p,w}\left(F_i^{(s)}\right) [\rho_i^{(s)}]^p \left[\min_{x \in S\left(x_i^{(s)},\, d_i^{(s)} + \rho_i^{(s)}\right)} w\left(B\left(x, \rho_i^{(s)}\right)\right) \right]^{-1} \right\}^{1/(p-1)} + d_i^{(s)} + \rho_i^{(s)} \right\}, \tag{29}$$

где K — постоянная из теоремы 4, C_0 — постоянная из следствия 1, d_0 — диаметр области Ω.

Отметим, что из условий B_1, B_2 леммы 4 и определения $\mu_i^{(s)}$, $\rho_i^{(s)}$ следуют равенства

$$\lim_{s \to \infty} \left\{ \max_{i \in I_s} \mu_i^{(s)} \right\} = 0, \qquad \lim_{s \to \infty} \left\{ \max_{i \in J_s''} \mu_i^{(s)} \right\} = 0. \tag{30}$$

Далее последовательность $k_i^{(s)}$ определяется условиями

$$k_i^{(s)} = f_i^{(s)} - u_i^{(s)}, \text{ если } \mu_i^{(s)} > 1 \text{ или } \left| f_i^{(s)} - u_i^{(s)} \right| > 4[\mu_i^{(s)}]^{(2p-1)/(2p)},$$

$$k_i^{(s)} = 4[\mu_i^{(s)}]^{(2p-1)/(2p)}, \text{ если } \mu_i^{(s)} \le 1,\ \left| f_i^{(s)} - u_i^{(s)} \right| \le 4[\mu_i^{(s)}]^{(2p-1)/(2p)}. \tag{31}$$

Введем срезывающие функции $\varphi_i^{(s)}(x)$, $\overline{\varphi}_i^{(s)}(x)$ равенствами

$$\begin{aligned} \varphi_i^{(s)}(x) &= \frac{2}{\mu_i^{(s)}} \min\left\{ \max\left[\left|v_i^{(s)}(x, k_i^{(s)})\right| - \frac{\mu_i^{(s)}}{2}, 0 \right], \frac{\mu_i^{(s)}}{2} \right\}, \\ \overline{\varphi}_i^{(s)}(x) &= \frac{4}{\mu_i^{(s)}} \min\left\{ \max\left[\left|v_i^{(s)}(x, k_i^{(s)})\right| - \frac{\mu_i^{(s)}}{4}, 0 \right], \frac{\mu_i^{(s)}}{4} \right\}, \end{aligned} \tag{32}$$

где $v_i^{(s)}(x, k_i^{(s)})$ — решение модельной задачи при $k = k_i^{(s)}$.

Лемма 5. *Предположим, что выполнены условия* A_1, A_2, B_1, B_2. *Тогда существует* s_1 *такое, что*

$$\begin{aligned} \operatorname{supp}\left(\varphi_i^{(s)}\right) \cap \operatorname{supp}\left(\varphi_j^{(s)}\right) &= \varnothing, \\ \operatorname{supp}\left(\overline{\varphi}_i^{(s)}\right) \cap \operatorname{supp}\left(\overline{\varphi}_j^{(s)}\right) &= \varnothing \end{aligned} \tag{33}$$

при $i \neq j$, $s \geq s_1$. *Здесь* $\operatorname{supp}(\varphi)$ — *носитель функции* $\varphi(x)$.

Доказательство. Из оценок (19), (23), (25) и определения $\mu_i^{(s)}$ получаем, что носители функций $\varphi_i^{(s)}$, $\overline{\varphi}_i^{(s)}$ содержатся в $B\left(x_i^{(s)}, d_i^{(s)} + \rho_i^{(s)}\right)$. Теперь равенства (33) следуют из (27) и определения $r_i^{(s)}$, как только $\ln\dfrac{1}{r_s + d_s} \geq 2$.

Лемма 6. *Предположим, что выполнены условия* A_1, A_2, B_1, B_2. *Тогда существует последовательность* $\tau_s^{(1)}$, *стремящаяся к нулю при* $s \to \infty$, *такая, что выполнено неравенство*

$$\sum_{j=1}^{I(s)} w\left(\operatorname{supp}\left(\varphi_j^{(s)}\right)\right) \leq \tau_s^{(1)}. \tag{34}$$

Доказательство леммы 6 аналогично доказательству леммы 7 из [6], и мы его опускаем.

Определим основное в настоящей работе асимптотическое разложение

$$u_s(x) = u_s^{(0)}(x) + r_s(x) + \sum_{j=1}^{3} r_s^{(j)}(x) + w_s(x), \tag{35}$$

где

$$\begin{aligned} r_s(x) &= \sum_{i \in I_s} v_i^{(s)}\left(x, f_i^{(s)} - u_i^{(s)}\right)\varphi_i^{(s)}(x), \\ r_s^{(1)}(x) &= \sum_{i \in J_s} v_i^{(s)}\left(x, f_i^{(s)} - u_i^{(s)}\right)\varphi_i^{(s)}(x), \\ r_s^{(2)}(x) &= \sum_{i=1}^{I(s)} \left[u_i^{(s)} - u_s^{(0)}(x)\right]\varphi_i^{(s)}(x), \\ r_s^{(3)}(x) &= \sum_{i=1}^{I(s)} \left[f_s(x) - f_i^{(s)}\right]\varphi_i^{(s)}(x) + f(x) - f_s(x), \end{aligned}$$

$w_s(x)$ — остаточный член разложения.

Лемма 7. *При выполнении условий* A_1, A_2, B_1, B_2 *справедливы равенства*

$$\lim_{s \to \infty} \left\| r_s^{(l)}(x) \right\|_{W_p^1(\Omega, w)} = 0, \qquad l = 1, 2, 3. \tag{36}$$

Доказательство леммы 7 аналогично доказательству лемм 8, 9 из [6]; отметим лишь, что при доказательстве равенства

$$\lim_{s\to\infty}\left\| r_s^{(l)}(x)\right\|_{W_p^1(\Omega,\,w)} = 0$$

используется неравенство

$$\int\limits_{D_i^{(s)}}\left|\frac{\partial}{\partial x}\left[\nu_i^{(s)}\left(x,\,f_i^{(s)}-u_i^{(s)}\right)\varphi_i^{(s)}(x)\right]\right|^p w(x)\,dx \;\le\; C_7\,\mathrm{cap}_{p,\,w}\left(F_i^{(s)}\right), \tag{37}$$

справедливое при $i = 1, \ldots, I(s)$. При получении этого неравенства в случае, когда $k_i^{(s)}$ определяется первым равенством в (31), использована оценка

$$\left|\nu_i^{(s)}\left(x,\,f_i^{(s)}-u_i^{(s)}\right)\right| \le \mu_i^{(s)}, \qquad \text{если} \qquad \left|\frac{\partial\varphi_i^{(s)}(x)}{\partial x}\right| \ne 0, \tag{38}$$

следующая из определения $\varphi_i^{(s)}(x)$.

Лемма 8. *Пусть выполнены условия* A_1, A_2, B_1, B_2. *Тогда последовательность* $r_s(x)$ *стремится к нулю сильно в* $W_m^1(\Omega, w)$ *для любого* $m < p$ *и слабо в* $W_p^1(\Omega, w)$ *при* $s\to\infty$.

Доказательство леммы 8 аналогично доказательству леммы 10 из [6], и мы его опускаем.

4. Поведение остаточного члена асимптотического разложения. Докажем следующую теорему.

Теорема 5. *Функции* $w_s(x)$, *определяемые равенством* (35), *принадлежат при каждом* s *пространству* $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega^{(s)}, w)$. *При выполнении условий* A_1, A_2, B_1, B_2 *последовательность* $w_s(x)$ *сильно сходится к нулю в* $W_p^1(\Omega, w)$.

Доказательство. Первое утверждение теоремы непосредственно следует из равенства (35) и определения членов асимптотического разложения. Из лемм 7, 8 и ограниченности последовательности $w_s(x)$ в $L_\infty(\Omega, w)$ следует слабая сходимость $w_s(x)$ к нулю в $W_p^1(\Omega, w)$ и сильная сходимость в $L_r(\Omega, w)$ при любом $r<\infty$.

Для доказательства второго утверждения теоремы запишем интегральное тождество (4) для $u_s(x)$ при $\varphi(x) = w_s(x)$:

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{j=1}^{n} a_j\left(x,u_s,\frac{\partial u_s}{\partial x}\right)\frac{\partial w_s(x)}{\partial x_j}\,dx + \int\limits_{\Omega} a_0\left(x,u_s,\frac{\partial u_s}{\partial x}\right)w_s(x)\,dx = 0.$$

Отсюда, используя условие A_2, леммы 6, 7, 8 и отмеченную выше сходимость $w_s(x)$, получаем

$$\nu_1\cdot\overline{\lim_{s\to\infty}}\int\limits_{\Omega}\left|\frac{\partial w_s(x)}{\partial x}\right|^p w(x)\,dx \;\le\; \overline{\lim_{s\to\infty}}\,R_1^{(s)}, \tag{39}$$

где

$$R_1^{(s)} = \int\limits_{\Omega}\sum_{j=1}^{n} a_j\left(x,0,\frac{\partial r_s(x)}{\partial x}\right)\frac{\partial w_s(x)}{\partial x_j}\,dx. \tag{40}$$

Более детально аналогичные рассуждения приведены в [4] при доказательстве теоремы 3.1 гл. 9.

Далее для краткости будем писать $v_{i,s}(x)$ вместо $v_i^{(s)}\left(x, f_i^{(s)} - u_i^{(s)}\right)$. Представим $R_1^{(s)}$ в виде

$$R_1^{(s)} = \sum_{i \in I_s} \int_{B_{i,s}} \sum_{j=1}^{n} a_j\left(x, 0, \frac{\partial v_{i,s}(x)}{\partial x}\right) \frac{\partial w_s(x)}{\partial x_j}\, dx + R_2^{(s)}, \tag{41}$$

где

$$R_2^{(s)} = \sum_{i \in I_s} \int_{B_{i,s}} \sum_{j=1}^{n} a_j\left(x, 0, \frac{\partial\left(v_{i,s}(x)\varphi_i^{(s)}(x)\right)}{\partial x}\right) \frac{\partial w_s(x)}{\partial x_j}\, dx -$$

$$- \sum_{i \in I_s} \int_{B_{i,s}} \sum_{j=1}^{n} a_j\left(x, 0, \frac{\partial v_{i,s}(x)}{\partial x}\right) \frac{\partial w_s(x)}{\partial x_j}\, dx.$$

Оценивая $R_2^{(s)}$ по условию A_2 и неравенству Гельдера, получаем

$$\left|R_2^{(s)}\right| \le C_9 \left\{ \sum_{i \in I_s} \int_{D_i^{(s)}} \left(\left|\frac{\partial v_{i,s}(x)}{\partial x}\right|^p + \left|\frac{\partial\left(v_{i,s}(x)\varphi_i^{(s)}(x)\right)}{\partial x}\right| \right)^p w(x)\, dx \right\}^{\frac{p-2}{p}} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{i \in I_s} \int_{D_i^{(s)}} \left(\left|\frac{\partial v_{i,s}(x)}{\partial x}\right|^p \left|1 - \varphi_i^{(s)}(x)\right|^p + \left|v_{i,s}(x)\right|^p \left|\frac{\partial \varphi_i^{(s)}(x)}{\partial x}\right|^p \right) w(x)\, dx \right\}^{\frac{1}{p}} \times$$

$$\times \left\{ \int_{\Omega} \left|\frac{\partial w_s(x)}{\partial x_j}\right|^p w(x)\, dx \right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{42}$$

В правой части (42) первый и третий интегралы ограничены постоянной, не зависящей от s, в силу (16), (37), (8); второй интеграл стремится к нулю при $s \to \infty$ в силу (32), (18), (31), (38), (30).

Выберем множество A_s мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ с целыми координатами так, чтобы множество $\left\{z_\alpha^{(s)} : \alpha \in A_s\right\}$ состояло из всех точек $z_\alpha^{(s)} = 6\alpha R_s$, принадлежащих Ω. Определим кубы $K_s(\alpha)$, $K_s'(\alpha)$ равенствами

$$K_s(\alpha) = K_{9R_s}\left(z_\alpha^{(s)}\right), \qquad K_s'(\alpha) = K_{3R_s}\left(z_\alpha^{(s)}\right).$$

Отметим, что с некоторой постоянной N, зависящей только от n, выполнено неравенство

$$\sum_{\alpha \in A_s} \chi(K_s(\alpha)) \le N, \tag{43}$$

где $\chi(K_s(\alpha))$ — характеристическая функция множества $K_s(\alpha)$.

Пусть $I_s(\alpha) = \left\{i \in I_s : x_i^{(s)} \in K_s'(\alpha)\right\}$ при $\alpha \in A_s$. Замечая, что $G_i^{(s)} = B\left(x_i^{(s)}, d_i^{(s)} + 3R_s\right) \subset K_s(\alpha)$ при $i \in I_s(\alpha)$, оценим теперь первое слагаемое в правой части (41). Для этого представим его в виде

$$\sum_{i \in I_s} \int_{B_{i,s}} \sum_{j=1}^{n} a_j\left(x, 0, \frac{\partial v_{i,s}(x)}{\partial x}\right) \frac{\partial w_s(x)}{\partial x_j}\, dx = R_3^{(s)} + R_4^{(s)}, \tag{44}$$

где

$$R_3^{(s)} = -\sum_{i \in I_s} \int_{G_i^{(s)} \setminus B_{i,s}} \sum_{j=1}^{n} a_j\left(x, 0, \frac{\partial v_{i,s}(x)}{\partial x}\right) \frac{\partial w_s(x)}{\partial x_j}\, dx,$$

$$R_4^{(s)} = \sum_{i \in I_s} \int_{G_i^{(s)}} \sum_{j=1}^{n} a_j\left(x, 0, \frac{\partial v_{i,s}(x)}{\partial x}\right) \frac{\partial w_s(x)}{\partial x_j}\, dx.$$

Оценим $R_3^{(s)}$. Используя условия A_2, B_2, оценки (19), (18), (43), (25) и неравенство Гельдера, получаем

$$\left| R_3^{(s)} \right| \le C_{10} \sum_{\alpha \in A_s} \left[\left\{ \max_{i \in I_s(\alpha)} \frac{\left[r_i^{(s)}\right]^p}{\overline{w}_i^{(s)}} \right\}^{\frac{1}{p}} \times \right.$$

$$\left. \times \left\{ \int_{K_s(\alpha)} \left| \frac{\partial w_s(x)}{\partial x} \right|^p w(x)\, dx \right\}^{1/p} \left\{ \sum_{i \in I_s(\alpha)} \operatorname{cap}_{p,w}\left(F_i^{(s)}\right) \right\} \right] \le$$

$$\le C_{11} \left[\max_{y \in \overline{\Omega}} \left\{ \max_{i \in I_s(K_{3R_s}(y))} \frac{w(K_{R_s}(y))\left[r_i^{(s)}\right]^p}{\overline{w}_i^{(s)}} \right\} \right]^{\frac{1}{p}} \times$$

$$\times \left[\int_{\Omega} \left| \frac{\partial w_s(x)}{\partial x} \right|^p w(x)\, dx \right]^{\frac{1}{p}}, \tag{45}$$

где $I_s(K_{3R_s}(y)) = \left\{ i \in I_s :\ x_i^{(s)} \in K_{3R_s}(y) \right\}$.

Второй множитель в правой части (45) ограничен постоянной, не зависящей от s, а первый стремится к нулю при $s \to \infty$ в силу условия B_2.

Для преобразования $R_4^{(s)}$ введем функции $\chi_i^{(s)}(x)$, принадлежащие $C_0^\infty\left(B\left(x_i^{(s)}, 1\right)\right)$, равные единице при $x \in B\left(x_i^{(s)}, d_i^{(s)} + \frac{3}{2} R_s\right)$, нулю вне $G_i^{(s)}$ и удовлетворяющие оценке

$$\left| \frac{\partial \chi_i^{(s)}(x)}{\partial x} \right| \le C_{12} [R_s]^{-1}.$$

Запишем теперь $R_4^{(s)}$ в виде

$$R_4^{(s)} = \sum_{i \in I_s} \int_{G_i^{(s)}} \sum_{j=1}^{n} a_j\left(x, 0, \frac{\partial v_{i,s}(x)}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial x_j}\left[w_s(x) \chi_i^{(s)}(x) \right] dx + R_5^{(s)}, \tag{46}$$

где

$$R_5^{(s)} = \sum_{i \in I_s} \int_{G_i^{(s)}} \sum_{j=1}^{n} a_j\left(x, 0, \frac{\partial v_{i,s}(x)}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial x_j}\left[w_s(x)\left(1 - \chi_i^{(s)}(x)\right) \right] dx.$$

Первый интеграл в правой части (46) равен нулю в силу интегрального тождества (15) для $v_{i,s}(x)$. Используя условия A_2, B_2, неравенства (24), (18), (43) и неравенство Гельдера, оценим $R_5^{(s)}$:

$$
\left|R_5^{(s)}\right| \le C_{13} \sum_{\alpha \in A_s} \sum_{i \in I_s(\alpha)} \left\{ \int\limits_{G_i^{(s)}\left(B\left(x_i^{(s)},\, d_i^{(s)}+\frac{3}{2}R_s\right)\right)} \left|\frac{\partial v_i^{(s)}(x)}{\partial x}\right|^p w(x)\,dx \right\}^{\frac{p-1}{p}} \times
$$

$$
\times \left\{ \int\limits_{G_i^{(s)}} \left|\frac{\partial w_s(x)}{\partial x}\right|^p w(x)\,dx + \frac{1}{R_s^p} \int\limits_{G_i^{(s)}} |w_s(x)|^p w(x)\,dx \right\}^{\frac{1}{p}} \le
$$

$$
\le C_{14} \sum_{\alpha \in A_s} \sum_{i \in I_s(\alpha)} \left\{ \left[\frac{\operatorname{cap}_{p,w}\left(F_i^{(s)}\right) R_s^p}{w\left(B_i^{(s)},\, R_s\right)} \right]^{\frac{1}{1-p}} \operatorname{cap}_{p,w}\left(F_i^{(s)}\right) \right\}^{\frac{p-1}{p}} \times
$$

$$
\times \left\{ \int\limits_{G_i^{(s)}} \left|\frac{\partial w_s(x)}{\partial x}\right|^p w(x)\,dx + \frac{1}{R_s^p} \int\limits_{G_i^{(s)}} |w_s(x)|^p w(x)\,dx \right\}^{\frac{1}{p}} \le
$$

$$
\le C_{15} \sum_{\alpha \in A_s} \Bigg[R_s [w(K_s(\alpha))]^{-1/p} \times
$$

$$
\times \left\{ \int\limits_{K_s(\alpha)} \left|\frac{\partial w_s(x)}{\partial x}\right|^p w(x)\,dx + \frac{1}{R_s^p} \int\limits_{K_s(\alpha)} |w_s(x)|^p w(x)\,dx \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum_{i \in I_s(\alpha)} \operatorname{cap}_{p,w}\left(F_i^{(s)}\right) \right\} \Bigg] \le
$$

$$
\le C_{16} R_s \sum_{\alpha \in A_s} \{w(K_s(\alpha))\}^{(p-1)/p} \left\{ \int\limits_{K_s(\alpha)} \left|\frac{\partial w_s(x)}{\partial x}\right|^p w(x)\,dx \right\}^{\frac{1}{p}} +
$$

$$
+ C_{16} \sum_{\alpha \in A_s} \{w(K_s(\alpha))\}^{(p-1)/p} \left\{ \int\limits_{K_s(\alpha)} |w_s(x)|^p w(x)\,dx \right\}^{\frac{1}{p}} \le
$$

$$
\le C_{17} R_s \left\{ \int\limits_{\Omega} \left|\frac{\partial w_s(x)}{\partial x}\right|^p w(x)\,dx \right\}^{\frac{1}{p}} + C_{17} \left\{ \int\limits_{\Omega} |w_s(x)|^p w(x)\,dx \right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{47}
$$

Правая часть (47) стремится к нулю при $s \to \infty$ в силу условия B_2 и сильной сходимости $w_s(x)$ к нулю в $L_p(\Omega, w)$. Утверждение теоремы 5 следует теперь из (39), (41) – (45), (46), (47).

5. Вывод предельного уравнения. В данном пункте будет доказана теорема 3. Утверждение о сильной сходимости последовательности $u_s(x)$ к $u_0(x)$ в $W_m^1(\Omega, w)$ при $m < \mathrm{p}$ является простым следствием асимптотического разложения (35), лемм 7, 8 и теоремы 5. Докажем, что функция $u_0(x)$ является решением задачи (12), (13).

Пусть $g(x)$ — произвольная функция класса $C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $\|g(x)\|_{C^1(\Omega)} \le 1$. Определим последовательность

$$g_s(x) = g(x) + \rho_s(x) + \rho_s^{(1)}(x) + \rho_s^{(2)}(x), \tag{48}$$

где

$$\rho_s(x) = -\sum_{i \in I_s} \frac{1}{k_i^{(s)}} v_i^{(s)}\left(x, k_i^{(s)}\right) \varphi_i^{(s)}(x) g_i^{(s)},$$

$$\rho_s^{(1)}(x) = -\sum_{i \in J_s} \frac{1}{k_i^{(s)}} v_i^{(s)}\left(x, k_i^{(s)}\right) \varphi_i^{(s)}(x) g_i^{(s)},$$

$$\rho_s^{(2)}(x) = \sum_{i=1}^{I(s)} \left[g_i^{(s)} - g(x)\right] \varphi_i^{(s)}(x).$$

Здесь $g_i^{(s)}$ — среднее значение функции $g(x)$ относительно шара $B_{i,s}$, определяемое аналогично (28); $k_i^{(s)}$, $\varphi_i^{(s)}(x)$ введены соответственно равенствами (31), (32).

Лемма 9. *Существуют постоянная K_4, зависящая лишь от ν_1, ν_2, n, p, μ, M, $C_{p_0, w}$, $C_{\mu, w}$, и последовательность $\tau_s^{(2)}$, стремящаяся к нулю при $s \to \infty$, такие, что справедливы неравенства*

$$\|\rho_s(x)\|_{W_p^1(\Omega, w)} \le K_4,$$

$$\|\rho_s(x)\|_{W_m^1(\Omega, w)} \le K_4\left[\tau_s^{(2)}\right]^{(p-m)/(pm)}, \tag{49}$$

$$\left\|\rho_s^{(1)}(x)\right\|_{W_p^1(\Omega, w)} \le K_4 \tau_s^{(2)}, \quad \left\|\rho_s^{(2)}(x)\right\|_{W_p^1(\Omega, w)} \le K_4 \tau_s^{(2)}$$

при $m < p$.

Доказательство. Оценку для $\rho_s^{(2)}(x)$ можно доказать аналогично доказательству леммы 7, используя дифференцируемость функции $g(x)$. Оценки для $\rho_s^{(1)}(x)$, $\rho_s(x)$ доказываются так же, как и в леммах 7, 8.

Определяемая равенством (48) функция $g_s(x)$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega^{(s)}, w)$, и ее можно подставить в интегральное тождество (4). Используя леммы 7 – 9 и отмеченную выше сильную сходимость $u_s(x)$ в $W_m^1(\Omega, w)$ при $m < p$, получаем равенство

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{j=1}^n a_j\left(x, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right) \frac{\partial g(x)}{\partial x_j} + a_0\left(x, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right) g(x) \right\} dx =$$

$$= -\int_\Omega \sum_{j=1}^n a_0\left(x, 0, \frac{\partial r_s(x)}{\partial x}\right) \frac{\partial \rho_s(x)}{\partial x_j}\, dx + \tau_s^{(3)}, \tag{50}$$

где

$$\lim_{s \to \infty} \tau_s^{(3)} = 0.$$

Доказательство равенства (50) аналогично соответствующему доказательству из [4] (гл. 9) и поэтому его опускаем.

Представим первое слагаемое правой части (50) в виде

$$-\int\limits_{\Omega}\sum_{j=1}^{n} a_j\left(x, 0, \frac{\partial r_s(x)}{\partial x}\right)\frac{\partial \rho_s(x)}{\partial x_j}\,dx =$$

$$= R_6^{(s)} + \sum_{i\in I_s}\sum_{j=1}^{n}\frac{g_i^{(s)}}{k_i^{(s)}}\int\limits_{B_i^{(s)}} a_j\left(x, 0, \frac{\partial v_i^{(s)}(x, k_i^{(s)})}{\partial x}\right)\frac{\partial v_i^{(s)}(x, k_i^{(s)})}{\partial x_j}\,dx, \tag{51}$$

где

$$R_6^{(s)} = \sum_{i\in I_s}\sum_{j=1}^{n}\frac{g_i^{(s)}}{k_i^{(s)}}\int\limits_{B_i^{(s)}}\left\{a_j\left(x, 0, \frac{\partial}{\partial x}[v_{i,s}(x)\varphi_i^{(s)}(x)]\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial}{\partial x_j}\left[v_i^{(s)}(x, k_i^{(s)})\varphi_i^{(s)}(x)\right] - a_j\left(x, 0, \frac{\partial v_i^{(s)}(x, k_i^{(s)})}{\partial x}\right)\frac{\partial v_i^{(s)}(x, k_i^{(s)})}{\partial x_j}\right\}dx.$$

Докажем, что справедливо равенство

$$\lim_{s\to\infty} R_6^{(s)} = 0. \tag{52}$$

Предварительно учтем оценку

$$\int\limits_{B_i^{(s)}}\left|\frac{\partial}{\partial x}\left\{v_i^{(s)}(x, k_i^{(s)})\left[1-\varphi_i^{(s)}(x)\right]\right\}\right|^p w(x)\,dx \le C_{18}\,\mu_i^{(s)}\left[k_i^{(s)}\right]^{p-1}\operatorname{cap}_{p,w}\left(F_i^{(s)}\right), \tag{53}$$

следующую из лемм 1, 2 и определений $\mu_i^{(s)}$, $\varphi_i^{(s)}(x)$. Используя (37), (53) и леммы 1, 2, получаем

$$\left|R_6^{(s)}\right| \le C_{19}\sum_{i\in I_s}\operatorname{cap}_{p,w}\left(F_i^{(s)}\right)\left\{\mu_i^{(s)}\left[K_i^{(s)}\right]^{-1}\left[\mu_i^{(s)}\right]^{(2p-1)/(2p^2)}\right\}.$$

Правая часть последнего неравенства стремится к нулю в силу (8), (30), (31). Тем самым установлено равенство (52).

Наконец, использовав условие C, можно установить оценку

$$\left|\sum_{i\in I_s}\sum_{j=1}^{n}\frac{g_i^{(s)}}{k_i^{(s)}}\int\limits_{B_i^{(s)}} a_j\left(x, 0, \frac{\partial v_i^{(s)}(x, k_i^{(s)})}{\partial x}\right)\frac{\partial v_i^{(s)}(x, k_i^{(s)})}{\partial x_j}\,dx - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{\Omega} C(x, f_s(x) - u_s^{(0)}(x)g(x)\,dx\right| \le \tau_s^{(4)}; \tag{54}$$

для $\tau_s^{(4)}$ справедливо равенство

$$\lim_{s\to\infty}\tau_s^{(4)} = 0.$$

Доказательство (54) проводится аналогично рассуждениям из [4] (гл. 9, § 4) и поэтому мы его опускаем.

Теперь, используя (51), (54), сходимость $f_s(x)$, $u_s^{(0)}(x)$ к $f(x)$, $u_0(x)$ и переходя к пределу в (50) при $s\to\infty$, получаем равенство

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_j\left(x, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\frac{\partial g(x)}{\partial x_j} + a_0\left(x, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right)g(x) - \right.$$

$$\left. - c(x, f(x) - u_0(x))g(x) \right\} dx = 0, \qquad (55)$$

доказанное для

$$g(x) \in C_0^\infty(\Omega), \qquad \|g(x)\|_{C^1(\Omega)} \le 1.$$

Непосредственно из определения пространства $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega, w)$ следует справедливость (55) для произвольной функции $g(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega, w)$, т. е. $u_0(x)$ — решение уравнения (12). Принадлежность $u_0(x)$ множеству $f(x) + \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega, w)$ следует из того, что при каждом s этому множеству принадлежит $u_s(x)$. Теорема 3 доказана.

1. *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.* Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. – Киев: Наук. думка, 1974. – 279 с.
2. *Скрыпник И. В.* Квазилинейная задача Дирихле в областях с мелкозернистой границей // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – № 2. – С. 21–25.
3. *Skrypnik I. V.* Nonlinear elliptic boundary value problems. – Leipzig: Teubner Verlag, 1986. – 232 p.
4. *Скрыпник И. В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. – М.: Наука, 1990. – 442 с.
5. *Скрыпник И. В.* Асимптотическое поведение решений нелинейных эллиптических задач в перфорированных областях // Мат. сб. – 1993. – **184**, № 10. – С. 67–90.
6. *Скрыпник И. В.* Новые условия усреднения нелинейных задач Дирихле в перфорированных областях // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 5. – С. 675–694.
7. *Heinonen J., Kilpeläinen T., Martio O.* Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations. – Oxford: Clarendon Press, 1993. – 363 p.
8. *Chanillo S., Wheeden R. L.* Weighted Poincaré and Sobolev inequalities and estimates for weighted for Peano functions // Amer. J. Math. – 1985. – **107**. – P. 1191–1226.
9. *Larin D. V.* Poinwise estimate of solution of a model degenerate nonlinear elliptic problem // Nonlinear Boundary Value Problems. – 1997. – **7**. – P. 132–137.
10. *Leonardi S., Skrypnik I. I.* Necessary condition for regularity of a boundary point for a degenerate quasilinear parabolic equations. – Catania, 1995. – 27 p. – (Preprint / Catania Univ.).
11. *Miller N.* Weidhted Sobolev spaces and pseudodifferential operators with smooth symbols // Trans. Amer. Math. Soc. – 1982. – **269**, № 1. – P. 91–109.

Получено 15.10.97