УДК 517.9

В. І. Ткаченко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНУ ДИХОТОМІЮ ЛІНІЙНИХ ІМПУЛЬСНИХ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ СИСТЕМ*

For a linear almost periodic pulse system, we prove that the exponential dichotomy on a semiaxis implies the exponential dichotomy on entire axis.

Для лінійної майже періодичної імпульсної системи доведено, що з експоненціальної дихотомії на півосі випливає експоненціальна дихотомія на всій осі.

Вступ. Будемо розглядати систему диференціальних рівнянь з імпульсною дією вигляду

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \qquad t \neq t_i, \tag{1}$$

$$\Delta x\big|_{t=t_i} = x(t_i+0) - x(t_i) = B_i x. \tag{2}$$

де $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{V}^m$, $\mathbb{V}^m$ — m-вимірний дійсний $\mathbb{R}^m$ чи комплексний $\mathbb{C}^m$ простір. Припускаємо, що матриця $A(t)$ майже періодична за Бором, послідовність $\{B_n, n \in \mathbb{Z}\}$ майже періодична, послідовність $\{t_n, n \in \mathbb{Z}\}$ строго зростаюча і має одностайно відносно j майже періодичні різниці $\{t_n^j, n \in \mathbb{Z}\}$, $t_n^j = t_{n+j} - t_n$ (див. [1, 2]).

Припускаємо, що $\det(I + B_n) = 0$ для деяких чи всіх $n \in \mathbb{Z}$. Тому розв'язки $x(t, \tau, x_0)$, $x(\tau, \tau, x_0) = x_0$ системи (1), (2) можуть не продовжуватися чи продовжуватися неоднозначно на від'ємну піввісь $t < \tau$. Всі кусково-неперервні функції вважаємо неперервними зліва.

Відомо, що з експоненціальної дихотомічності системи лінійних майже періодичних звичайних диференціальних рівнянь випливає її експоненціальна дихотомічність на всій осі [3]. Більше того, для експоненціальної дихотомічності такої системи на осі досить вимагати її експоненціальну дихотомічність на скінченному, досить великому інтервалі [4]. Метою даної роботи є поширення цих результатів на імпульсні системи (1), (2).

Відмітимо, що аналогічні результати розглядалися для лінійних майже періодичних різницевих рівнянь в [5].

Основні результати. Позначимо через $M(m, \mathbb{V})$ множину матриць розміру $m \times m$ з елементами, які належать простору $\mathbb{V}$. Нехай $\|\cdot\|$ — норма вектора з $\mathbb{V}$ чи відповідна норма матриці з $M(m, \mathbb{V})$. На підставі майже періодичності системи існують сталі $M > 0$, $\mu > 0$ такі, що [1]

$$\|X(t, \tau)\| \leq Me^{\mu(t-\tau)}, \qquad t \geq \tau, \tag{3}$$

де $X(t, \tau)$, $t \geq \tau$, — фундаментальна система розв'язків системи (1), (2), $X(t, t) = I$, I — одинична матриця.

Як і в роботі [6], систему (1), (2) назвемо експоненціально дихотомічною на множині $\mathbb{J} \subset \mathbb{R}$, якщо для довільного $\tau_0 \in \mathbb{J}$ простір $\mathbb{V}^m$ можна зобразити у вигляді прямої суми $U(\tau_0)$ та $S(\tau_0)$ так, що виконуються умови:

1) довільний розв'язок системи з $x_0 \in S(\tau_0)$ задовольняє нерівність

$$\|x(t, \tau_0, x_0)\| \leq K\exp(-\alpha(t-\tau))\,\|x(\tau, \tau_0, x_0)\|, \qquad t \geq \tau \geq \tau_0; \tag{4}$$

* Виконана при фінансовій підтримці Міністерства України у справах науки і технологій.

2) довільний розв'язок з $x_0 \in U(\tau_0)$ задовольняє нерівність

$$\| x(t, \tau_0, x_0) \| \geq K_1 \exp(\alpha(t-\tau)) \| x(\tau, \tau_0, x_0) \|, \quad t \geq \tau \geq \tau_0, \tag{5}$$

де $t, \tau \in \mathbb{J}$ і додатні сталі α, K, K_1 не залежать від τ_0, x_0;

3) $X(t, \tau)S(\tau) \subseteq S(t)$, $X(t, \tau)U(\tau) \subseteq U(t)$, $t > \tau$;

4) для відповідних проекторів $\sup\limits_{t \in \mathbb{J}} \| P(t) \| + \sup\limits_{t \in \mathbb{J}} \| Q(t) \| < \infty$.

Теорема. *Нехай матриця* $A(t)$ *системи* (1), (2) *майже періодична за Бором, послідовність* $\{ B_n, n \in \mathbb{Z} \}$ *майже періодична, послідовність* $\{ t_n, n \in \mathbb{Z} \}$ *строго зростаюча і має одностайно відносно* j *майже періодичні різниці* $\{ t_n^j, n \in \mathbb{Z} \}$, $t_n^j = t_{n+j} - t_n$.

Нехай система (1), (2) *має експоненціальну дихотомію на півосі* $t \geq 0$ *з сепаратрисними многовидами* $U(t)$ *та* $S(t)$. *Тоді система експоненціально дихотомічна на всій осі,* $\dim U(t)$ *та* $\dim S(t)$ *не залежать від* $t \in \mathbb{R}$ *і* $U(t)$ *має єдине обмежене продовження на від'ємну піввісь.*

Спочатку доведемо наступну лему.

Лема. *Нехай* $R_n = X(t_{n+1}, t_n)$. *Тоді послідовність* $\{ R_n, n \in \mathbb{Z} \}$ *майже періодична.*

Доведення. Майже періодична за Бором матрична функція $A(t)$ рівномірно неперервна на осі [7], тому для $\varepsilon > 0$ існує додатне $\delta = \delta(\varepsilon) \leq \varepsilon$ таке, що з $| s_1 - s_2 | < \delta$ випливає

$$\| A(s_1) - A(s_2) \| < \varepsilon. \tag{6}$$

За лемою 24.4 з [1] для δ існує відносно щільна множина чисел $r \in \mathbb{R}$ та відносно щільна множина чисел $p \in \mathbb{Z}$ таких, що

$$\| A(s+r) - A(s) \| < \delta \leq \varepsilon, \quad s \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

$$| t_{n+p} - t_n - r | < \delta \leq \varepsilon, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{8}$$

$$\left| t_{n+p}^1 - t_n^1 \right| = | t_{n+p+1} - t_{n+p} - t_{n+1} + t_n | < \delta \leq \varepsilon, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{9}$$

Майже періодична послідовність $\{ t_n^1, n \in \mathbb{Z} \}$ обмежена [2], тому існує $\theta > 0$ таке, що $0 < t_n^1 \leq \theta$, $n \in \mathbb{Z}$.

Оцінимо різницю $R_{n+p} - R_n = X(t_{n+p+1}, t_{n+p}) - X(t_{n+1}, t_n)$, де ціле число p задовольняє умови (8), (9). Припустимо, що $t_{n+p}^1 = t_{n+p+1} - t_{n+p} \leq t_{n+1} - t_n = t_n^1$ (випадок $t_{n+p}^1 \geq t_n^1$ розглядається аналогічно). Тоді

$$\begin{aligned} R_{n+p} - R_n = {} & X(t_{n+p+1}, t_{n+p}) - X(t_{n+p+1} - t_{n+p} + t_n, t_n) + \\ & + X(t_{n+p+1} - t_{n+p} + t_n, t_n) - X(t_{n+1}, t_n). \end{aligned} \tag{10}$$

Оцінимо першу різницю в правій частині (10). Для цього розглянемо функцію $Y(t) = X(t + t_{n+p}, t_{n+p}) - X(t + t_n, t_n)$. З урахуванням неперервності зліва функції $X(t, \tau)$ та того, що на інтервалах $(t_n, t_n + t_{n+p}^1]$ та $(t_{n+p}, t_{n+p} + t_{n+p}^1]$ система (1), (2) не має імпульсів, функція $Y(t)$ при $0 \leq t \leq t_{n+p+1} - t_{n+p}$ є розв'язком задачі Коші

$$\frac{dY}{dt} = A(t + t_n) Y + \left(A(t + t_{n+p}) + A(t + t_n) \right) X(t + t_{n+p}, t_{n+p}),$$

$$Y(0) = B_{n+p} - B_n.$$

Тоді

$$Y(t) = B_{n+p} - B_n + \int\limits_0^t X(t+t_n, \tau+t_n) \times$$

$$\times (A(\tau+t_{n+p}) - A(\tau+t_n)) X(\tau+t_{n+p}, t_{n+p}) d\tau.$$

Звідси

$$\| X(t_{n+p+1}, t_{n+p}) - X(t_{n+p+1} - t_{n+p} + t_n, t_n) \| \leq \| B_{n+p} - B_n \| +$$

$$+ M e^{\mu t^1_{n+p}} t^1_{n+p} \sup_{t \in \mathbb{R}} \| A(t + t_{n+p} - t_n) - A(t) \| \leq$$

$$\leq \varepsilon + \theta M e^{\mu\theta} \sup_{t \in \mathbb{R}} \| A(t+t_{n+p} - t_n) - A(t+r) \| +$$

$$+ \sup_{t \in \mathbb{R}} \| A(t+r) - A(t) \|) \leq \varepsilon(1 + 2\theta M e^{\mu\theta}) . \tag{11}$$

Друга різниця в правій частині (10) оцінюється так:

$$\| X(t_{n+p+1} - t_{n+p} + t_n, t_n) - X(t_{n+1}, t_n) \| =$$

$$= \| X(t_{n+p+1} - t_{n+p} + t_n, t_n) - X(t_{n+1}, t_{n+p+1} - t_{n+p} + t_n) X(t_{n+p+1} - t_{n+p} + t_n, t_n) \| \leq$$

$$\leq \| I - X(t_{n+1}, t_{n+p+1} - t_{n+p} + t_n) \| \| X(t_{n+p+1} - t_{n+p} + t_n, t_n) \| \leq$$

$$\leq a M e^{\mu(t^1_n - t^1_{n+p})} (t^1_n - t^1_{n+p}) M e^{\mu t^1_{n+p}} \leq a M e^{\mu\theta} \varepsilon, \tag{12}$$

де $a = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \| A(t) \|$. Тут ми використали те, що на інтервалі $[t_n + t^1_{n+p}, t_{n+1}]$ намає точок імпульсів, тому

$$X(t_{n+1}, t_{n+p+1} - t_{n+p} + t_n) - I = \int\limits_{t^1_{n+p} + t_n}^{t_{n+1}} X(t_{n+1}, \tau) A(\tau) d\tau,$$

звідси отримуємо оцінку (12).

З нерівностей (11) і (12) одержуємо

$$\| R_{n+p} - R_n \| \leq (1 + 2\theta M e^{\mu\theta}) \varepsilon + a M e^{\mu\theta} \varepsilon =$$

$$= (1 + 2\theta + a) M e^{\mu\theta} \varepsilon = \varepsilon_1, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Тут ε — довільне, тому для довільного ε_1 ми побудували відносно щільну множину ε_1-майже періодів послідовності $\{R_n\}$. Послідовність майже періодична. Лему доведено.

Доведення теореми. Розглянемо послідовність моментів імпульсної дії $\{t_n\}$. Вона має одностайно відносно j майже періодичні різниці $t^j_n = t_{n+j} - t_n$. Для послідовності $\{t_n\}$, для фіксованих $r \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина $\mathbb{P}_\varepsilon$ цілих чисел q таких, що $| t^q_n - r | < \varepsilon$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$ [1, с. 184]. Виберемо $\varepsilon > 0$ і $r > \varepsilon$ так, щоб

$$r + \varepsilon > t_{n+q} - t_n > r - \varepsilon > 0, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{13}$$

Виберемо підпослідовність $\{t_{qn}, n \in \mathbb{Z}\}$. Вона має одностайно майже періодичні різниці і має розділені елементи. Розглянемо послідовність значень

$X(t_{qk}, \tau_0)$, $t_{qk} \geq \tau_0 \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, для фундаментальної матриці системи (1), (2). Для неї виконуються нерівності (з урахуванням експоненціальної дихотомії на додатній півосі):

$$\| X(t_{qn}, \tau_0)P(\tau_0) \| \leq K \exp(-\alpha(t_{nq} - t_{kq})) \| X(t_{qk}, \tau_0)P(\tau_0) \|, \quad n \geq k \geq j, \tag{14}$$

$$\| X(t_{qn}, \tau_0)Q(\tau_0) \| \geq K_1 \exp(\alpha(t_{nq} - t_{kq})) \| X(t_{qk}, \tau_0)Q(\tau_0) \|, \quad n \geq k \geq j, \tag{15}$$

де j визначається з формули $t_{q(j-1)} < \tau_0 \leq t_{qj}$, $P(\tau)$ і $Q(\tau)$ — проектори, які відповідають стійкому та нестійкому многовидам системи в точці τ. З (13) випливають оцінки

$$(n-k)(r+\varepsilon) \geq t_{nq} - t_{kq} \geq (n-k)(r-\varepsilon). \tag{16}$$

Тоді нерівності (14) і (15) можна записати так:

$$\| X(t_{qn}, \tau_0)P(\tau_0) \| \leq K e^{-\alpha(r-\varepsilon)(n-k)} \| X(t_{qk}, \tau_0)P(\tau_0) \|, \quad n \geq k \geq j, \tag{17}$$

$$\| X(t_{qn}, \tau_0)Q(\tau_0) \| \geq K_1 e^{\alpha(r-\varepsilon)(n-k)} \| X(t_{qk}, \tau_0)Q(\tau_0) \|, \quad n \geq k \geq j. \tag{18}$$

Послідовність $X(t_{qn}, \tau_0)$ є розв`язком системи різницевих рівнянь

$$X(t_{q(n+1)}, \tau_0) = C_n X(t_{qn}, \tau_0), \tag{19}$$

де $C_n = X(t_{q(n+1)}, t_{qn})$. За лемою ця послідовність майже періодична. З урахуванням (17) і (18) майже періодична різницева система (19) експоненціально дихотомічна на півосі $n \geq j$. Тому за теоремою 2 з [5] вона експоненціально дихотомічна на осі, розмірності стійкого S_n та нестійкого U_n многовидів не залежать від n і розв`язки, які починаються на $U_n$, однозначно продовжуються на від`ємну піввісь. Отже, для всіх цілих j виконуються нерівності

$$\| X(t_{qn}, t_{qj})P_j \| \leq K e^{-\alpha(r-\varepsilon)(n-k)} \| X(t_{qk}, t_{qj})P_j \|, \quad n \geq k \geq j, \tag{20}$$

$$\| X(t_{qn}, t_{qj})Q_j \| \geq K_1 e^{\alpha(r-\varepsilon)(n-k)} \| X(t_{qk}, t_{qj})Q_j \|, \quad n \geq k \geq j, \tag{21}$$

де P_j і Q_j — проектори, які відповідають сепаратрисним многовидам S_j і U_j різницевої системи (19).

Нехай $\tau_0 \in \mathbb{R}$ довільне. Розглянемо фундаментальну систему розв'язків $X(t, \tau_0)$ системи (1), (2) $X(\tau_0, \tau_0) = I$. Нехай $\tau_0 \in (t_{q(j-1)}, t_{qj}]$. У різницевої системи (19) нестійкий многовид U_n визначається однозначно, $\dim U_n$ не залежить від $n \in \mathbb{Z}$ і підпростір U_n при відображенні $X(t_{q(n+1)}, t_{qn})$ взаємно однозначно відображається на U_{n+1}. Тому для всіх $t \in [t_{qn}, t_{q(n+1)}]$ можна визначити нестійкий многовид $U(t)$ системи (1), (2) таким чином:

$$U(t) = X(t, t_{qn}) U_n.$$

Тут $U_n = U(t_{qn})$. Нехай $x_0 \in U_n = U(t_{qn})$. Тоді з (21) випливає

$$\| X(t_{q(n+1)}, t_{qn})x_0 \| \geq K_1 e^{\alpha(r-\varepsilon)} \| x_0 \|.$$

Розглянемо розв'язок системи (1), (2):

$$x(t, t_{qn}, x_0) = X(t, t_{qn})x_0, \qquad t \in [t_{qn}, t_{q(n+1)}].$$

Одержимо оцінки

$$\| X(t_{q(n+1)}, t) \| \, \| X(t, t_{qn})x_0 \| \geq \| X(t_{q(n+1)}, t_{qn})x_0 \| \geq K_1 e^{\alpha(r-\varepsilon)} \| x_0 \|,$$

тому

$$\| x(t, t_{qn}, x_0) \| \geq \frac{K_1 e^{\alpha(r-\varepsilon)} \| x_0 \|}{\| X(t_{q(n-1)}, t) \|}. \tag{22}$$

Оцінимо знаменник. Справедлива нерівність

$$| t_{q(n+1)} - t | < | t_{q(n+1)} - t_{qn} | < r + \varepsilon,$$

тому на підставі (3)

$$\| X(t_{q(n+1)}, t) \| \leq M e^{\mu(r+\varepsilon)}.$$

Оцінку (22) перепишемо так:

$$\| x(t, t_{qn}, x_0) \| \geq \frac{K_1 e^{\alpha(r-\varepsilon)} \| x_0 \|}{M e^{\mu(r+\varepsilon)}}. \tag{23}$$

Враховуючи (3) і (23), для розв'язку $x(t, t_{qn}, x_0)$ при $x_0 \in U_n$, $t \in (t_{qn}, t_{q(n+1)}]$ отримуємо оцінку

$$M e^{\mu(t - t_{qn})} \| x_0 \| \geq \| x(t, t_{qn}, x_0) \| \geq \frac{K_1 e^{\alpha(r-\varepsilon)}}{M e^{\mu(r+\varepsilon)}} \| x_0 \|. \tag{24}$$

Нехай дійсні числа s, t лежать в інтервалах

$$\tau_0 < t_{qk} \leq s < t_{q(k+1)} < t_{qn} \leq t < t_{q(n+1)}. \tag{25}$$

З урахуванням (3) і (24) при $x_0 \in U(\tau_0)$ справедливі оцінки

$$\| x(t, t_{qn}, x_0) \| \geq \frac{K_1 e^{\alpha(r-\varepsilon)}}{e^{\mu(r+\varepsilon)}} e^{\mu(t-t_{qn})} \| X(t_{qn}, \tau_0) x_0 \| \geq$$

$$\geq \frac{K_1 e^{\alpha(r-\varepsilon)}}{e^{\mu(r+\varepsilon)}} e^{\mu(t-t_{qn})} K_1 e^{\alpha(r-\varepsilon)(n-k)} \| X(t_{qk}, \tau_0) x_0 \| \geq$$

$$\geq \frac{K_1^2 e^{\alpha(r-\varepsilon)} e^{\alpha(r-\varepsilon)(n-k)} e^{\mu(t-t_{qn})}}{M e^{\mu(r+\varepsilon)} e^{\mu(s-t_{kq})}} \| x(s, \tau_0, x_0) \|.$$

З формули (16) з урахуванням (25) випливає

$$\alpha(r-\varepsilon)(n-k) \geq \frac{\alpha(r-\varepsilon)}{r+\varepsilon}(t_{nq} - t_{kq}) \geq$$

$$\geq \frac{\alpha(r-\varepsilon)}{r+\varepsilon}(t - (r+\varepsilon) - s) \geq \frac{\alpha(r-\varepsilon)}{r+\varepsilon}(t-s) - \alpha(r-\varepsilon). \tag{26}$$

З нерівностей $t - t_{qn} \geq 0$, $s - t_{qk} < r + \varepsilon$ і (26) отримуємо

$$\| x(t, \tau_0, x_0) \| \geq K_1^2 M^{-1} e^{-2\mu(r+\varepsilon)} \exp\left(\frac{\alpha(r-\varepsilon)}{r+\varepsilon}(t-s) \right) \| x(s, \tau_0, x_0) \|, \; t \geq s \geq \tau_0,$$

або

$$\| x(t, \tau_0, x_0) \| \geq K_2 e^{\alpha_1(t-s)} \| x(t, \tau_0, x_0) \|, \quad t \geq s \geq \tau_0, \tag{27}$$

де

$$\alpha_1 = \frac{\alpha(r-\varepsilon)}{r+\varepsilon}, \quad K_2 = K_1^2 M^{-1} e^{-2\mu(r+\varepsilon)}.$$

Отже, ми отримали потрібну оцінку для розв'язків з нестійкого многовиду $U(t)$ системи (1), (2).

Розглянемо тепер стійкий многовид $S(t)$. Розмірність стійкого многовиду різницевої системи (19) стала:

$$\dim S_j = \dim S_{j+1} = m, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Справедливе співвідношення

$$X(t_{q(j+1)}, t_{qj}) S_j \subseteq S_{j+1},$$

а тому і співвідношення

$$X(t_{q(j+1)}, \tau_0) X(\tau_0, t_{qj}) S_j \subseteq S_{j+1}$$

для $\tau_0 \in (t_{qj}, t_{q(j+1)})$. Позначимо $\tilde{S}(\tau_0) = X(\tau_0, t_{qj}) S_j$. У загальному випадку $\dim \tilde{S}(\tau_0) \le m$ (тому що $\tilde{S}(\tau_0)$ лежить у доповненні до підпростору $U(\tau_0)$ з $\dim U(\tau_0) = n - m$).

Спочатку доведемо, що для розв'язків, які починаються на S_j, виконується нерівність

$$\| x(t, \tau_0, x_0) \| \le K \exp(-\alpha(t-s)) \| x(s, \tau_0, x_0) \|, \quad t \ge s \ge \tau_0, \tag{28}$$

де $\tau_0 = t_{qj}$, $x_0 \in S_j$. Нехай дійсні числа t, s лежать в інтервалах (25), тоді з урахуванням (26)

$$\| x(t, \tau_0, x_0) \| \le M e^{\mu(t - t_{qn})} \| x(t_{qn}, \tau_0, x_0) \| \le$$

$$\le KM e^{\mu(t - t_{qn})} e^{-\alpha(r-\varepsilon)(n-k-1)} \| x(t_{q(k+1)}, \tau_0, x_0) \| \le$$

$$\le KM^2 e^{\mu(t - t_{qn})} e^{-\alpha(r-\varepsilon)(n-k-1)} e^{\mu(t_{q(k+1)} - s)} \| x(s, \tau_0, x_0) \| \le$$

$$\le K_3 e^{-\alpha_1 (t-s)} \| x(s, \tau_0, x_0) \|, \quad t \ge s,$$

де

$$K_3 = KM^2 e^{2\mu(r+\varepsilon)} e^{2\alpha(r-\varepsilon)}, \quad \alpha_1 = \frac{\alpha(r-\varepsilon)}{r+\varepsilon}.$$

Для $\tau_0 \in (t_{q(j-1)}, t_{qj})$ означимо $S(\tau_0)$ як лінійний підпростір початкових точок розв'язків системи (1), (2), які задовольняють нерівність (28). Нехай його розмірність $\dim S(\tau_0) = m_1$. Очевидно,

$$\dim S(\tau_0) = m_1 \le n - \dim U(\tau_0) = m. \tag{29}$$

Доведемо рівність. Образ $S(\tau_0)$ при відображенні $X(t_{qj}, \tau_0)$ знаходиться в $S(qj)$. Його розмірність рівна

$$\dim X(t_{qj}, \tau_0) S(\tau_0) = \dim S(\tau_0) - \dim \ker X(t_{qj}, \tau_0).$$

Доповнення до $X(t_{qj}, \tau_0) S(\tau_0)$ в підпросторі $S(qj)$ має розмірність

$$\dim S(qj) - \dim S(\tau_0) + \dim \ker X(t_{qj}, \tau_0)$$

і належить множині $\mathbb{V}^n \setminus X(t_{qj}, \tau_0) \mathbb{V}^n$. Тому справедлива нерівність

$$\dim S(qj) - \dim S(\tau_0) + \dim \ker X(t_{qj}, \tau_0) \le \dim \ker X(t_{qj}, \tau_0)$$

або

$$\dim S(qj) \le \dim S(\tau_0).$$

Отже, $\dim S(\tau_0) \ge m$ і, враховуючи (29), отримуємо $\dim S(\tau_0) = m$.

Таким чином, для довільного τ_0 ми побудували розклад $\mathbb{R}^n = S(\tau_0) \oplus U(\tau_0)$ так, що розв'язки системи (1), (2), які починаються на $U(\tau_0)$, задовольняють нерівність (27), а розв'язки, які починаються на $S(\tau_0)$, — нерівність (28). Система експоненціально дихотомічна на осі. Теорему доведено.

Виберемо число $\overline{K} \geq 1$ так, щоб

$$\overline{K} \geq K_3 = KM^2 e^{2\mu(r+\varepsilon)} e^{2\alpha(r-\varepsilon)}, \tag{30}$$

$$\frac{1}{\overline{K}} \leq K_2 = K_1^2 M^{-1} e^{-\mu(r+\varepsilon)}. \tag{31}$$

Тоді система (1), (2) експоненціально дихотомічна на осі з константами $\nu = \alpha(r-\varepsilon)/(r+\varepsilon)$, $\overline{K}$, $\frac{1}{\overline{K}}$.

Використовуючи теорему 3 з [5], отримуємо такий наслідок.

Наслідок. *Нехай система* (1), (2) *експоненціально дихотомічна на відрізку* $[0, T]$ *з константами* α, K, K_1.

Припустимо, що виконуються оцінки

$$\frac{1}{\overline{K}} e^{\nu h} - \overline{K} e^{-\nu h} = 8, \qquad \delta h M_1^h (1 + 2M_1^h) \leq 1,$$

де $M_1 = M e^{\mu(r+\varepsilon)}$, $\overline{K}$ *задовольняє нерівності* (30), (31).

Тоді якщо число $T > 0$ *задовольняє умову* $T \geq 4h$ *і кожний інтервал довжини* $([T/2]-1)$ ($[x]$ — *ціла частина числа* x) *містить* δ-*майже період майже періодичної послідовності* $\{C_n, n \in \mathbb{Z}\}$, $C_n = X(t_{q(n+1)}, t_{qn})$, *то система* (1), (2) *має експоненціальну дихотомію на осі з константами*

$$\beta = \ln\left(\frac{2}{h}\right), \quad K = (2M_1)^h, \quad K_1 = (2M_1)^{-h}.$$

Зауваження. Результати теореми і наслідку залишаються справедливими, якщо у системі (1), (2) майже періодичність матриці $A(t)$ замінити на розривну майже періодичність в сенсі робіт [1, 8].

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Выща шк., 1987. – 288 с.
2. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 309 с.
3. *Coppel W. A.* Dichotomies in stability theory // Lect. Notes Math. – 1978. – № 629. – 96 p.
4. *Palmer K. J.* Exponential dichotomies for almost periodic equations // Proc. Amer. Math. Soc. – 1987. – **101**, № 2. – P. 293–298.
5. *Ткаченко В. І.* Про експоненціальну дихотомію лінійних різницевих рівнянь // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 10. – С. 1410–1417.
6. *Ткаченко В. І.* Про експоненціальну дихотомію імпульсних еволюційних систем // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 4. – С. 418–424.
7. *Левитан Б. М.* Почти периодические функции. – М.: Гостехиздат, 1953. – 398 с.
8. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А., Ахметов М. У.* Почти периодические решения дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. – Киев, 1983. – 50 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.26).

Одержано 05.11.96