УДК 517. 9

В. А. Плотников (Одес. ун-т)

КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПОЛУЛИНЕЙНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

For quasidifferential equations in semilinear metric spaces, we consider the problems of existence, uniqueness, and continuity of solutions and the problems of justifying the averaging method.

Розглядаються питання єдиності, неперервності розв'язків та обгрунтування методу усереднення для квазідиференціальних рівнянь у напівлінійних метричних просторах.

Исследование различных задач, в которых решениями являются пучки траекторий (ансамбли траекторий, многозначные траектории), привели к созданию теории квазидифференциальных уравнений в метрических пространствах [1]. Квазидифференциальные уравнения не используют операцию дифференцирования и тем самым позволяют избавиться от требования линейности пространства решений и с единых позиций рассматривать дифференциальные уравнения в линейных метрических пространствах, уравнения с многозначными решениями, а также динамические системы в нелинейных метрических пространствах [1 – 7].

В работе [8] была разработана теория мутационных уравнений в метрических пространствах, которая так же, как и в [1], позволяет рассматривать многозначные траектории (трубки) и траектории в нелинейных метрических пространствах. При этом если в [1] предложен подход, позволяющий не использовать в явном виде производную для описания движений в нелинейных метрических пространствах, то в работе [8] аналогичные результаты получены с помощью построения „дифференциального исчисления" в нелинейных метрических пространствах.

Заметим, что в [1, 3, 4] квазидифференциальные уравнения рассматривались в локально компактных метрических пространствах, а в [2, 5 – 7] — в полных метрических пространствах. Мутационные уравнения [8] рассматривались в метрических пространствах, в которых любые замкнутые шары являются компактными, т. е. в подпространстве локально компактного метрического пространства.

В данной работе рассматриваются вопросы существования, единственности, непрерывности решений и обоснования метода усреднения для квазидифференциальных уравнений в полулинейных метрических пространствах.

Заметим, что метрические пространства, в которых рассматривались все конкретные примеры в работах [1 – 7], являются полулинейными .

Пусть X — полулинейное метрическое пространство, т.е. определены бинарная операция +, для которой X является абелевой полугруппой, и операция умножения на положительное число, кроме того,

$$1 \cdot x = x; \qquad \lambda x + \mu x = (\lambda + \mu)x; \qquad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y; \qquad (\lambda \mu)x = \lambda(\mu x),$$

где $\lambda, \mu > 0$, $x, y \in X$; расстояние $\delta(x, y)$ инвариантно относительно сдвигов и имеет свойство однородности, т. е. $\delta(x + z, y + z) = \delta(x, y)$; $\delta(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\delta(x, y) = \lambda\delta(x, y)$.

Введем $\|x\| = \delta(x, 0)$. В пространстве X можно рассматривать выпуклые множества и выпуклые функции. Очевидно, что $\|x\|$ — выпуклая функция.

Рассмотрим в пространстве X квазидифференциальное уравнение (КДУ)

$$\delta(x(t+h), x(t) + hf(t, x(t))) = h\alpha(h)), \qquad x(t_0) = x_0. \tag{1}$$

где $f\colon R^1 \times X \to X$, α — бесконечно малая функция при $h \to 0$, $t \in I$, $I = [t_0, t_0 + T)$.

Абсолютно непрерывное отображение $x: I \to X$, удовлетворяющее (1) при $t \in I$, называется решением уравнения (1).

Теорема 1. *Пусть X — локально компактное полулинейное метрическое пространство. В области $Q = \{h \in (0, h_1],\ t \in I,\ D \subset X\}$ отображение $f(t, x)$ непрерывно.*

Тогда для любого $x_0 \in \operatorname{int} D$ существует такое $\eta > 0$, что решение КДУ (1) существует на промежутке $[t_0, t_0 + \eta)$.

Доказательство. Рассмотрим шар $S_r(x_0) = \{x \in X \mid \delta(x, x_0) \le r\}$ такой, что $S_r(x_0) \subset D$.

Так как X — локально компактное пространство, то можно выбрать такое $r > 0$, чтобы шар $S_r(x_0)$ был компактным.

Пусть

$$\lambda = \max_{x \in S_r(x_0),\, t \in I} \|f(t, x)\|, \qquad \eta = \min\{T - t_0, r/\lambda\}.$$

Разобьем отрезок $[t_0, t_0 + \eta]$ на $m = 2^p$ частей точками $t_k^p = T_0 + k\eta 2^{-P}$ и определим обобщенные ломаные Эйлера

$$x^p(t) = x^p(t_k) + (t - t_k) f(t_k, x^p(t_k)),$$

$$t \in [t_k^p, t_{k+1}^p], \quad k = 0, 1, \ldots, 2^p, \quad x^p(t_0) = x_0. \tag{2}$$

Очевидно, что $x^p(t) \in S_r(x_0)$ и $\delta(x^p(t_1), x^p(t_2)) \le \lambda |t_2 - t_1|$, $t_1, t_2 \in [t_0, t_0 + \eta]$, т. е. семейство функций $\{x^p(t)\}$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Согласно теореме Арцела – Асколи [9] из последовательности $\{x^p(t)\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность к некоторой непрерывной функции $x(t)$.

Докажем, что функция $x(t)$ удовлетворяет уравнению (1).

Пусть $t \in [t_k^p, t_{k+1}^p]$, $t + h \in (t_{k+l}^p, t_{k+l+1}^p]$, $h_p = \eta 2^{-P}$, тогда

$$\delta(x^p(t+h), x^p(t) + hf(t, x^p(t))) =$$

$$= \delta(x^p(t_{k+l}^p) + (t + h - t_{k+l}^p) f(t_{k+l}^p, x^p(t_{k+l}^p)), x^p(t) + hf(t, x^p(t))) =$$

$$= \delta(x^p(t_{k+l-1}^p) + h_p f(t_{k+l-1}^p, x^p(t_{k+l-1}^p)) +$$

$$+ (t + h - t_{k+l}^p) f(t_{k+l}^p, x^p(t_{k+l}^p)), x^p(t) +$$

$$+ hf(t, x^p(t))) = \delta(x^p(t_k^p) + \sum_{i=k}^{k+l-1} h_p f(t_i^p, x^p(t_i^p)) + (t + h - t_{k+l}^p) f(t_{k+l}^p,$$

$$x^p(t_{k+l}^p)), \quad x^p(t) + hf(t, x^p(t))). \tag{3}$$

При $p \to \infty$ из (3) имеем (1).

Теорема 2. *Пусть X — полное полулинейное метрическое пространство. В области Q отображение $f(t, x)$ непрерывно и $\|f(t, x)\| \le \lambda$.*

Тогда для любого $x_0 \in \operatorname{int} D$ существует такое $\eta > 0$, что решение КДУ (1) существует на промежутке $I_\eta = [t_0, t_0 + \eta)$.

Доказательство. Рассмотрим шар $S_r(x_0) \subset D$ и выберем $\eta = \min[T - t_0, r/\lambda]$. Аналогично (2) построим на промежутке I_η обобщенные ломаные Эйлера.

Очевидно, что

$$x^p(t) \in S_r(x_0), \quad \delta(x^p(t_1), x^p(t_2)) \le \lambda |t_2 - t_1|, \quad t_1, t_2 \in I_\eta.$$

Так как замкнутый шар $S_{\lambda\eta}(x_0)$ в полном метрическом пространстве не всегда является компактным, то нельзя воспользоваться теоремой Арцела – Асколи. Докажем, что последовательность функций $\{x^p(t)\}$ является фундаментальной.

Пусть $n > m$. Рассмотрим

$$\delta(x^m(t), x^n(t)) =$$

$$= \delta(x^m(t_k^m) + (t - t_k^m) f(t_k^m, x^m(t_k^m)),\ x^n(t_k^m + p h_n) +$$

$$+ (t - (t_k^m + p h_n)) f(t_k^m + p h_n, x^n(t_k^m + p h_n))) =$$

$$= \delta(x^m(t_k^m) + (t - t_k^m) f(t_k^m, x^m(t_k^m)),\ x^n(t_k^m) + h_n \sum_{i=0}^{p-1} f(t_k^m + i h_n, x^n(t_k^m + i h_n)) +$$

$$+ (t - (t_k^m + p h_n)) f(t_k^m + p h_n, x^n(t_k^m + p h_n))) \le$$

$$\le (t - t_k^m)\, \delta(f(t_k^m, x^m(t_k^m)),\ \sum_{i=0}^{p-1} \frac{h_n}{t - t_k^m} f(t_k^m + i h_n, x^n(t_k^m + i h_n)) +$$

$$+ \frac{t - \left(t_k^m + p h_n\right)}{t - t_k^m} f(t_k^m + p h_n, x^n(t_k^m + p h_n))) + \delta(x^m(t_k^m), x^n(t_k^m)). \tag{4}$$

Пусть $\delta_i = \delta(x^m(t_i^m), x^n(t_i^m))$, тогда из (4) имеем

$$\delta_i \le \delta_{i-1} + h_m \alpha(h_m), \quad \delta_0 = 0, \tag{5}$$

т. е. для любого $\mu > 0$ существует такое m_0, что при $m, n \ge m_0$ имеем

$$\delta(x^m(t), x^n(t)) < \mu.$$

Следовательно, последовательность $\{x^p(t)\}$ является последовательностью Коши и сходится к некоторой функции $x(t)$.

Доказательство того, что функция $x(t)$ является решением уравнения (1), проводится аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 (*теоремы* 2) *и, кроме того, отображение* $f(t, x)$ *удовлетворяет условию Липшица по* x *с постоянной* λ.

Тогда для любого $x_0 \in \operatorname{int} D$ *на промежутке* I_η *существует единственное решение КДУ, проходящее через точку* x_0.

Доказательство. Предположим обратное, т. е. что существуют два решения $x(t)$ и $y(t)$ КДУ (1) при $x(t_0) = y(t_0)$.

Пусть $r(t) = \delta(x(t), y(t))$. Тогда

$$r(t+h) = \delta(x(t+h), y(t+h)) \le \delta(x(t+h), x(t) + h f(t, x(t)) +$$

$$+ \delta(x(t) + h f(t, x(t)), y(t) + h f(t, y(t))) +$$

$$+ \delta(y(t) + h f(t, y(t)), y(t+h)) \le$$

$$\le r(t) + h \lambda r(t) + h \alpha(h). \tag{6}$$

Так как $r(t)$ — абсолютно непрерывная функция, то из (6) следует, что почти всюду

$$\dot r(t) \le \lambda r(t), \quad r(t_0) = 0. \tag{7}$$

Следовательно, $r(t) \equiv 0$ при $t \in I_\eta$.

Теорема 4. *Пусть в области Q заданы КДУ*

$$\delta(x(t+h), x(t)+hf(t, x(t))) = h\alpha(h), \quad x(t_0)=x_0, \tag{8}$$

$$\delta(y(t+h), y(t)+hg(t, y(t))) = h\alpha(h), \quad y(t_0)=y_0. \tag{9}$$

Пусть для уравнений (8), (9) *выполнены условия теоремы* 3 *и, кроме того,*

$$\delta(f(t, x), g(t, x)) \le \eta, \quad \delta(x_0, y_0) \le \gamma. \tag{10}$$

Тогда для $t \in I$ справедлива оценка

$$\delta(x(t), y(t)) \le \gamma e^{\lambda(t-t_0)} + \frac{\eta}{\lambda}\left(e^{\lambda(t-t_0)} - 1\right). \tag{11}$$

Доказательство . Разобьем промежуток $[t_0, t_0+\eta]$ на m частей точками $t_i^m = t_0 + ih_m$, $h_m = \eta/m$, $i=\overline{1, m-1}$. Тогда для $t \in \left[t_k^m, t_{k+1}^m\right) \subset I\eta$ имеем

$$\delta(x(t), y(t)) =$$

$$= \delta(x(t_k^m) + (t-t_k^m)f(t_k^m, x(t_k^m)), y(t_k^m) + (t-t_k^m)f(t_k^m, y(t_k^m))) + h_m\alpha(h_m) \le$$

$$\le \delta(x(t_k^m) + h_m f(t_k^m, x(t_k^m)), x(t_k^m) + h_m f(t_k^m, y(t_k^m))) +$$

$$+ \delta(x(t_k^m) + h_m f(t_k^m, y(t_k^m)), y(t_k^m) + h_m f(t_k^m, y(t_k^m))) +$$

$$+ \delta(y(t_k^m) + h_m f(t_k^m, y(t_k^m)), y(t_k^m) + h_m g(t_k^m, y(t_k^m))) + h_m\alpha(h_m) \le$$

$$\le (h_m\lambda + 1)\ \delta(\dot{x}(t_k^m), y(t_k^m)) + h_m\eta + h_m\alpha(h_m) \le$$

$$\le \exp(\lambda(t-t_0))\gamma + (\exp(\lambda(t-t_0)) - 1)\eta/\lambda.$$

Пусть в области Q заданы КДУ

$$\delta(x(t+h), x(t) + \varepsilon\int_t^{t+h} f(s, x(t))ds) = \varepsilon h\alpha(\varepsilon h), \tag{12}$$

$$\delta(y(t+h), y(t) + \varepsilon h g(y(t))) = \varepsilon h\alpha(\varepsilon h), \tag{13}$$

где

$$g(x) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(s, x)ds. \tag{14}$$

Теорема 5 (обобщение первой теоремы Н. Н. Боголюбова). *Пусть в области Q для КДУ* (12), (13) *выполнены условия теоремы* 3 *и, кроме того:*

1) *отображения $f(t, x)$ и $g(x)$ равномерно ограничены, т. е.*

$$\|f(t, x)\| \le M, \qquad \|g(x)\| \le M;$$

2) *равномерно относительно x существует предел* (14);

3) *решение $y(t)$ КДУ* (2) *при $t \in [0, L\varepsilon^{-1})$ вместе с ρ-окрестностью принадлежит области D.*

Тогда для любого $\eta > 0$ существует такое $\varepsilon^0(\eta) > 0$, что при $\eta \in (0, \varepsilon^0]$ и $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ справедлива оценка

$$\delta(x(t), y(t)) \le \eta,$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — решения КДУ (12) *и* (13) *такие, что $x(0) = y(0)$.*

Доказательство. Условия теоремы гарантируют существование единственного решения уравнений (12), (13). Разобьем отрезок $[0, L\varepsilon^{-1}]$ на m частей точками $t_k = kL/m\varepsilon$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, и определим отображения

$$x^m(t) = x^m(t_k) + \varepsilon \int_{t_k}^{t} f\left(s, x^m(t_k)\right) ds, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad x^m(0) = x_0, \tag{15}$$

$$y^m(t) = y^m(t_k) + \varepsilon (t - t_k)\, g(y^m(t_k)), \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad y^m(0) = x_0. \tag{16}$$

Тогда

$$\delta(x^m(t_{k+1}), x(t_{k+1})) \le$$

$$\le \delta(x^m(t_k) + \varepsilon \int_{t_k}^{t_{k+1}} f\left(s, x^m(t_k)\right) ds,\ x(t_k) + \varepsilon \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, x(t_k)) ds\ ) +$$

$$+ \varepsilon h \alpha(\varepsilon h) \le (1 + \varepsilon \lambda h)\, \delta(x(t_k), x^m(t_k)) + \varepsilon h \alpha(\varepsilon h) \le$$

$$\le \alpha(\varepsilon h)(\exp(\lambda L) - 1). \tag{17}$$

Аналогично получим

$$\delta(y^m(t_{k+1}), y(t_{k+1})) \le \alpha(\varepsilon h)(\exp(\lambda L) - 1). \tag{18}$$

Кроме того, для $t \in [t_k, t_{k+1}]$ имеем

$$\delta(x^m(t), x^m(t_k)) \le \| \varepsilon \int_{t_k}^{t} f\left(s, x^m(t_k)\right) ds \| \le \frac{\lambda L}{m},$$

$$\delta(y^m(t), y^m(t_k)) \le \frac{\lambda L}{m}. \tag{19}$$

Оценим

$$\delta(x^m(t_{k+1}), y^m(t_{k+1})) \le$$

$$\le \delta(x^m(t_k) + \varepsilon \int_{t_k}^{t_k+1} f\left(s, x^m(t_k)\right) ds,\ y^m(t_k) + \varepsilon h\, g(y^m(t_k)) \le$$

$$\le \delta(x^m(t_k), y^m(t_k)) + \varepsilon h\, \delta(\frac{1}{h} \int_{t_k+1}^{t_k} f(s, x(t_k))\, ds, \quad g(x^m(t_k)) +$$

$$+ \varepsilon h \lambda \delta(x^m(t_k), y^m(t_k)) \le (1 + \varepsilon \lambda h)\, \delta(x^m(t_k), y^m(t_k)) + \varepsilon h \varphi(h) \le$$

$$\le (\exp(\lambda L) - 1)\, \varphi(h)/\lambda. \tag{20}$$

Следовательно,

$$\delta(x(t), y(t)) \le \frac{2\lambda L}{m} + (\exp(\lambda L) - 1)\, \varphi\left(\frac{L}{\varepsilon m}\right)/\lambda. \tag{21}$$

Зафиксировав $m > \dfrac{4\lambda L}{\eta}$ и выбрав ε_0 из условия $(\exp(\lambda L) - 1)\, \varphi\left(\dfrac{L}{\varepsilon m}\right) l <$ $< \eta/2$, получим утверждение теоремы.

***Следствие* 1.** *Если* $X = R^n$, *то из теоремы* 5 *получаем теорему Н. Н. Боголюбова для обыкновенных дифференциальных уравнений* [10]. *Если* X — *банахово пространство, то из теоремы* 5 *следует первая теорема Н. Н. Боголюбова для дифференциальных уравнений в банаховых пространствах* [11].

***Следствие* 2.** Если $X = \mathrm{comp}(R^n)$, *то из теоремы* 5 *получаем теорему Н. Н. Боголюбова для дифференциальных уравнений с производной Хукухары* [12]

$$D x(t) = \varepsilon f(t, x(t)), \qquad x(0) = x_0,$$

где $x\colon R^1 \to \mathrm{conv}(R^n)$, $f\colon R^1 \times \mathrm{conv}(R^n) \to \mathrm{conv}(R^n)$, $D x(t)$ — *производная Хукухары.*

1. *Панасюк А. И.* Квазидифференциальные уравнения в метрическом пространстве // Дифференц. уравнения. – 1985. – **21**, № 8. – С. 1344 – 1853.
2. *Панасюк А. И.* Квазидифференциальные уравнения в метрическом пространстве в условиях типа Каратеодори // Там же. – 1995. – **31**, № 6. – С. 962 – 972 (Ч. 1); № 8. – С. 1361 – 1369 (Ч. 2).
3. *Плотников В. А., Плотникова Л. И.* Усреднение квазидифференциальных уравнений в метрических пространствах // Там же. – №10. – С. 1678 – 1683.
4. *Плотников В. А., Плотникова Л. И.* Частичное усреднение квазидифференциальных уравнений в метрических пространствах // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 10. – С. 1442 – 1447.
5. *Плотников В. А., Плотникова Л. И.* Усреднение квазидифференциальных уравнений и включений в метрических пространствах // Сб. научн. тр. „Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения". – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1994. – С. 159 – 169.
6. *Плотников В. А., Плотникова Л. И.* Усреднение уравнений управляемого движения в метрическом пространстве // Негладкие и разрывные задачи управления, оптимизации и их приложения: 3-й Междунар. сем. – С.-Петербург, 1995. – С. 119 – 121.
7. *Plotnikov V. A., Kitanov P. M.* Continuous dependence of solutions of quasidifferential equations with impulses // Discret mathematics and applications, Blagoevgrad. – 1995. – **5**. – P. 238 – 245.
8. *Aubin J. P.* Mutational equations in metric spaces // Set-Valued Analysis. – 1993. – **1**, № 1. – P. 3–46.
9. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1977. – 358 с.
10. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1971. – 440 с.
11. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. – М.: Наука, 1973. – 512 с.
12. *Kisielewicz M.* Method of averaging for differential equations with compact convex valued solutions // Rend. Math. – 1976. – **9**, № 3. – P. 397 – 408.

Одержано 15.10.96