УДК 517.929

Е. П. Белан (Симфероп. ун-т)

ГЛОБАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ И ИНВАРИАНТНЫЕ ТОРЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

We prove the existence of an m-parameter family of global solutions of a system of difference-differential equations. For difference-differential equations on a torus, we introduce the notion of rotation number. We also consider the problem of perturbation of an invariant torus of a system of difference-differential equations and study the problem of the existence of periodic and quasiperiodic solutions of second-order difference-differential equations.

Доведено існування m-параметричної сім'ї глобальних розв'язків системи диференціально-різницевих рівнянь. Для диференціально-різницевих рівнянь на торі введено число обертання. Розглянуто задачу про збурення інваріантного тора системи диференціально-різницевих рівнянь. Досліджено задачу про періодичні та квазіперіодичні розв'язки диференціально-різницевого рівняння другого порядку.

Рассмотрим систему дифференциально-разностных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h)), \tag{1}$$

где $h>0$, $f\colon R\times R^m\times R^m \to R^m$ непрерывна и ограничена.

Определение. *Глобальным решением уравнения* (1) *называется решение, определенное на* $(-\infty, \infty)$ [1].

В данной статье получены достаточные условия, обеспечивающие диффеоморфизм пространства глобальных решений и пространства R^m. Этот результат позволяет в скалярном случае, когда f периодична по всем переменным, определить число вращения и перенести на рассматриваемый случай ряд результатов теории Пуанкаре – Данжуа о дифференциальных уравнениях на торе.

Структура пространства глобальных решений используется и в рассматриваемой задаче о возмущении инвариантного тора дифференциально-разностных уравнений. Задача о возмущении инвариантных поверхностей дифференциально-разностных уравнений рассматривалась в ряде работ. Полученные результаты, а также библиография, отражены в [2–4].

В заключение рассмотрена задача о периодических и квазипериодических решениях дифференциально-разностных уравнений второго порядка. Полученные здесь результаты являются распространением на рассматриваемые случаи результатов Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского [5] о периодических и квазипериодических решениях квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка, описывающих нелинейные колебания в системах с одной степенью свободы.

1. Глобальные решения. Рассмотрим задачу существования определенного на R решения уравнения (1), удовлетворяющего условию

$$x(0) = x_0. \tag{2}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $f\colon R\times R^m\times R^m \to R^m$ *непрерывна и ограничена. Тогда существует определенное на* R *решение уравнения* (1), *удовлетворяющее условию* (2).

Доказательство. Пусть $|f(t,x,y)| \le M$ для всех $(t,x,y)\in R\times R^m\times R^m$. Рассмотрим уравнение

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s), x(s-h))\,ds. \tag{3}$$

От уравнения (3) перейдем посредством замены $x - x_0 = y$ к уравнению

$$y(t) = \int_0^t f(s, y(s) + x_0, y(s-h) + x_0)\, ds. \tag{4}$$

Пусть $\mathfrak{B}$ обозначает банахово пространство непрерывных на R функций $y: R \to R^m$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{|t| \to \infty} \frac{|y(t)|}{1+t^2} = 0,$$

с нормой

$$\| y \| = \max_R \frac{|y(t)|}{1+t^2}.$$

Обозначим $G = \{ y \in \mathfrak{B} : |y(t)| \le M|t|,\ t \in R \}$. Множество $G \subset \mathfrak{B}$ является ограниченным выпуклым замкнутым множеством. Определим оператор $A: \mathfrak{B} \times \times R^m \to G$ равенством

$$A(y, x_0)(t) = \int_0^t f(s, y(s) + x_0, y(s-h) + x_0)\, ds. \tag{5}$$

При фиксированном $x_0 \in R^m$ множество G является инвариантным множеством оператора A. Очевидно, справедливо неравенство

$$|A(y, x_0)(t_1) - A(y, x_0)(t_2)| \le M|t_1 - t_2|.$$

Следовательно, для всякого $l > 0$ семейство функций $A(y, x_0)(t)/(1+t^2)$, $y \in \in G$, равномерно ограниченно и равностепенно непрерывно на $[-l, l]$. Так как

$$\frac{A(y, x_0)(t)}{1+t^2} \to 0, \quad |t| \to \infty,$$

равномерно на G, из теоремы Арцелла следует, что семейство функций $A(y, x_0)$, $y \in G$, компактно в G. Таким образом, отображение $A(\cdot, x_0): G \to G$ вполне непрерывно и согласно теореме Шаудера имеет по крайней мере одну неподвижную точку. Это завершает доказательство теоремы.

Перейдем к вопросу о единственности глобального решения задачи (1), (2). Обозначим через $C_\alpha(R^m)$ банахово пространство непрерывных на R функций со значениями в пространстве R^m, для которых конечна величина

$$\| y \|_\alpha = \sup_{t \in R} |y(t)| \exp(-\alpha|t|),$$

принимаемая за норму в этом пространстве. Аналогично вводятся пространства $C_\alpha^+(R^m)$, $C_\alpha^-(R^m)$, определенные соответственно на положительной, отрицательной полуосях. Для норм в этих пространствах используются обозначения $\|\cdot\|_\alpha^+$, $\|\cdot\|_\alpha^-$.

Пусть $y \in C_\alpha^-(R^m)$. Рассмотрим оператор T, определяемый согласно равенству

$$T(y)(t) = \int_0^t [y(s) + y(s-h)]\, ds, \qquad t \in R_-.$$

Очевидно,

$$\|T(y)\|_{\alpha}^{-} = \sup_{t \in R_-} \exp(\alpha t) \left| \int_0^t [\, y(s) + y(s-h)\,] ds \right| \le$$

$$\le \sup_{t \in R_-} \exp(+\alpha t) \left| \int_0^t \|y\|_{\alpha}^{-} (\exp(-\alpha s) + \exp(-\alpha(s-h))) ds \right| \le \frac{1 + \exp \alpha h}{\alpha} \|y\|_{\alpha}^{-}. \quad (6)$$

Рассмотрим уравнение

$$\alpha = 1 + \exp(\alpha h). \quad (7)$$

Уравнение (7) при $0 < h < \hat{h}$, где $\hat{h}$ — вещественный корень уравнения

$$h = \exp(-(1+h)), \quad (8)$$

имеет два положительных корня $\alpha_1(h)$, $\alpha_2(h)$ $(\alpha_1(h) < \alpha_2(h))$. Если α выбрано из условия $\alpha_1(h) < \alpha < \alpha_2(h)$, то согласно неравенству (6) для линейного оператора $T\colon C_{\alpha}^{-}(R^m) \to C_{\alpha}^{-}(R^m)$ справедлива оценка $\|T\| < 1$. Используя теорему об операторном неравенстве в пространстве с конусом [6, с. 85–86], получаем следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть $c \ge 0$, $L > 0$, $h > 0$ и $x(t) \ge 0$ — непрерывная на R^- функция, удовлетворяющая неравенству*

$$x(t) \le c - \int_t^0 L(x(s) + x(s-h)) ds, \qquad t \le 0.$$

Тогда, если $hL < \hat{h}$, а $x \in C_{\alpha}^{-}(R)$, где $\alpha < \alpha_2$, а α_2 — наибольший положительный корень уравнения

$$\alpha = L(1 + e^{\alpha h}), \quad (9)$$

то справедливо неравенство $x(t) \le c e^{-\alpha_1 t}$, $t \le 0$, где α_1 — наименьший положительный корень уравнения (9).

Из теоремы 1 и леммы 1 вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть правая часть системы* (1) *удовлетворяет условиям теоремы* 1 *и справедливо неравенство*

$$|f(t,x,y) - f(t,x',y')| \le L(|x - x'| + |y - y'|)$$

для всех (t,x,y), $(t,x',y') \in R \times R^m \times R^m$. Тогда если $hL < \hat{h}$, где $\hat{h}$ — положительный корень уравнения (8), *то определенное на R решение уравнения* (1), *удовлетворяющее условию* (2), *существует и единственно.*

Если выполнены условия теоремы 2, то определенное на R решение задачи (1), (2) является непрерывной функцией начального условия x_0. Справедлива следующая теорема о дифференцируемости решений задачи (1), (2) по начальным условиям и параметру.

Теорема 3. *Пусть правая часть системы* (1) *удовлетворяет условиям теоремы* 1 *и является непрерывно дифференцируемой функцией x, y, в пространстве $R^m \times R^m$, причем справедливы условия*

$$|f_x(t,x,y)| \le L, \qquad |f_y(t,x,y)| \le L.$$

Тогда если выполнено неравенство $0 < hL < \hat{h}$, где $\hat{h}$ — положительный корень уравнения (8), *то определенное на R решение задачи* (1), (2) $x(\cdot, x_0)$ *является непрерывно дифференцируемой функцией начального условия x_0.*

Если, кроме того, $f - k$ $(k \geq 2)$-непрерывно дифференцируема по (x, y), то решение $x(\cdot, x_0)$ — k-непрерывно дифференцируемая функция x_0.

Если f является аналитической функцией (x, y), то $x(\cdot, x_0)$ является аналитической функцией x_0.

Пусть $f(t, x, y, \lambda)$ зависит от параметра λ, где $\lambda \in \Lambda$, а Λ — область в некотором банаховом пространстве. Тогда если $f(t, x, y, \lambda)$ — k-непрерывно дифференцируема по (x, y, λ) в $R^m \times R^m \times \Lambda$, то решение задачи (1), (2) *является k-непрерывно дифференцируемой функцией параметра λ.*

Доказательство. Для доказательства дифференцируемости решения $x(\cdot, x_0)$ по x_0 достаточно убедиться в дифференцируемости $x(\cdot, x_0)$ по x_0 при $t \leq 0$. Оператор A, определенный равенством (5), $A: C_\alpha^-(R^m) \times R^m \to C_\alpha^-(R^m)$, где $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$, а α_1, α_2 — корни уравнения (9), является оператором равномерного сжатия. Кроме того, оператор A дифференцируем по $(x(\cdot), x_0) \in C_\alpha^-(R^m) \times R^m$. Согласно теореме о дифференцируемости по параметру неподвижной точки оператора равномерного сжатия [7, с. 20, 21] $x(\cdot, x_0)$ является дифференцируемой функцией x_0. Из этой теоремы следуют и остальные утверждения теоремы 3.

Из теоремы 3 вытекает следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть правая часть системы уравнений* (1) *удовлетворяет условиям теоремы* 3. *Тогда пространство глобальных решений уравнения* (1) *с метрикой $\|\cdot\|_{\alpha_1}$, где α_1 — наименьший положительный корень уравнения* (9), *диффеоморфно пространству R^m.*

2. Дифференциально-разностные уравнения на торе. Рассмотрим систему дифференциально-разностных уравнений

$$\dot{x}(t) = \omega + f(t, x(t), x(t-h)), \tag{10}$$

где $\omega \in R^m$, f: $R \times R^m \times R^m \to R^m$ — 2π-периодическая функция по всем переменным. Если f удовлетворяет условиям теоремы 4, то система (10) имеет m-параметрическое семейство глобальных решений, гладко зависящих от начальных условий. Это семейство является единственным в том смысле, что всякое глобальное решение системы (10) является элементом этого семейства.

Заметим, что если f не зависит от t и удовлетворяет равенству $f(x, x - \omega h) = 0$ для всех $x \in R^m$, то таким семейством решений является семейство функций $\omega t + x_0$.

Если условия теоремы 2 не выполнены, то система (10) может иметь более одного глобального решения, определенного условиями $(0, x_0)$.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = 1 + \sin(x(t) - x(t-h)).$$

Легко видеть, что это уравнение имеет решение $\omega t + x_0$ тогда и только тогда, когда ω удовлетворяет уравнению $\omega - 1 = \sin \omega h$. Число положительных решений этого уравнения неограниченно растет при $h \to \infty$.

Перейдем к скалярному случаю.

Рассмотрим прежде всего уравнение

$$\dot{x}(t) = \omega + \varepsilon f(x(t), x(t-h), \varepsilon), \tag{11}$$

где $\omega > 0$, f: $R \times R \times I \to R$, где I — интервал, $0 \in I$, причем $f(x, x', \varepsilon)$ является 2π-периодической функцией по переменным x, x'.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть в уравнении* (11) ω, f *удовлетворяют сформулированным выше условиям. Тогда если* f *является непрерывно дифференцируемой по всем переменным функцией, то существуют* $\varepsilon_0 > 0$ *и непрерывно дифференцируемые функции* $\lambda = \lambda(\varepsilon)$, $u = u(\varphi, \varepsilon)$, $\lambda : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to R$, $u : R \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to R$, *причем* $u(\varphi, \varepsilon)$ *является* 2π*-периодической функцией* φ, *такие что однопараметрическое семейство глобальных решений уравнения* (11) *представимо в форме*

$$x = \lambda(\varepsilon)t + c + u(\lambda(\varepsilon)t + c, \varepsilon),$$

причем $\lambda(\varepsilon) \to \omega$, $u(\psi, \varepsilon) \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, *а* c *— произвольная постоянная.*

Доказательство теоремы очевидно. Отметим, что λ, u можно построить, используя метод последовательных приближений, как решение уравнения

$$\frac{\partial u(\varphi)}{\partial \varphi}\lambda = \omega - \lambda + \varepsilon f(\varphi + u(\varphi), \varphi - \lambda h + u(\varphi - \lambda h)).$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h)), \qquad (12)$$

где f: $R \times R \times R \to R$ — 2π-периодическая по всем переменным непрерывная на всем пространстве непрерывно дифференцируемая по x, y функция. Пусть выполнены условия, обеспечивающие существование однопараметрического семейства глобальных решений $x(t, x_0)$ $(x(0, x_0) = x_0)$.

Тогда выполняется равенство

$$x(t, x_0 + 2\pi) = x(t, x_0) + 2\pi.$$

Определим функцию последования Пуанкаре для уравнения (12) равенством $\mathcal{A}x_0 = x(2\pi, x_0)$. Отображение $\mathcal{A}$ определяет сохраняющий ориентацию диффеоморфизм окружности на себя. Определим число вращения уравнения (12) μ равенством

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \lim_{n \to \infty} \frac{\mathcal{A}^n x}{n}.$$

Из результатов Пуанкаре [8, 9] о сохраняющих ориентацию диффеоморфизмах окружности вытекает следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть в уравнении* (12) $h > 0$, *функция* $f(t, x, y)$ 2π*-периодическая по всем переменным, непрерывная и имеет непрерывные производные по* x, y, *причем справедливы неравенства*

$$|f_x(t, x, y)| \le L, \qquad |f_y(t, x, y)| \le L.$$

Тогда если h *удовлетворяет неравенству* $0 < hL < \hat{h}$, *где* $\hat{h}$ *— положительный корень уравнения* (8), *а число вращения уравнения* (12) *рационально, то существуют периодические решения уравнения* (12).

Используя теорему Боля [4, с. 454], в рассматриваемом случае нетрудно получить следующую теорему.

Теорема 7. *Пусть* $h > 0$, f *удовлетворяет условиям теоремы* 6, *а число вращения* μ *уравнения* (12) *иррационально. Тогда существует такая непрерывная функция* $\omega(t, x)$, 2π*-периодическая по обеим переменным, что глобальные решения уравнения* (12) *представимы в виде*

$$x(t) = t\mu + c + \omega(t, t\mu + c),$$

где c *— постоянная.*

3. Инвариантные торы. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + Bx(t-h) + \varepsilon f(x(t), x(t-h), y(t), y(t-h)), \\ \dot{y} &= \omega + \varepsilon g(x(t), x(t-h), y(t), y(t-h)), \end{aligned} \tag{13}$$

где $\omega \in R^m$, A, B — постоянные вещественные $(n\times n)$-мерные матрицы, функция $(f, g): R^n\times R^n\times R^m\times R^m \to R^n\times R^m$ ограничена и имеет производную, удовлетворяющую условию Липшица. Параметр ε предполагается малым. Предположим, что функция $(f, g)(x, x', y, y')$ является 2π-периодической по (y, y').

Рассмотрим систему (13) при фиксированном значении параметра ε.

Определение. *Инвариантным тором системы уравнений* (13) *называется поверхность*

$$\mathcal{M} = \{(x, y): x=\sigma(y),\ y\in T^m\},$$

где $T^m = \{y\in T^m \mid \mathrm{mod}\, 2\pi\}$ *— стандартный* m*-мерный тор,* $\sigma: T^m \to R^n$ *— липшицева функция такая, что для каждой точки* $(x_0, y_0)\in \mathcal{M}$ *существует глобальное решение системы* (13), *проходящее через точку* (x_0, y_0) *и остающееся на* $\mathcal{M}$, *т. е.* $(x(t), y(t))$ *для всех* $t\in R$.

При $\varepsilon = 0$ система (13) имеет нулевой тор $\mathcal{M}_0 = \{(x, y): x = 0,\ y\in T^m\}$. Покажем далее, что если тор $\mathcal{M}_0$ является экспоненциально устойчивым, то система (13) при малом ε имеет близкий к $\mathcal{M}_0$ инвариантный тор $\mathcal{M}_\varepsilon$.

При исследовании рассматриваемой задачи о возмущении инвариантного тора используется метод, предложенный в [10] в задаче об интегральном многообразии систем обыкновенных дифференциальных уравнений с быстроменяющимися по t функциями. Развитие этого метода для полулинейных параболических уравнений принадлежит Д. Хенри [3]. Этот метод использован в статьях [11, 12].

Предположим, что справедливы неравенства

$$|\mathcal{F}(u)| \le M_1, \qquad |\mathcal{F}'(u)| \le M_2, \tag{14}$$

где $\mathcal{F}$ принимает значения (g, f), $u = (x, x', y, y')$, а M_1, M_2 — положительные постоянные.

Обозначим

$$(Lx)(t) = \dot{x}(t) - Ax(t) - Bx(t-h).$$

Из условий экспоненциальной устойчивости тора $x = 0$ системы (13) при $\varepsilon = 0$ следует регулярность оператора L. Следовательно, существует такая постоянная $K > 0$, что для любой непрерывной и ограниченной на вещественной оси функции $q\in C(R^n)$ выполняется неравенство

$$\|L^{-1}q\| \le K\|q\|. \tag{15}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 8. *Пусть система уравнений* (13) *удовлетворяет сформулированным выше условиям. Предположим, что оператор* L *является регулярным и справедливо неравенство* (15). *Тогда существует такое* ε_0, *что для каждого* $\varepsilon\in(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ *и любого* $\eta\in R^m$ *существует единственное определенное на вещественной оси решение* $x(t,\eta)$, $y(t,\eta)$ *системы* (13) *такое, что* $y(0,\eta)=\eta$, $|x(t,\eta)| \le \varepsilon M_1 K$. *Функции* $x(t,\eta)$, $y(t,\eta)$ *являются* 2π*-периодическими по* *переменной* η. *Кроме того, существуют* $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ ($\alpha(\varepsilon) \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$), $c_1 > 0$ *такие, что справедливо неравенство*

$$\|x(\cdot,\eta_1) - x(\cdot,\eta_2)\|_\alpha + \varepsilon\|y(\cdot,\eta_1) - y(\cdot,\eta_2)\|_\alpha \le c_1\varepsilon\|\eta_1 - \eta_2\|,$$

где c_1 — *постоянная, зависящая от* M_2, K, h, α.

Пусть $\mathcal{F}'(u)$, *где* $\mathcal{F}$ *принимает значения* f, g, *удовлетворяет условию Липшица с постоянной Липшица* M_3. *Тогда отображение* $\eta \to x(t,\eta), y(t,\eta)$ *дифференцируемо и справедливо неравенство*

$$\left\|\frac{\partial x}{\partial\eta}(t,\eta_1) - \frac{\partial x}{\partial\eta}(t,\eta_2)\right\|_{C(R^m,R^n)} + \left\|\frac{\partial y}{\partial\eta}(t,\eta_1) - \frac{\partial y}{\partial\eta}(t,\eta_2)\right\|_{C(R^m,R^n)} \le$$
$$\le c_2\varepsilon\|\eta_1 - \eta_2\| e^{\alpha 2|t|},$$

где c_2 — *постоянная, зависящая от* M_2, M_3, K, h, ε.

Доказательство теоремы 8 опирается на следующие леммы.

Лемма 2. *Пусть* $(\eta, x) \in R^m \times C(R^n)$, $\|x\| \le \varepsilon l$, *где* $l = KM_1$. *Если* $\varepsilon_0 > 0$ *удовлетворяет неравенству* $\varepsilon_0 M_2 h < \hat{h}$, *где* $\hat{h}$ — *корень уравнения* (8), *то для любого* ε, *удовлетворяющего неравенству* $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, *существует, и притом единственное, определенное на вещественной оси решение* $y(t,\eta,x,\varepsilon)$ *задачи*

$$\dot{y} = \omega + \varepsilon g(x(t), x(t-h), y(t), y(t-h)), \quad y(0) = \eta.$$

Пусть $x_i \in C(R^n)$, $\|x_i\| \le \varepsilon l$ $(i = 1, 2)$ *и* $\|x_1 - x_2\|_\mu < \infty$, *где* μ — *некоторое положительное число. Если* $\varepsilon > 0$ *удовлетворяет также условию* $2\varepsilon_0 M_2(1 + \exp(\mu h)) < \mu$, *то справедливо неравенство*

$$\|y(t,\eta_1,x_1,\varepsilon) - y(t,\eta_2,x_2,\varepsilon)\|_\mu \le 2(\|\eta_1 - \eta_2\| + \varepsilon c_3\|x_1 - x_2\|_\mu),$$

где

$$c_3 = M_2\frac{1 + \exp(\mu h)}{\mu}.$$

Доказательство. Первое утверждение следует из теоремы 2. Для доказательства второго утверждения обозначим $y(t,\eta_i,x_i,\varepsilon) = y_i$ $(i = 1, 2)$, $y = y_1 - y_2$, $\eta = \eta_1 - \eta_2$, $x = x_1 - x_2$. Выполняется следующее равенство:

$$g(x_1(t), x_1(t-h), y_1(t), y_1(t-h)) - g(x_2(t), x_2(t-h), y_2(t), y_2(t-h)) =$$
$$= Q_1(t)x(t) + Q_2(t)x(t-h) + R_1(t)y(t) + R_2(t)y(t-h),$$

где

$$Q_1 = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x}\left(x_2 + s(x_1 - x_2), x_2^h + s\left(x_1^h - x_2^h\right)y_2 + s(y_1 - y_2), y_2^h + s\left(y_1^h - y_2^h\right)\right)ds.$$

Здесь и далее используется обозначение $x^h(t) = x(t-h)$. Аналогично определяются матрицы Q_2, R_1, R_2. Функция y удовлетворяет уравнению

$$y(t) = \eta + \varepsilon\int_0^t (Q_1(s)x(s) + Q_2(s)x(s-h) + R_1(s)y(s) + R_2(s)y(s-h))ds. \tag{16}$$

Оператор F, определенный согласно равенству

$$(Fy)(t) = \varepsilon \int_0^t (R_1(s)y(s) + R_2(s)y(s-h))\,ds$$

и рассматриваемый на пространстве функций C_μ, является ограниченным оператором, причем из неравенств (6), (14) и леммы 1 следует неравенство

$$\| F(y) \|_\mu \le \varepsilon M_2 \frac{1+\exp(\mu h)}{\mu} \le \frac{1}{2}.$$

Следовательно, уравнение (16) разрешимо и решение $y(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\| y \|_\mu \le 2\left(\| \eta \| + \varepsilon M_2 \frac{1+\exp(\mu h)}{\mu} \| x \|_\mu \right).$$

Лемма 3. *Предположим, что* $\alpha_0 > 0$ *удовлетворяет уравнению* $|l|(\alpha + \|B\|(\exp(\alpha h) - 1)) = 1/2$. *Тогда для каждого* $\alpha \in [0, \alpha_0]$ *операторы* $L^{-1}: C_\alpha(R^m) \to C_\alpha(R^m)$ *существуют, а их нормы не превышают* $2K$.

Доказательство. Пусть $q \in C_\alpha(R^m)$, где α удовлетворяет требованиям леммы. Обозначим через $\delta_n: R \to [0, 1]$ гладкую функцию такую, что

$$\delta_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } |t| < n, \\ 0, & \text{если } |t| > n+1, \end{cases} \qquad |\delta_n'| \le 2.$$

Обозначим $u_n = L^{-1}(q\delta_n)$, $r(t) = \exp(-\alpha|t|)$. Для функции $v_n = u_n r$ имеем

$$(Lv_n)(t) = (r\delta_n q)(t) + (r'u_n)(t) + Bu_n(t-h)(r(t-h) - r(t)).$$

Следовательно,

$$\| v_n \| \le \| L^{-1} \| (\| r\delta_n q \| + \| r'u_n \| + \| B \| \| u_n \| | r^h - r |).$$

Так как $|r'| = |r|\alpha$, $|r^h - r| = (\exp(\alpha h) - 1)|r|$, то согласно условию леммы получаем неравенство

$$\| u_n r \| \le 2 \| L^{-1} \| \| rq\delta_n \|.$$

Переход к пределу в полученном неравенстве при $n \to \infty$ завершает доказательство леммы.

Лемма 4. *Пусть* $y(t)$ *является непрерывной на вещественной оси функцией, принимающей значения в* R^m. *Предположим, что выполняется неравенство* $2\varepsilon_0 M_2 K < 1$. *Тогда уравнение*

$$(Lx)(t) = \varepsilon f(x(t), x(t-h, y(t), y(t-h))$$

при $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon)$ *имеет единственное ограниченное на вещественной оси решение* $x(t, \eta)$, *удовлетворяющее неравенству* $\|x(t, \eta)\| \le |\varepsilon| l$. *Если* y_i $(i = 1, 2)$ — *непрерывные на вещественной оси функции со значениями в пространстве* R^m, *причем* $\|y_1 - y_2\|_\alpha < \infty$, *то при* $0 \le \alpha \le \alpha_0$, *где постоянная* α_0 *определена в лемме* 3, *справедливо неравенство*

$$\| x(\cdot, y_1) - x(\cdot, y_2) \|_\alpha \le \varepsilon_0 4KM_2 \| y_1 - y_2 \|_\alpha.$$

Доказательство. Обозначим $S(x) = \varepsilon L^{-1} f(x, x^h, y, y^h)$. Пусть $x \in C_\alpha(R^m)$, $\|x\| \le \varepsilon_0 l$. Из ограниченности функции f, оператора L^{-1} следует неравенство $\|S(x)\| \le |\varepsilon| l \le \varepsilon_0 l$. Пусть $x \in C(R^m)$. Из неравенств (15), (14) и условий леммы получаем неравенство

$$\|S(x_1) - S(x_2)\| \le \varepsilon M_2 K \|x_1 - x_2\| \le \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|.$$

Из принципа сжимающих отображений следует первое утверждение леммы.

Обозначим $x(t, y_i) = x_i(t)$ $(i = 1, 2)$, $x_1 - x_2 = x$, $y_1 - y_2 = y$. Рассмотрим уравнение

$$x = \varepsilon L^{-1}(P_1 x + P_2 x^h + G_1 y + G_2 y^h),$$

где $P_i = P_i(t)$, $G_i = G_i(t)$,

$$P_1 = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}\left(x_2 + s(x_1 - x_2), x_2^h + s\left(x_1^h - x_2^h\right), y_2 + s(y_1 - x_2), y_2^h + s\left(y_1^h - y_2^h\right)\right) ds;$$

аналогично определяются матрицы P_2, G_i, $i = 1, 2$. Для завершения доказательства леммы следует воспользоваться леммой 3 и принципом сжимающих отображений.

Этих лемм достаточно, чтобы доказать существование функций $x(t, \eta)$, $y(t, \eta)$ из теоремы 8. Из гладкость вытекает из следующей леммы.

Лемма 5. *Пусть* $\mathcal{F}'(u)$, *где* $\mathcal{F}$ *принимает значения* f, g, *удовлетворяет условию Липшица с постоянной* M_3. *Тогда существуют такие постоянные* c_4, c_5, *что при малых* ε *и всех* $t \in R$ *отображение* $\eta \to x(t, \eta)$ *дифференцируемо и при* $4\alpha < \alpha_0$, *где постоянная* α_0 *определена в лемме* 4, *справедливы неравенства*

$$\left\|\frac{\partial x}{\partial \eta}(t, \eta)\right\|_{2\alpha} \le \varepsilon c_4,$$

$$\left\|\frac{\partial x}{\partial \eta}(t, \eta_1) - \frac{\partial x}{\partial \eta}(t, \eta_2)\right\|_{2\alpha} \le \varepsilon c_5 \|\eta_1 - \eta_2\|.$$

При доказательстве леммы используется метод, предложенный в ([7], лемма 9.1.8)

Используя леммы 2–5 и следуя [7, 10], можно убедиться в справедливости теоремы 8.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 9. *Предположим, что в системе* (13) *функция* $(f, g): R^n \times R^n \times R^m \times R^m \to R^n \times R^m$ *ограничена и имеет производную, удовлетворяющую условию Липшица. Пусть функция* $(f, g)(x, x', y, y')$ *является* 2π*-периодической по* y, y'. *Предположим, что инвариантный тор системы* (13) *при* $\varepsilon = 0$ *является экспоненциально устойчивым. Тогда существует такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что для каждого* $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ *уравнение* (13) *имеет инвариантный тор* $x = \sigma(y, \varepsilon)$. *Функция* $\sigma(y, \varepsilon)$ *является непрерывно дифференцируемой по обеим переменным. Производная* $\sigma_y(y, \varepsilon)$ *удовлетворяет условию Липшица по* y, ε.

Инвариантный тор $\sigma(y, \varepsilon)$ *системы* (13) *является* ε*-устойчивым, т. е. существуют положительные постоянные* C_1, C_2, α *такие, что для любого решения системы* (13) $x(t, \varepsilon)$, $y(t, \varepsilon)$ *справедливо неравенство*

$$|x(t,\varepsilon)-\sigma(y(t,\varepsilon))| \le C_1 \sup_{-h\le\theta\le 0} |x(\theta,\varepsilon)-\sigma(y(\theta,\varepsilon),\varepsilon)|e^{-\alpha t} + C_2\varepsilon^2$$

для всех $t>0$, *где* $C_2 = C_2(h)$, *причем* $C_2(h)\to 0$ *при* $h\to 0$.

Доказательство. Положим для $\eta\in R^m$, $\varepsilon\in(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$

$$\sigma(\eta,\varepsilon) = x(0,\eta,\varepsilon).$$

Выполнение условий гладкости очевидно. Доказательство того, что σ задает инвариантный тор системы (13), проводится так же, как в [7, 10].

Докажем ε-устойчивость [13] инвариантного тора. При доказательстве используется метод, примененный в [14]. Пусть $X(t)$ — фундаментальное матричное решение уравнения $Lx=0$ [1].

Из условий теоремы следует существование постоянных $a>0$, $M_4>0$ таких, что для всех $t\ge 0$ выполняется неравенство

$$|X(t)| \le M_4 e^{-\alpha t}. \tag{17}$$

Из определения $\sigma(\eta,\varepsilon)$ следует справедливость равенства

$$\sigma(\eta) = \varepsilon\int_{-\infty}^{0} X(-s)F(y(s),y(s-h))\,ds, \tag{18}$$

где $y(s)$ — решение задачи

$$\dot y(s) = \omega + \varepsilon G(y(s),y(s-h)), \quad y(0)=\eta.$$

Здесь использованы обозначения

$$F(y,y^h) = f(\sigma(y),\sigma(y^h),y,y^h), \quad G(y,y^h) = g(\sigma(y),\sigma(y^h),y,y^h).$$

Зависимость σ, F, G от ε для сокращения записи опущена.

Для определенного на $[-h,\infty]$ решения $x(t)$, $y(t)$ уравнения (13) полагаем $\xi(t)=x(t)-\sigma(y(t))$. Пусть $z(s)=z(s,t)$ — решение задачи

$$\dot z(s) = \omega + \varepsilon G(z(s),z(s-h)), \quad x(t)=y(t). \tag{19}$$

Из определения G, F, неравенства (14) и теоремы 8 следует неравенство

$$|R(z_1,z_1') - R(z_2,z_2')| \le 2M_2(|z_1-z_2|+|z_1'-z_2'|), \tag{20}$$

где R принимает значения G, F. Более того, функции G, F являются непрерывно дифференцируемыми. Из теоремы 2 следует существование и единственность решения $z(s,t)$ задачи (19) на промежутке $(-\infty,t)$. Функция $z(s,t)$ является дифференцируемой по t. Найдем оценку функции $|z_t(s,t)|$. Дифференцируя (19) по t, получаем

$$\frac{dz_t(s,t)}{ds} = \varepsilon(G_z z_t(s,t) + G_z z_t(s-h,t)). \tag{21}$$

Из (19) следует справедливость равенства

$$z(s,t) = y(t) + \int_t^s (\omega+\varepsilon G(z(\tau,t),z(\tau-h,t)))\,d\tau. \tag{22}$$

Продифференцируем это равенство по t и положим $s=t$. В результате имеем

$$z_t(t,t) = \varepsilon[(g(x(t),x(t-h),y(t),y(t-h)) -$$

$$- g\,(\sigma(\,y(t)),\, \sigma(\,y(t-h)),\, y(t),\, y(t-h))\,) -$$
$$-\,(g\,(\sigma(\,y(t)),\, \sigma(z(t-h,\,t)),\, y(t),\, z(t-h,\,t)) -$$
$$- g\,(\sigma(\,y(t)),\, \sigma(y(t-h)),\, y(t),\, z(t-h))\,].$$

Нетрудно убедиться, что для всех $t \in R$ справедливо неравенство

$$|\,y(t-h) - z(t-h,\,t)\,| \,\le\, \varepsilon 2\,\|\,g\,\|\,h. \tag{23}$$

Из неравенств (14), (23) и представления $z_t(t,\,t)$ следует неравенство

$$|\,z_t(t,\,t)\,| \,\le\, \varepsilon 2 M_2(\,|\xi(t)| + |\xi(t-h)| + \varepsilon h\|\,g\,\|\,).$$

Из равенства (22) следует равенство

$$z_t(s,\,t) \,=\, z_t(t,\,t) + \int\limits_t^s \varepsilon(\,G_z z_t(\tau,\,t) + G_{z'}\,z_t(\tau-h,\,t))\,d\tau.$$

Согласно лемме 1 справедливо неравенство

$$|\,z_t(s,\,t)\,| \,\le\, e^{\mu(t-s)}\varepsilon(\,2M_2|\xi(t)| + |\xi(t-h)| + \varepsilon\|\,g\,\|h\,), \tag{24}$$

где μ — наименьший положительный корень уравнения $\mu = 2\varepsilon M_2(1 + e^{\mu h})$. Из (18) следует равенство

$$\sigma(\,y(t)) \,=\, \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{t} \mathcal{X}(t-s) F(z(s,\,t),\, z(s-h,\,t))\,ds, \tag{25}$$

где $z(s,\,t)$ — решение задачи (19). Дифференцируя равенство (25) по t, получаем

$$\frac{d}{dt}\sigma(\,y(t)) \,=\, A\sigma(\,y(t)) \,+\, B\sigma(\,y(t-h)) \,+\, \varepsilon F(\,y(t),\, z(t-h,\,t)) \,+\, \varepsilon V(t), \tag{26}$$

где

$$V(t) \,=\, \int\limits_{-\infty}^{t} \mathcal{X}(t-s) F(z(s,\,t),\, z(s-h,\,t))_t\,ds.$$

Из неравенств (17), (20), (24) и определения V следует неравенство

$$|\,V(t)\,| \,\le\, \int\limits_{-\infty}^{t} M_4 e^{-\alpha(t-s)}\, 2M_2\big(\,e^{\mu(t-s)}\,\varepsilon(\,2M_2|\xi(t)| + |\xi(t-h)| + \varepsilon h\|\,g\,\|\,) +$$
$$+\, e^{\mu(t+h-s)}\,\varepsilon(2M_2|\xi(t)| + |\xi(t-h)| + \varepsilon h\|\,g\,\|\,)\,ds \,\le$$
$$\le\, \varepsilon c(\,|\xi(t)| + |\xi(t-h)| + \varepsilon h\|\,g\,\|), \tag{27}$$

где c — постоянная. Используя определение $x(t)$, $\xi(t)$, равенство (26) и дифференцируя равенство $\xi(t) = x(t) - \sigma(\,y(t))$ по t, при $t > 0$ получаем

$$\frac{d\xi(t)}{dt} \,=\, A\xi(t) \,+\, B\xi(t-h) \,+\, \varepsilon[\,(\,f(x(t),\, x(t-h),\, y(t),\, y(t-h)) -$$
$$-\, f(\sigma(\,y(t)),\, \sigma(z(t-h,\,t)),\, y(t),\, z(t-h,\,t)] \,-\, \varepsilon V(t).$$

Следовательно,

$$\xi(t) = \mathcal{X}(t)\xi(0) + \int_{-h}^{0} \mathcal{X}(t-\theta-h)B\xi(\theta)\,d\theta +$$

$$+ \varepsilon\int_{0}^{t} \mathcal{X}(t-s)[(f(x(s), x(s-h), y(s), y(s-h)) -$$

$$- f(\sigma(y(s)), \sigma(z(s-h,s)), y(s), z(s-h,s) - \varepsilon V(s)]\,ds.$$

Из неравенств (17), (20), (23), (27) следует неравенство

$$|\xi(t)| \le M_4\left(e^{-\alpha t}|\xi(0)| + \|B\|h \max_{-h\le\theta\le 0}|\xi(\theta)|e^{-\alpha(t-h)}\right) +$$

$$+ \varepsilon M_4\int_{0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}(|\xi(s)| + |\xi(s-h)|(1+\varepsilon C_3) + \varepsilon C_4\|g\|)\,ds,$$

где C_3, C_4 — постоянные, $C_4 = C_4(h) \to 0$ при $h \to 0$. Из этого неравенства при малых ε следует неравенство [1, с. 27]

$$|\xi(t)| \le C_1 \max_{-h\le\theta\le 0}|\xi(\theta)|e^{-\alpha t/2} + \varepsilon^2 C_2,$$

где C_2 — постоянная, зависящая от h, ε, причем $C_2(h) \to 0$ при $h \to 0$. Таким образом, ε-устойчивость инвариантного тора системы (13) доказана.

4. Периодические и квазипериодические решения дифференциально-разностных уравнений второго порядка. Применим полученные выше результаты для исследования колебаний, характеризуемых дифференциально-разностными уравнениями [15] вида

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = \varepsilon\mathcal{F}(q(t), q(t-h), \dot{q}(t), \dot{q}(t-h)), \tag{28}$$

где $\omega > 0$, $h > 0$, $0 < \varepsilon \ll 1$, а функция $\mathcal{F}$ является гладкой по всем переменным.

В уравнении (28) сделаем замену переменных

$$\begin{aligned} q &= x\cos y, \\ \dot{q} &= -x\omega\sin y. \end{aligned} \tag{29}$$

В результате получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\frac{\varepsilon}{\omega}f(x(t), x(t-h), y(t), y(t-h))\sin y(t), \\ \dot{y}(t) &= \omega - \frac{\varepsilon}{\omega x(t)}f(x(t), x(t-h), y(t), y(t-h))\cos y(t), \end{aligned} \tag{30}$$

где введено обозначение

$$f(x, x', y, y') = \mathcal{F}(x\cos y, x'\cos y', -\omega x\sin y, -\omega x'\sin y').$$

В качестве уравнения первого приближения для системы (30) по переменной x примем уравнение

$$\dot{x}(t) = -\frac{\varepsilon}{\omega}A(x),$$

где

$$A(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x, x, \psi, \psi - \omega h)\sin\psi\,d\psi.$$

Предположим, что функция $\mathcal{F}=(f, g)$ удовлетворяет неравенству (14). Пусть уравнение

$$A(x) = 0$$

имеет положительное решение $x=x_0$, причем выполнено условие $A'(x_0) > 0$. Используя теорему 9, можно показать, что при малых $\varepsilon > 0$ система (30) имеет ε-устойчивый одномерный инвариантный тор

$$\mathcal{M} = \{(x, y): x=x_0+\sigma(y, \varepsilon)\}.$$

Система уравнений (30) на $\mathcal{M}$ принимает вид

$$\dot{y}(t) = \omega + \varepsilon g(y(t), y(t-h), \varepsilon). \tag{31}$$

Представление функции g очевидно и с целью сокращения на приводится.

Из теоремы 5 следует, что уравнение (31) имеет однопараметрическое семейство глобальных решений вида

$$y = (\lambda t+c) + v(\lambda t+c, \varepsilon),$$

где $\lambda=\lambda(\varepsilon)\to 0$, $v(\varphi, \varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$, причем $\lambda(\varepsilon)$, $v(\varphi, \varepsilon)$ — гладкие функции, а $v(\varphi, \varepsilon)$ является 2π-периодической функцией φ. Таким образом, при сформулированных условиях уравнение (28) имеет ε-устойчивое однопараметрическое семейство периодических решений.

Рассмотрим теперь уравнение вида

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = \varepsilon\mathcal{F}(t, q(t), q(t-h), \dot{q}(t), \dot{q}(t-h)). \tag{32}$$

Предположим, что функции $\mathcal{F}(t, x, x', y, y')$ является непрерывной по всем переменным периодической функцией t, $\mathcal{F}\in C^1_{\mathrm{Lip}}$ по x, x', y, y'. Постоянные ω, h, ε удовлетворяют сформулированным выше условиям.

Преобразование (29) приводит уравнение (32) к системе (30), в которой функция f зависит также и от t:

$$f(t, x, x', y, y') = \mathcal{F}(t, x\cos y, x'\cos y', -\omega x\sin y, -\omega x'\sin y')$$

и является 2π-периодической функцией t.

Предположим, что справедливы равенства

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t, x, x, \omega t+\varphi, \omega t-\omega h+\varphi)\sin(\omega t+\varphi)\,dt =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta, x, x, \psi, \psi-\omega h)\sin\psi\,d\psi\,d\theta = A_1(x),$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t, x, x, \omega t+\varphi, \omega t-\omega h+\varphi)\cos(\omega t+\varphi)\,dt =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta, x, x, \psi, \psi-\omega h)\cos\psi\,d\psi\,d\theta.$$

Они выполняются [5], если ω — иррациональное число.

Пусть уравнение

$$A_1(x) = 0$$

имеет положительное решение $x=x_0$. Предположим, что выполнено условие

$A'(x_0) > 0$. Используя теорему 9, можно показать, что система (30) имеет при малых $\varepsilon > 0$ ε-устойчивый инвариантный тор

$$\mathcal{M} = \{(t, x, y)\colon x = x_0 + \sigma(t, y, \varepsilon)\}.$$

Система уравнений (30) на $\mathcal{M}$ принимает вид

$$\dot{y}(t) = \omega + \varepsilon g(t, y(t), y(t-h), \varepsilon), \tag{33}$$

где $g(t, y, y', \varepsilon)$ — непрерывная по всем переменным функция, 2π-периодическая по t, y, y'. Функция $g \in C^1_{\text{Lip}}$ по y, y'.

Предположим, что число вращения уравнения (33) μ иррационально.

Применяя теорему 7, приходим к заключению, что существует такая непрерывная функция $\omega(t, z)$, 2π-периодическая по обеим переменным, что глобальные решения уравнения (33) представимы в форме

$$y(t) = t\mu + c + \omega(t, t\mu + c),$$

где c — постоянная.

Уравнение (32) имеет в этом случае ε-устойчивое однопараметрическое семейство квазипериодических решений.

Если число вращения уравнения (33) рационально, то существуют периодические решения уравнения (28).

Следуя [5] и используя результаты этой статьи, можно исследовать периодические и квазипериодические решения (32) в случае резонанса.

1. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 422 с.
2. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. – М.: Наука, 1973. – 410 с.
3. *Фодчук В. И.* Метод интегральных многообразий в теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. – Киев: Наук. думка, 1977. – С. 232–237.
4. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и почти периодическими коэффициентами. – Киев: Наук. думка, 1984. – 213 с.
5. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Физматгиз, 1963. – 410 с.
6. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.
7. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М.: Мир, 1984. – 376 с.
8. *Коддингтон Э. Л., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во иностр. лит., 1958. – 474 с.
9. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 304 с.
10. *Coppel W. A., Palmer K. J.* Averaging and integral manifolds // Bull. Austral. Math. Soc. – 1970. – P. 197–222.
11. *Белан Е. П., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия и экспоненциальное расщепление параболических уравнений с быстро меняющимися коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 12. – С. 1593–1608.
12. *Белан Е. П., Лыкова О. Б.* Теорема о центральном многообразии квазилинейных параболических уравнений // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 8. – С. 1021–1036.
13. *Анашкин О. В., Хапаев М. М.* Об устойчивости нелинейных систем с малым параметром // Дифференц. уравнения. – 1993. – **29**, № 8. – С. 1300–1307.
14. *Романов А. В.* О размерности центрального многообразия для полулинейных параболических уравнений // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 10. – С. 1356–1362.
15. *Рубаник В. П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. – М.: Наука, 1969. – 287 с.

Одержано 11. 07.96