УДК 517.9

О. Б. Лыкова (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

К ВОПРОСУ О СВОЙСТВАХ ЦЕНТРАЛЬНОГО МНОГООБРАЗИЯ ТОЧКИ ПОКОЯ

We present results concerning the properties of central manifolds of an equilibrium point. The results are illustrated by examples.

Викладено ілюстровані прикладами результати, що стосуються ряду властивостей центральних многовидів точки спокою.

1. Как известно, метод центрального (критического, локального интегрального (инвариантного)) многообразия состоит в том, что для рассматриваемых дифференциальных уравнений при наличии критического спектра у матриц (операторов) в главной линейной части этих уравнений, доказывается существование (а в ряде случаев осуществляется построение) локального интегрального (инвариантного) многообразия, на котором исходная система сводится к системе меньшей размерности (равной кратности критического спектра); бесконечномерная система может сводиться к конечномерной. В этом заключается суть принципа сведения. В теории устойчивости принцип сведения впервые установил А. М. Ляпунов [1] (1898 г.) с помощью приближенных центральных многообразий. Идеи Ляпунова получили развитие в работах его учеников и последователей [2–7]. В общей качественной теории дифференциальных уравнений принцип сведения с помощью интегрального многообразия сформулировал Н. Н. Боголюбов [8] (1945). Исследования по принципу сведения были продолжены в многочисленных работах как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для других классов, в том числе для дифференциальных уравнений в частных производных. Ограничимся указанием на работы [9–15]. Об обобщенном принципе сведения для нелинейных дифференциальных уравнений без выделенной линейной части см. [15], а также [16, 17]. Кроме принципа сведения на основе теории центрального многообразия решено ряд важных задач теории бифуркаций для динамических систем с параметром (см., например, [10, 12, 13]).

В связи с широким применением центрального многообразия в прикладных задачах важно не только доказать существование и построить это многообразие, но и установить его свойства (устойчивости, гладкости, единственности (неединственности) и др.). В данной работе указанные свойства центрального многообразия прослеживаются на примерах конкретных систем дифференциальных уравнений.

2. Рассмотрим в вещественном гильбертовом пространстве H абстрактное дифференциальное уравнение

$$\frac{dz}{dt} = Az + f(z), \tag{1}$$

где $z \in W$, W — открытое множество в H $(0 \in W)$, A — линейный оператор, $f(z)$ — C^r-гладкая функция на W со значениями в H такая, что $f(0)=0$, $Df(0)=0$.

Если $H = \mathbb{B}$, то при некоторых ограничениях на A и при подходящем выборе $f(z)$ уравнение (1) будет представлять собой систему „реакция – диффузия" [13].

Пусть $H = R^n$. Тогда уравнение (1) является системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Приведем ряд определений.

***Определение* 1.** *Некоторое подмножество $S \subset W$ называется инвариантным относительно уравнения (1) множеством, если для каждого решения $z(t, t_0, z_0)$ уравнения (1) $(z(t_0, t_0, z_0) = z_0)$ из соотношения $z_0 \in S$ следует $z(t, t_0, z_0) \in S$ для всех $t \in R$.*

(Определения положительно и отрицательно инвариантных множеств очевидны.)

***Определение* 2.** *Инвариантное множество S называется C^r-инвариантным многообразием, если S имеет структуру C^r-дифференцируемого многообразия.*

***Определение* 3.** *Подмногообразие M в W, содержащее точку покоя, называется локально инвариантным относительно уравнения (1), если для каждого решения $z_t = z(t, t_0, z_0)$ уравнения (1) $(z(t_0, t_0, z_0) = z_0)$ из соотношения $z_0 \in M$ следует $z_t \in M$ в течение некоторого интервала времени $0 \le t \le \tau$, где $\tau(z_0) > 0$.*

В приложениях многообразия часто рассматриваются как m-мерные поверхности, вложенные в R^n. Если поверхность не имеет сингулярных точек, то согласно теореме о неявной функции она может быть локально представлена как график.

Поверхность является C^r-многообразием, если локально представляющие ее графики принадлежат классу C^r.

Соответствующим локальным интегральным многообразием уравнения (1) будет прямое произведение $M \times I$, где I — некоторый интервал вещественной оси R.

Проекцией интегральной кривой уравнения (1) $\Gamma = \{t, z(t)\}$ на фазовое пространство $W \subseteq R^n$ является траектория $T = \{z(t)\}$. Таким образом, локальное интегральное многообразие уравнения (1) составлено из кусков интегральных кривых Γ, а соответствующее локальное инвариантное многообразие уравнения (1) — из кусков соответствующих траекторий. Глобальное интегральное многообразие составлено из целых интегральных кривых.

3. Рассмотрим теперь систему $m + n$ дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = By + g(x, y), \tag{2}$$

где $x \in U \subseteq R^m$, $y \in V \subset R^n$; A, B, — соответственно $(m \times n)$- и $(n \times n)$-мерные матрицы, удовлетворяющие условию $\operatorname{Re}\sigma(A) = 0$, $\operatorname{Re}\sigma(B) \neq 0$.

Полагаем, что вектор-функции f, g дважды непрерывно дифференцируемы. При этом $f(0, 0) = 0$, $Df(0, 0) = 0$; $g(0, 0) = 0$, $Dg(0, 0) = 0$, где Df, Dg — соответствующие якобиевы матрицы.

Обозначим через U некоторое компактное множество из R^m. Рассмотрим C^r $(r \ge 1)$-вектор-функцию $\varphi: U \to R^n$. Тогда $M \equiv \operatorname{graph}\varphi: (x, y) \in R^m \times R^n \mid y = \varphi(x)$ является m-мерной поверхностью в $R^m \times R^n$.

***Определение* 4.** *Под центральным многообразием M точки покоя уравнений (2) будем понимать локальное инвариантное многообразие уравнений (2), представимое в виде*

$$M^C = \{(x, y): x \in R^m,\ y \in R^n \mid y = \varphi(x),\ \|x\| \text{ достаточно мала}\}, \tag{3}$$

где $\varphi(x)$ — гладкая функция, удовлетворяющая условию $\varphi(0) = 0$, $D\varphi(0) = 0$.

Под устойчивым многообразием M^S точки покоя уравнений (2) будем по-

нимать локальное инвариантное многообразие уравнений (2), *представимое в виде*

$$M^S = \{(x, y)\colon x \in R^m,\ y \in R^n \mid x = \psi(y),\ \|y\| \text{ достаточно мала}\}, \tag{4}$$

где $\psi(y)$ — *гладкая функция, удовлетворяющая условию* $\psi(0) = 0$, $D\psi(0) = 0$. *При этом* $\operatorname{Re}\sigma(A) = 0$, $\operatorname{Re}\sigma(B) < 0$.

***Пример* 1.** В качестве примера рассмотрим центральное и устойчивое многообразия линейной системы

$$\frac{dz}{dt} = Cz, \tag{5}$$

где $z \in R^{m+n}$, C — $(m+n)\times(m+n)$-постоянная матрица.

Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ — собственные векторы матрицы C, соответствующие ее нулевым собственным значениям или собственным значениям с нулевой вещественной частью; $\varphi_{m+1}, \ldots, \varphi_n$ — собственные векторы матрицы C, соответствующие собственным значениям с отрицательной вещественной частью.

Тогда пространство R^{m+n} можно представить как сумму подпространств

$$E^m = \operatorname{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}, \qquad E^n = \operatorname{span}\{\varphi_{m+1}, \ldots, \varphi_n\}.$$

Эти подпространства являются примерами линейных инвариантных многообразий, так как очевидно, что решения уравнения (5) с начальными условиями при $t = t_0$, целиком содержащимися в E^m и E^n, останутся в этих подпространствах для всех $t > t_0$. Более того, для любого $x_0 \in E^n$ имеем $x(t) = e^{Ct}x_0 \to 0$ при $t \to \infty$.

В этом смысле многообразие E^n является устойчивым. Таким образом, если представить систему (3) в виде

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x \in R^m; \qquad \frac{dy}{dt} = By, \quad y \in R^n,$$

где $\operatorname{Re}\sigma(A) = 0$, $\operatorname{Re}\sigma(B) < 0$, то для этой системы $y = 0$ является центральным многообразием, а $x = 0$ — устойчивым многообразием.

***Замечание* 1.** Для линейной системы условие $D\varphi(0) = 0$ в определении центрального многообразия означает, что M^C касается линейного центрального многообразия E^m в точке $(x, y) = (0, 0)$.

Сформулируем теорему существования центрального многообразия.

Теорема 1. *Пусть относительно системы* (2) *выполняются условия:*

1) $\operatorname{Re}\sigma(A) = 0$, $\operatorname{Re}\sigma(B) \neq 0$;

2) $f(0,0) = 0$, $Df(0,0) = 0$; $g(0,0) = 0$, $Dg(0,0) = 0$;

3) f, g *являются функциями из класса* C^r.

Тогда система (2) *имеет центральное многообразие* M^C *вида* (3). *При этом функция* $\varphi(x)$ *принадлежит классу* C^r.

Поток на центральном многообразии M^C *для достаточно малых значений* $\|u\|$ *описывается следующим* m*-мерным дифференциальным уравнением:*

$$\frac{du}{dt} = Au + f(u, \varphi(u)). \tag{6}$$

Доказательство этой теоремы основано на введении в рассмотрение некоторой модифицированной, относительно исходной, системы, которая строится с помощью „срезающей" (cut-off) функции [18, 19, 11, 12, 15].

***Замечание* 2.** Так как $\operatorname{Re}\sigma(A)=0$, то за счет выбора базиса матрицы A ее можно представить в виде $A=A_1+A_2$, где A_2 — нильпотентная матрица, а

$$\left|e^{A_1 t}x\right| = |x|. \tag{7}$$

С учетом нильпотентности матрицы A_2 ее базис можно выбрать таким образом, что будет выполняться неравенство

$$|A_2 x| = (\beta/4)|x|, \tag{8}$$

где β — некоторая положительная постоянная.

Свойство устойчивости центрального многообразия формулирует следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть относительно системы* (2) *выполняются условия теоремы* 1, *при этом* $\operatorname{Re}\sigma(B)<0$. *Пусть также* $(x(t), y(t))$ — *решение системы* (2) *с достаточно малыми* $x(0)$, $y(0)$. *Тогда существуют положительные постоянные* C_1 *и* μ *такие, что*

$$|y(t)-\varphi(x(t))| \le C_1\, e^{-\mu t}|y(0)-\varphi(x(0))| \tag{9}$$

для всех $t\ge 0$.

Применение центрального многообразия в теории устойчивости (принцип сведения) сформулировано в следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть относительно системы* (2) *выполняются условия теоремы* 1 *и соотношения* (7), (8). *Тогда нулевое решение системы* (2) *устойчиво, асимптотически устойчиво, неустойчиво, если соответственно устойчиво, асимптотически устойчиво, неустойчиво нулевое решение уравнения* (6).

Пусть нулевое решение уравнения (6) *устойчиво. Тогда если* $(x(t), y(t))$ — *решение системы* (2) *с* $x(0)$, $y(0)$ *достаточно малыми, то существует решение* $u(t)$ *уравнений* (6) *такое, что при* $t\to\infty$

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) + O\left(e^{-\gamma t}\right),\\ y(t) &= \varphi(u(t)) + O\left(e^{-\gamma t}\right), \end{aligned} \tag{10}$$

где $\gamma>0$ — *положительная постоянная, зависящая только от* B.

4. Для приложений важной является задача построения центрального многообразия.

Так как центральное многообразие (3) инвариантно относительно потока, определяемого системой (2), то, исходя из представления M^C: $y=\varphi(x)$, получаем равенство

$$y(t) = \varphi(x(t)). \tag{11}$$

Подставляя (11) во второе уравнение системы (2), получаем квазилинейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$\varphi'(x)[Ax+f(x,\varphi(x))] = B\varphi(x) + g(x,\varphi(x)), \tag{12}$$

которое вместе с условиями $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=0$ используется для определения центрального многообразия точки покоя исходной системы уравнений. Однако задача нахождения решения уравнения (12) по трудности эквивалентна задаче нахождения центрального многообразия системы (2). Поэтому усилия специалистов были направлены на разработку приближенных методов построения функции, аппроксимирующей искомую функцию с наперед заданной точностью (метод степенных рядов [1, 20], метод последовательных приближений [8, 21, 15], метод асимптотических разложений по координатам [15], метод асимптотических разложений по параметру [22, 23] и др.).

Приведем два результата, относящихся к аппроксимации центрального многообразия.

I. Для функции $\psi: R^n \to R^n$, непрерывно дифференцируемой в окрестности нуля, рассмотрим соотношение

$$(M\psi)(x) = \psi'(x)[Ax + f(x, \psi(x)) - B\psi(x) - g(x, \psi(x))]. \tag{13}$$

Согласно (12) $(M\varphi)(x) = 0$.

Теорема 4. *Пусть непрерывно дифференцируемая функция* ψ *отображает окрестность нуля из* R^n *в* R^n *и при этом* $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 0$. *Пусть также* $(M\psi)(x) = O(|x|^q)$ *при* $x \to 0$, *где* $q > 0$. *Тогда* $|\varphi(x) - \psi(x)| = O(|x|^q)$ *при* $x \to 0$.

***Пример* 2.** Рассмотрим систему [12]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon x - x^3 + xy, \\ \dot{y} &= -y + y^2 - x^2, \quad (x, y) \in R^2, \end{aligned} \tag{14}$$

где ε — малый вещественный параметр. Матрица линейного приближения системы (14) имеет собственные значения $\lambda_1 = \varepsilon$, $\lambda_2 = -1$, что не позволяет для исследования поведения траекторий этой системы применить теорию центрального многообразия. Однако, поскольку система зависит от параметра ε, то для того чтобы при ее исследовании можно было воспользоваться упомянутой теорией, вместо системы (14) рассматривают так называемую надстроенную систему в R^3, добавив уравнение $\dot{\varepsilon} = 0$ и приняв тем самым ε за новую переменную:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon x - x^3 + xy, \\ \dot{\varepsilon} &= 0, \\ \dot{y} &= -y + y^2 - x^2, \end{aligned} \tag{15}$$

Тогда в первом уравнении системы (15) член εx нелинейный и матрица линейного приближения системы (15) имеет собственные значения $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -1$. Следовательно, к системе (15) можно применить теорию центрального многообразия.

Согласно теореме 1 система (15) имеет двумерное центральное многообразие

$$M^C = \{(x, \varepsilon, y) \colon y = \varphi(x, \varepsilon), |x| < \delta_1, |x| < \delta_2\},$$

где постоянные δ_1, δ_2 достаточно малы.

Будем искать функцию $\Phi(x, \varepsilon)$, задающую приближенное центральное многообразие системы (15), как решение уравнения

$$(M\Phi)(x, \varepsilon) = \Phi'_x(x, \varepsilon)[\varepsilon x - x^3 + x\Phi(x, \varepsilon)] + \Phi(x, \varepsilon) + x^2 + \Phi^2(x, \varepsilon) = 0. \tag{16}$$

Для нахождения $\Phi(x, \varepsilon)$ из уравнения (16) применим метод неопределенных коэффициентов. Если $\Phi = -x^2$, то $(M\Phi)(x, \varepsilon) = O(P(x, \varepsilon))$, где P — однородный кубический полином относительно x и ε. По теореме 4 имеем $\varphi(x, \varepsilon) = -x^2 + O(P(x, \varepsilon))$, при этом $\varphi(0, 0) = 0$. Уравнения, описывающие поток на приближенном центральном многообразии, имеют вид

$$\frac{du}{dt} = \varepsilon u - 2u^3 + O(|u|, P(u, \varepsilon)),$$
$$\frac{d\varepsilon}{dt} = 0. \tag{17}$$

Легко видеть, что положение равновесия $(x, \varepsilon) = (0, 0)$ системы (17) устойчиво. Поэтому по теореме 3 имеет место представление типа (10). Принимая во внимание, что $|x| < \delta_1$, $|\varepsilon| < \delta_2$, приходим к заключению, что нулевое решение $u = 0$ первого уравнения системы (17) асимптотически устойчиво при $-\delta_2 < \varepsilon < 0$. Тогда по теореме 3 для этих значений ε нулевое решение исходной системы также асимптотически устойчиво. При $0 < \varepsilon < \delta_2$ приходим к задаче теории бифуркаций, которую мы здесь не исследуем.

II. Если задача об устойчивости нулевого решения в критическом случае решается с помощью приближенного центрального многообразия, т. е. вне зависимости от членов порядка выше некоторого p, то такой критический случай называется неособым (или алгебраическим). Остальные критические случаи называются особыми (или трансцендентными).

Теорема 5. *Пусть для системы* (2) *выполняются условия, обеспечивающие существование центрального многообразия* M^C: $y = \varphi(x)$ *и приближенного центрального многообразия* $M^C_{\text{пр.}}$: $y = \Phi(x)$ *с невязкой*

$$b(x) = R_k\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x} f(x, \Phi) - g(x, \Phi)\right], \qquad R_k[h] = h(x) - \sum_{i=2}^{k} h_i(x)$$

($h_i(x)$ — *форма* i-*й степени в разложении функции* $h(x)$). *Тогда оценка погрешности построенного приближенного центрального многообразия определяется неравенством*

$$\|\varphi(x) - \Phi(x)\| \le (1-q)^{-1}\gamma_0 \sup_x \|b\|, \tag{18}$$

где постоянная $q < 1$ *определяется через заданные константы, характеризующие свойства правых частей исходной системы, постоянная* γ_0 *также задана.*

Теорема 6. *Пусть для системы* (2) *выполняются условия теоремы* 5, *а невязка приближенного центрального многообразия* $M^C_{\text{пр.}}$ *имеет порядок выше* p. *Тогда нулевое решение системы* (2) *устойчиво, асимптотически устойчиво, неустойчиво, если соответственно устойчиво, асимптотически устойчиво, неустойчиво нулевое решение уравнения на* $M^C_{\text{пр.}}$ *вне зависимости от членов порядка выше* p.

Многочисленные примеры, иллюстрирующие теоремы 5, 6, см. в [15].

5. Теорема 1 утверждает, что если правая часть системы (2) принадлежит классу C^r, то вектор-функция $\varphi(x)$, задающая центральное многообразие этой системы, также принадлежит классу C^r.

***Замечание* 3.** Это утверждение касается обыкновенных дифференциальных уравнений. Эволюционное уравнение (1) с C^r-гладкой правой частью имеет C^{r-1}-гладкое центральное многообразие.

Если рассматриваемое уравнение принадлежит классу C^∞, то C^∞-центрального многообразия оно может не иметь [24]. Например, C^∞-система

$$\dot{x} = -x^2 + \mu^2, \quad \dot{y} = -y - (x^2 - \mu^2), \quad \dot{\mu} = 0$$

не имеет C^∞-центрального многообразия.

Если система аналитическая, то аналитического центрального многообразия точки покоя она может не иметь.

***Пример* 3.** Аналитическая система [13]

$$\dot{x} = -x^2, \quad \dot{y} = -y + x^2$$

не имеет аналитического центрального многообразия. Если бы она имела такое многообразие, то оно должно было бы задаваться рядом

$$y = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)!x^n,$$

который, однако, расходится.

***Замечание* 4.** Аналитические центральные многообразия играют важную роль в изучении периодических решений в окрестности сингулярной точки.

6. Рассмотрение свойства единственности (неединственности) центрального многообразия начнем с рассмотрения следующего примера.

***Пример* 4.** Рассмотрим систему

$$\dot{x} = x^2, \quad \dot{y} = -y, \quad (x, y) \in R^2. \tag{19}$$

Здесь $(x, y) = (0, 0)$ — точка покоя с устойчивым многообразием M^S: $x = 0$ и центральным многообразием M^C: $y = 0$. Покажем, что система (19) имеет также другие центральные многообразия.

Исключая из (18) t, получаем уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x^2},$$

решением которого (при $x \neq 0$) является функция $y(x) = \alpha e^{1/x}$, где α — произвольная вещественная постоянная.

Таким образом, кривые, которые задаются соотношением

$$M_\alpha^C = \{(x, y) \in R^2 \mid y = \alpha e^{1/x},\ x < 0,\ y = 0;\ x \geq 0\},$$

образуют однопараметрическое (по α) семейство центральных многообразий (точки $(0, 0)$).

Как следует из этого примера, устойчивые многообразия фиксированных точек покоя единственные, а центральные многообразия могут быть неединственными.

***Пример* 5.** Для системы

$$\dot{u} = -v - u(u^2 + v^2), \quad \dot{v} = u - v(u^2 + v^2), \quad \dot{w} = -2w,$$

рассмотренной в [9], многообразие

$$M_\alpha^C = \{(u, v, w) : w = \alpha e^{1/(u^2 + v^2)}\}$$

при любом постоянном α является центральным многообразием исходной системы.

***Пример* 6.** Система

$$\dot{x} = -x^3, \quad \dot{y} = -y$$

имеет двупараметрическое семейство центральных многообразий [12]

$$M_{c_1, c_2}^{\mathcal{C}} : \begin{cases} c_1 \exp\left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right), & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ c_2 \exp\left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right), & x < 0. \end{cases}$$

7. Если φ_1 и φ_2 задают два центральных многообразия для системы (2), то по теореме 3 $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = O\left(|x|^q\right)$ при $x \to 0$ для всех $q > 1$. Отсюда следует, что многообразия, задаваемые функциями $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, касаются в точке $x = 0$. Из [25] следует более тонкий результат, а именно: разность между двумя центральными многообразиями $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ имеет порядок малости $\exp(-Cx^{-1})$ при условии, что алгебраическая и геометрическая кратности критических собственных значений равны. Если эти кратности не равны, то разность имеет порядок малости $\exp\left(-C / \|x\|^{1/(2p+1)}\right)$, где $2p + 1$ — размер наибольшего жорданового блока, относящегося к критическому собственному значению.

Этим объясняется тот факт, что ряды Тейлора любых двух центральных многообразий совпадают, что, в свою очередь, разрешает проблему обоснования аппроксимации неединственного центрального многообразия.

Для приложений важным является свойство центральных многообразий, заключающееся в том, что две различные системы, имеющие центральные многообразия, на которых потоки „эквивалентны" (в определенном смысле), имеют „эквивалентные" потоки во всей окрестности нуля.

8. В заключение сделаем замечание о доказательстве существования неединственного центрального многообразия.

Для доказательства существования центральных многообразий нелинейных систем дифференциальных уравнений применяется принцип сжимающих отображений, что налагает определенные ограничения на исходную систему в области ее определения. В тех случаях, когда эти ограничения для нелинейных функций в правой части системы не выполняются для всех $x \in U \subseteq R^m$, в рассмотрение вводится некоторая срезающая функция $\chi(x) \in C^\infty$, обращающаяся в нуль вне некоторой окрестности нуля $U_r \subset U$ достаточно малого радиуса $r > 0$. С помощью этой функции строится соответствующая исходной модифицированная система, удовлетворяющая условиям принципа сжимающих отображений для всех x. Для модифицированной системы доказывается существование единственного глобального центрального многообразия, сужение которого на U_r является (локальным) центральным многообразием исходной системы. Для каждого центрального многообразия можно выбрать срезающую функцию таким образом, что соответствующая модифицированная система будет иметь единственное глобальное центральное многообразие.

В [26] рассмотрены конкретные примеры, иллюстрирующие влияние модификации исходной системы на свойство единственности (неединственности) центрального многообразия.

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. – М.: Гостехиздат, 1950. – 471 с.
2. *Каменков Г. В.* Избранные труды: В 2-х т. Устойчивость и колебания нелинейных систем. – М.: Наука, 1972. – Т. 2. – 214 с.
3. *Малкин И. Г.* Некоторые основные теоремы теории устойчивости движения в критических случаях // Прикл. математика и механика. – 1942. – Вып. 6. – С. 634–648.
4. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
5. *Постников В. И.* К теории устойчивости движения в критических случаях: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – М., 1942. – 150 с.