УДК 517.946.9

**Ю. О. Митропольський, А. А. Березовський** (Ін-т математики НАН України, Київ)

# ЗАДАЧІ З ВІЛЬНИМИ МЕЖАМИ ТА НЕЛОКАЛЬНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

We present statements of problems with free boundaries and nonlocal problems for nonlinear parabolic equations arising in metallurgy, medicine, and ecology. We consider some constructive methods for their solution.

Наведено постановки задач з вільними межами та нелокальних задач для нелінійних параболічних рівнянь, що виникають у проблемах металургії, медицини та екології, і розглянуто деякі конструктивні методи їх розв'язання.

**1. Стаціонарні задачі з вільними межами.** Такі задачі, як відомо, полягають у одночасному знаходженні як розв'язку певних диференціальних рівнянь з частинними похідними, так і деяких невідомих поверхонь (вільних меж), $\Phi^*$ або $\Gamma$, що знаходяться всередині або обмежують область $\Omega$ визначення шуканих функцій. Найпростішою з таких задач є задача Діріхле [1] для оператора Лапласа $\Delta$, коли в деякій області $\Omega$, обмеженій відомою поверхнею $S$ та невідомою — $\Gamma$, необхідно визначити такі $u$ і $\Gamma$, що

$$\Delta u = -f \quad \text{в} \quad \Omega; \qquad u = \varphi \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \qquad \nabla_n(u-\varphi) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{1}$$

де $f, \varphi$ — задані функції в усьому просторі $R^n$, $n = 1, 2, 3$; $\nabla_n$ — похідна за зовнішньою нормаллю. Принциповим для таких задач є задання двох граничних умов на невідомій поверхні $\Gamma$, що робить їх цілком визначеними.

Задачі з вільними межами суттєво нелінійні головним чином через необхідність визначення поверхні $\Gamma$, а отже, й носія розв'язку. У цьому переконуємося, розглядаючи відповідну одновимірну $(n = 1)$ задачу

$$u'' = -f(x), \quad x \in (0, b); \qquad u(0) = 1, \quad u(b) = 0, \quad u'(b) = 0, \tag{2}$$

в якій вільною межею є точка $b$. Остання може мати декілька точних розв'язків

$$u = \int_x^b (x-\xi) f(\xi)\, d\xi \tag{3}$$

в залежності від кількості коренів $b$ рівняння

$$\int_0^b f(\xi)\xi\, d\xi - 1 = 0.$$

У проблемах стаціонарної фільтрації через двовимірну перегородку виникає наступна задача з вільною межею $\Gamma = \{(x, y)\colon\ y = \psi(x),\ 0 < x < a\}$:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0, \quad x, y \in \Omega = \{(x, y)\colon 0 < x < a,\ 0 < y < \psi(x)\}, \tag{4}$$

$$p(0, y) = H - y, \quad 0 < y < H;$$

$$p(a, y) = \begin{cases} H - y, & 0 < y < h; \\ 0, & h < y < \psi(a); \end{cases}$$

$$p_y(x, 0) = -1, \quad 0 < x < a;$$

$$p(x, \psi(x)) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial n}(p + \psi(x)) = 0, \quad y = \psi(x), \quad 0 < x < a, \tag{5}$$

де $p(x, y)$ — шукана функція тиску; $H, h$ — рівні рідини; $a$ — ширина перегородки; $y = \psi(x)$ — рівняння вільної межі; $\frac{\partial}{\partial n}$ — похідна за зовнішньою нормаллю.

У наведених постановках шукана функція $u$ задовольняє лінійні рівняння. У випадку двофазних стаціонарних задач Стефана маємо квазілінійне рівняння

$$\operatorname{div}(\lambda(u) \operatorname{grad} u) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \tag{6}$$

та одну нелінійну з трьох додаткових умов [2]

$$u|_{\Phi^*} = u^*, \quad [u]_{\Phi^*} = 0, \quad [(\lambda(u) \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} \Phi^*)]_{\Phi^*} = 0, \tag{7}$$

на вільній межі $\Phi^* = \{(x, y, z);\ \Phi^*(x, y, z) = 0\}$, що є ізотермічною поверхнею $u = u^*$ та розділяє область $\Omega$ на дві підобласті $\Omega_1$ і $\Omega_2$. Тут $\lambda(u)$ — деяка функція, що має розрив першого роду в точці $u = u^*$; $u^*$ — температура фазового переходу; $\Phi(x, y, z) = 0$ — вільна межа; $[\cdot]_\Phi$ — стрибок виразу, що стоїть у квадратних дужках при переході через поверхню $\Phi$. Крім рівняння (6) та умов спряження (7) $u(x, y, z)$ повинна задовольняти в загальному випадку нелінійну крайову умову

$$(\lambda(u) \operatorname{grad} u, \vec{n}) = -q(u) \quad \text{на} \quad \partial\Omega,$$

де $q(u)$ — задана функція. Перетворенням Кіркгофа $\operatorname{grad} \psi = \lambda(u) \operatorname{grad} u$, $d\psi = \lambda(u)\,du$ [3] рівняння (6), (7) зводяться до лінійних: $\Delta\psi = 0$ в $\Omega$, $\psi|_{\Phi^*} = [u]_{\Phi^*} = 0$, $[\operatorname{grad} \psi, \operatorname{grad} \Phi^*]_{\Phi^*} = 0$, але гранична умова на $\partial\Omega$ залишається нелінійною: $\nabla_n \psi = -q[u(\psi)]$.

У проблемах медицини та екології виникають задачі з вільними межами для нелінійного рівняння [4]

$$\operatorname{div}(\lambda(u) \operatorname{grad} u) = f(u) \quad \text{в} \quad \Omega \equiv \{u < c\}.$$

Вільні межі можуть як обмежувати область $\Omega$, так і ділити її на підобласті. Для їх визначення в першому випадку задаються умови типу (1) на зовнішній вільній поверхні $\Gamma$ та умови типу умов спряження Стефана (7) на внутрішній вільній поверхні $\Phi^*$. Що стосується функції $f(u)$, то вона повинна задовольняти умови [5, 6]

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = -\infty, \quad \int\limits_0^{\overline{u}} \left( \int\limits_0^u f(v)\,dv \right)^{-1/2} \lambda(u)\,du < \infty. \tag{8}$$

Найчастіше вживаною є степенева функція $f(u) = u^\beta$, $0 \le \beta < 1$, та її гранична при $\beta \to 0$ функція Хевісайда $f(u) = \eta(u)$.

У випадку осесиметричного обертання вагомої рідини вільна межа $\Gamma$, яка відокремлює рідину від вакууму, з'являється як множина нулів $(\{u = 0\})$ розв'язку нелінійного рівняння

$$\Delta u + c u^\beta = f \quad \text{в} \quad \Omega \equiv \{u > 0\}, \tag{9}$$

де $u$ — функція, що залежить від густини рідини $\rho$; $\Gamma \equiv \partial\Omega = \{u = 0\} = \partial\{\rho > 0\}$; $c > 0$, $\beta > 0$ — деякі сталі. Для задачі про рівновагу газового шару з політропічного газу вільною межею $\Gamma \in \partial\{u>0\}$, де $u$ — густина, що задовольняє нелінійне рівняння Емдена–Фаулера [7] $-\Delta u + u^{\beta} = 0$ в $\Omega \equiv \{u>0\}$.

Нарешті, в проблемах охорони навколишнього середовища, крім двох умов типу (1), вільна межа з'являється і в нелокальній умові [8, 9]

$$\iiint\limits_{\Omega} f(c)\,dv + \alpha \iint\limits_{\partial\Omega\setminus\Gamma} c\,ds = Q, \tag{10}$$

де концентрація забруднення $c(x, y, z)$ та вільна межа $\Gamma \equiv \{c>0\}$ визначаються як розв'язок однофазної стаціонарної задачі типу Стефана

$$\begin{gathered}\operatorname{div}\big(\mathbf{K}(c)\operatorname{grad} c\big) - f(c) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega\setminus\Sigma x_i;\\ \big(\mathbf{K}(c)\operatorname{grad} c,\, \bar{n}\big) - \alpha c = 0 \quad \text{на} \quad S,\\ c = \big(\mathbf{K}(c)\operatorname{grad} c,\, \bar{n}\big) - \alpha c = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma,\end{gathered} \tag{11}$$

де $\mathbf{K}(c)$ — тензор турбулентної дифузії; $f(c)$ — задана функція, яка характеризує асиміляційні властивості середовища і в околі нуля має асимптотику $f(c) = o(c^{\beta})$, $0 \le \beta \le 1$; $x_i = \{x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}\}$ — координати джерел забруднення інтенсивності $Q_i$, $Q = \Sigma Q_i$; $\Omega \equiv \{c>0\}$ — область, обмежена відомою поверхнею $S$ та невідомою $\Gamma - \partial\Omega = S \cup \Gamma$. Слід зазначити, що нелокальність в (9) виникає як умова в особливих точках $x_i$, $i = \overline{0, n}$, в яких значення концентрації $c$ не є обмеженим.

Математичне моделювання дифузійних процесів, розчинених у стратифікованих водних середовищах органічних та неорганічних речовин, що супроводжуються хімічними реакціями та адсорбцією, призводить до більш складних задач з вільними межами вже для систем нелінійних диференціальних рівнянь. Так, визначення концентрації кисню $u(x)$ та сірководню $v(x)$, $x \in \mathbf{R}^3$, в стратифікованій воді Чорного моря потребує розв'язання наступної задачі з двома вільними межами [10, 11]:

$$\begin{gathered}\operatorname{div}(\mathbf{K}\operatorname{grad} u) = -w_k \quad \text{в} \quad \Omega_k,\\ \left\{\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbf{K}\operatorname{grad} u) &= f_k(u, v),\\ \operatorname{div}(\mathbf{K}\operatorname{grad} v) &= f_s(u, v),\end{aligned}\right. \quad \text{в} \quad \Omega_{ks},\\ \operatorname{div}(\mathbf{K}\operatorname{grad} v) = -w_s \quad \text{в} \quad \Omega_s;\end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered}(\mathbf{K}\operatorname{grad} u,\, \bar{n}) + \alpha_k(u - u_c) = 0 \quad \text{на} \quad \partial(\Omega_k \cup \Omega_{ks}),\\ (\mathbf{K}\operatorname{grad} v,\, \bar{n}) + \alpha_s(v - v_c) = 0 \quad \text{на} \quad \partial(\Omega_{ks} \cup \Omega_s);\end{gathered} \tag{13}$$

$$\begin{gathered}v|_{\Phi^*} = [u]_{\Phi^*} = [(\mathbf{K}\operatorname{grad} v, \operatorname{grad}\Phi^*)]_{\Phi^*} = [(\mathbf{K}\operatorname{grad} u, \operatorname{grad}\Phi^*)]_{\Phi^*} = 0,\\ u|_{\Phi^{**}} = [v]_{\Phi^{**}} = [(\mathbf{K}\operatorname{grad} u, \operatorname{grad}\Phi^{**})]_{\Phi^{**}} = [(\mathbf{K}\operatorname{grad} v, \operatorname{grad}\Phi^{**})]_{\Phi^{**}} = 0,\end{gathered} \tag{14}$$

де $w_k$, $w_s$ і $f_k(u, v)$, $f_s(u, v)$ — потужності джерел і стоків відповідно кисню та сірководню; $\alpha_k$, $\alpha_s$ і $u_c$, $v_c$ — відомі функції точки $x \in \partial\Omega$, $\Omega = \Omega_k \cup \Omega_{ks} \cup \Omega_s$; $\Omega_k$ та $\Omega_s$ — обмежені аеробна та анаеробна зони Чорного моря, в першій з яких відсутній сірководень, а в другій — кисень; $\Omega_{ks}$ — обмежена зона співіснування кисню та сірководню, де й відбувається реакція окислення сірководню. У цій задачі, крім концентрацій $u, v$, потрібно визначати також невідомі поверхні (вільні межі) $\Phi^* \equiv \partial\{v=0\}$, $\Phi^{**} \equiv \partial\{u=0\}$, які обмежують зону співіснування $\Omega_{ks}$.

При якісному дослідженні задач з вільними межами намагаються змінити їх формулювання таким чином, щоб у їхній постановці була відсутня вільна межа. Такі постановки отримуються за допомогою варіаційних принципів, що дозволяє встановити існування розв'язку задачі з вільними межами у відповідній варіаційній постановці [1]. Питанням регулярності розв'язку та гладкості вільної межі присвячено багато робіт. На відміну від них ми будемо розглядати головним чином конструктивні методи побудови шуканих функцій та вільних меж.

**2. Нестаціонарні задачі з вільними межами.** На відміну від розглянутих вище, нестаціонарні задачі описують еволюцію розв'язків у часі. Їх постановка, як правило, відрізняється від стаціонарних наявністю похідної за часом від шуканої функції та вільної межі. У проблемах металургії, медицини та екології вони зводяться до наступних задач з вільними межами для слабконелінійного параболічного рівняння [4, 12–15]:

$$\Delta u - k(u)u_t = f(u) \ \text{ в } \ \Omega(t) \equiv [u < c = \text{const}\}, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \psi \ \text{ в } \ \Omega(0),$$

$$\nabla_n u + \alpha(u)(u - \varphi) = 0 \ \text{ на } \ S(t) \equiv \partial\Omega(t) \cap \partial D, \quad t > 0, \tag{15}$$

$$[u] = 0, \quad u = u^*,$$

$$[\nabla u, \nabla\Phi^*] = p\,\Phi_t^* \ \text{ на } \ \Phi^*(t) \equiv \Omega_1(t) \cap \Omega_2(t), \quad t > 0,$$

$$u = c, \quad \nabla u = 0 \ \text{ на } \ \Gamma(t) \equiv \partial\Omega(t) \cap D, \quad t > 0,$$

де $\Omega(t)$ — область, обмежена заданою і невідомою поверхнями $S(t)$ і $\Gamma(t)$ відповідно; $k(u)$ і $\alpha(u)$ — задані функції, які мають розрив першого роду в точці $u(t) = u^* = \text{const}$; $f(u)$ — задана функція, котра задовольняє умови $f(c) = 0$, $f'(c) = -\infty$ і може мати розрив першого роду в точці $u = c$; $\psi(x)$ і $\varphi(x, t) < 0$ — задані функції в $\Omega(0)$ і на $S(t)$; $\Phi^*(x, t) = 0$ — внутрішня вільна поверхня, що виникає як поверхня рівня $u(x, t) = u^*$; $\Gamma(t)$ або $\Phi(t)$ — поверхня $u(x, t) - c = 0$; $p$ — задана стала.

За змістом відповідних фізичних явищ еволюція відбувається в обмеженій області $\Omega(t) \subset D \subset \mathbf{R}^3$, яка змінюється у часі зі скінченною швидкістю. За межами $\Omega(t)$ $u(x, t) = c$, і тому продовжений за неперервністю в $D$ розв'язок $u = u(x, t)$ має характер хвилі, фронт якої $\Gamma(t)$ розповсюджується по постійному незбуреному фону зі скінченною швидкістю. Наявна просторова локалізація. Існування в загальному випадку узагальнених розв'язків хвильового типу накладає певні обмеження на характер поведінки функції $f(u)$ поблизу $u = c$, з яких вкажемо на умови

$$f(c) = 0, \quad f'(c) = -\infty, \quad \int_b^c \left( \int_u^c f(u)\,du \right)^{-1/2} du < \infty. \tag{16}$$

Нарешті, як правило, область $\Omega(t)$ при $t = 0$ вироджується і зникають початкові умови в задачі (15).

Поверхні $\Phi^*(x, t)$ та $\Gamma(t)$ не будуть зв'язними тільки при монотонній зміні $\psi(x)$ в $\Omega(0)$ і $\varphi(x, t)$ на $S(t)$ (як відносно $x$, так і відносно $t$), якщо до того ж $\psi(x) > \varphi(x, t)$ на $S(t)$. Виконання цих умов приводить до упорядкованого розшарування області $\Omega(t)$ поверхнями рівня $u(x, t) = \text{const}$. Такі поверхні рівня будемо записувати у вигляді [12, 15]

$$z = z(x, y, u, t), \tag{17}$$

де $x$, $y$, $z$ — декартові координати.

Формули диференціювання обернених функцій

$$u_x = -z_x / z_u, \quad u_x = -z_y / z_u, \quad u_z = 1 / z_u, \quad u_t = -z_t / z_u,$$

$$u_{xx} = -(1/z_u)[z_{xx} - (z_x^2 / z_u)_u],$$

$$u_{yy} = -1/z_u[z_{yy} - (z_u^2 / z_u)_u],$$

$$u_{zz} = (1/z_u)(1/z_u)_u$$

дозволяють перефразувати задачу з вільними межами (15) для $z$ [6, 9] і записати її у вигляді

$$\begin{gathered} Az - k(u)z_t = f(u) \quad \text{в} \quad \Omega_u(t), \quad u \neq u^*, \quad t > 0, \\ z(x, y, u, 0) = z_0(x, y, u) \quad \text{в} \quad \Omega_u(0), \\ \tilde{\nabla} z / z_u + \alpha(u)(u - \varphi) = 0, \quad u = \underline{u}(x, y, t), \quad t > 0, \\ [z] = 0, \quad [|\tilde{\nabla} z|^2 / z_u] = -p z_t, \quad u = u^*, \quad t > 0, \\ 1/z_u = 0, \quad u = c, \quad t > 0, \\ z = z_s(x, y, t), \quad u = \underline{u}(x, y, t), \quad t > 0, \end{gathered} \tag{18}$$

де

$$Az = \Delta_\tau z - (|\tilde{\nabla} z|^2 / z_u)_u, \quad \Delta_\tau z = z_{xx} + z_{yy}, \quad \tilde{\nabla} z = \{-z_x, -z_y, 1\};$$

$\Omega_u(t)$ — область визначення незалежних змінних $x$, $y$, $u$, обмежена апріорі невідомою поверхнею $\Gamma_u(t)$, яка задається в несиметричній формі $\underline{u} = u(x, y, t)$, і площиною $u = c$; $z_s(x, y, t)$ — функція, яка задає поверхню $S(t) \equiv \{x, y \in D(t), z - z_s(x, y, t) = 0\}$; $z_0(x, y, u)$ визначається з рівняння [4, 14]

$$\psi(x, y, z_0) - u = 0. \tag{19}$$

Складність дослідження початково-крайової задачі (18) полягає як у нелінійності оператора $A$, крайових умов і умов спряження на площині $u = u^*$, так і в необхідності визначати вільну межу $\Gamma_u(t)$: $u - \underline{u}(x, y, t) = 0$. Якщо в задачі (15) вільна поверхня $\Phi^*(t)$ визначається за допомогою додаткової умови $u(x, t) = u^*$, то в задачі (18) вона визначається за розв'язком $\Phi^*(t) \equiv \{z = z(x, y, u^*, t), x, y \in D_u(t)\}$. У випадку, коли на $S(t)$ задана умова Діріхле ($u = \varphi$ на $S(t)$), стає відомою і границя $\Gamma_u(t) \equiv \{u = \underline{u}(x, y, t) = u - \varphi(x, y, t) = 0, x, y \in D_u(t)\}$. Для поверхні рівня $z = z(x, y, u, t)$ при цьому одержуємо нелінійну початково-крайову задачу на спряження в відомій області $\Omega_u(t) \equiv \{x, y \in D_u(t), \varphi(x, y, t) \ll u < c\}$.

Зазначимо, що в фізичних застосуваннях необхідність переходу до постановок задач з вільними межами для поверхонь рівня обумовлюється сутністю явищ.

Вкажемо на деякі властивості нелінійного оператора $A$. Для цього запишемо його в декартовій системі координат

$$Az = z_{xx} + z_{yy} + \frac{1 + z_x^2 + z_y^2}{z_u^2} z_{uu} - 2\frac{z_x}{z_u} z_{xu} - 2\frac{z_x}{z_u} z_{yu}. \tag{20}$$

Відповідна оператору (20) квадратична форма має вигляд

$$\xi^2+\eta^2+\gamma\zeta^2-2\alpha\xi\zeta-2\beta\gamma\zeta, \tag{21}$$

де

$$\alpha = z_x/z_u, \quad \beta = z_y/z_u, \quad \gamma = (1+z_x^2+z_y^2)/z_u^2.$$

Використовуючи нерівність Юнга $2\beta\gamma\zeta \le \eta^2+\beta^2$, покажемо, що квадратична форма (21) додатна. Дійсно, внаслідок згаданої нерівності

$$\xi^2+\eta^2+\gamma\zeta^2-2\alpha\xi\zeta-2\beta\gamma\zeta > \zeta^2(\gamma-\alpha^2-\beta^2) = \zeta^2/z_u,$$

що і вказує на додатність квадратичної форми (21). Отже, нелінійний оператор $A$, як і породжуючий його оператор Лапласа, є еліптичним і для нього правомірні постановки крайових задач.

Оператор $A$ має дивергентний вигляд, що дозволяє встановити для нього аналог першої формули Гріна

$$\iint\limits_D dx\,dy \int vAz\,du = \int\limits_d^c du \oint\limits_{\partial D_u} (\tilde\nabla_\tau z, \bar n)\,dl - \iint dx\,dy \int\limits_{\underline{u}}^c [(\tilde\nabla_\tau v, \tilde\nabla_\tau z) -$$

$$- (|\tilde\nabla z|^2/z_u)v_u]\,du - \iint\limits_D (v|\tilde\nabla z|^2/z_u)\Big|_u^c\,dx\,dy, \tag{22}$$

де $D$ і $D_u$ — перетин області $\Omega_u(t)$ площиною $u=c$ і довільною площиною відповідно, $D_u \subset D$; $d = \min\limits_{x,y} u(x,y,t)$; $\bar n$ — орт зовнішньої нормалі до замкненого контура $\partial\Omega_u$, який обмежує $D_u$; $v(x,y,u,t)$ і $z(x,y,u,t)$ — довільні двічі неперервно диференційовні функції.

У випадку, коли на поверхні $S$ задано умову Діріхле, можна довести монотонність оператора $A$ на функціях, які задовольняють цю умову та однорідні умови на вільній поверхні Г. Дійсно, покладемо в (22) $v=z_1-z_2$ і $z=z_1$, а потім $z=z_2$. Тоді одержимо дві рівності, після простих перетворень яких будемо мати

$$\iint\limits_D dx\,dy \int\limits_{\underline{u}}^c (Az_1-Az_2)(z_1-z_2)\,du = \int\limits_d^c du \oint\limits_{\partial D_u} (z_1-z_2)\frac{\partial(z_1-z_2)}{\partial n}\,dl -$$

$$- \iint\limits_D dx\,dy \int\limits_u^c [|\tilde\nabla z_1|^2(z_{2u}/z_{1u}) + |\tilde\nabla z_2|^2(z_{1u}/z_{2u}) - 2|\tilde\nabla z_1, \tilde\nabla z_2|]\,du -$$

$$- \iint\limits_D [|\tilde\nabla z_1|^2/z_{1u} - |\tilde\nabla z_2|^2/z_{2u}](z_1-z_2)\Big|_{\underline{u}}^c\,dx\,dy. \tag{23}$$

Нехай $z_1 = z_1(x,y,u,t)$ і $z_2 = z_2(x,y,u,t)$ — два різні розв'язки задачі (18). Для таких розв'язків справедливі рівності

$$z_1-z_2 = 0, \quad u = \underline{u}, \quad u = c,$$

$$\frac{\partial(z_1-z_2)}{\partial n} = \alpha(u)(u-\varphi)\frac{\partial(z_1-z_2)}{\partial n}, \quad u = \underline{u},$$

що випливають з крайових умов задачі (18), з урахуванням яких формула (23) спрощується до вигляду

$$\iint\limits_D dx\,dy \int\limits_{\underline{u}}^c (Az_1-Az_2)(z_1-z_2)\,du =$$

$$= \int\limits_{\underline{u}}^{c} \alpha(u)(u-\varphi)\,du \oint\limits_{\partial D_u} (z_1 - z_2)\,\frac{\partial(z_1 - z_2)}{\partial n}\,dl -$$

$$- \iint\limits_{D} dx\,dy \int\limits_{\underline{u}}^{c} [|\tilde{\nabla} z_1|^2 (z_{2u}/z_{1u}) + (|\tilde{\nabla} z_2|^2 (z_{1u}/z_{2u}) - 2(\tilde{\nabla} z_1, \tilde{\nabla} z_2))]\,du. \qquad (24)$$

Використавши рівність

$$(u-\varphi)\,\frac{\partial(z_1 - z_2)^2}{\partial n} = (z_1 - z_2)^2 (u-\varphi)|_u - (z_1 - z_2)^2,$$

знайдемо

$$(u-\varphi)(z_1 - z_2)(z_1 - z_2)_u = (1/2)[(u-\varphi)(z_1 - z_2)^2|_u - (z_1 - z_2)^2].$$

У випадку кусково-постійної залежності $\alpha(u) = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1)\eta(u - u^*)$, де $\eta(u)$ — функція Хевісайда, після інтегрування відносно $u$ з урахуванням крайових умов формула Гріна (24) остаточно записується у вигляді

$$\iint\limits_{D} dx\,dy \int\limits_{\underline{u}}^{c} (Az_1 - Az_2)(z_1 - z_2)\,du = -\frac{1}{2}\int\limits_{d}^{c} \alpha(u)\,du \oint\limits_{\partial D_u} (z_1 - z_2)^2\,dl -$$

$$- \iint\limits_{D} dx\,dy \int\limits_{\underline{u}}^{c} [|\tilde{\nabla} z_1|^2 (z_{2u}/z_{1u}) + (|\tilde{\nabla} z_2|^2 (z_{1u}/z_{2u}) - 2|\tilde{\nabla} z_1, \tilde{\nabla} z_2|)]\,du. \qquad (25)$$

Оскільки $z_1$ і $z_2$ — монотонні функції відносно змінної $u$, то $z_{1u}/z_{2u} > 0$. Це дозволяє, використавши нерівність Юнга $2xy \le a^2x^2 + a^{-2}y^2$, одержати оцінку

$$|\tilde{\nabla} z_1|^2 (z_{2u}/z_{1u}) + |\tilde{\nabla} z_2|^2 (z_{1u}/z_{2u}) > 2(|\tilde{\nabla} z_1, \tilde{\nabla} z_2|),$$

завдяки якій права частина (25) недодатна, що й встановлює монотонність оператора $A$ на розв'язках задачі (18).

Монотонність оператора $A$, в свою чергу, дозволяє довести теорему єдиності розв'язку задачі (18), а отже, й (15), коли на поверхні $S$ задана умова Діріхле $(\alpha(u) = 0)$. Неважко бачити, що умови спряження задачі (18) за допомогою дельта-функції Дірака $\delta(u - u^*)$ можна включити в диференціальне рівняння

$$A(z) = k(u)z_t + f(u)z_u + pz_t\delta(u - u^*) \quad \text{в} \quad \Omega_u(t). \qquad (26)$$

Виключаючи за допомогою (26) $Az_1$ і $Az_2$ з рівності (25), перетворимо її ліву частину до вигляду

$$\iint\limits_{D} dx\,dy \int\limits_{\underline{u}} (Az_1 - Az_2)(z_1 - z_2)\,du =$$

$$= \iint\limits_{D} dx\,dy \int\limits_{\underline{u}}^{c} \{[k(u) + p\delta(u - u^*)](z_1 - z_2) + f(u)(z_1 - z_2)_u\}(z_1 - z_2)\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{D} \{p(z_1 - z_2)_t^2|_{u^*} + \int\limits_{\underline{u}}^{c} [k(u)(z_1 - z_2)_t^2 - f'(u)(z_1 - z_2)_t^2]\,du\}\,dx\,dy. \qquad (27)$$

Якщо $f(u)$ — монотонно спадна функція $(f'(u) < 0)$, то з (27) випливає, що ліва частина (25) невід'ємна. Дійсно, оскільки при $t = 0$ завдяки початковим умовам задачі (18) $(z_1 - z_2)^2 = 0$ і $(z_1 - z_2)^2 \geq 0$ при $t > 0$, то $(z_1 - z_2)_t^2 \geq 0$. Права частина (25) згідно з встановленою монотонністю оператора $A$ недодатна. Вихід з цієї суперечності можливий лише у випадку, коли обидві частини рівності (27) дорівнюють нулю, що виконується лише при $z_1 = z_2$, $x, y, u \in \in \Omega_u(t)$, $t > 0$. Це й доводить теорему єдиності розв'язку задачі (18).

## 3. Нелокальні граничні задачі для параболічних рівнянь.

3.1. *Нелокальність у крайовій умові за часовою змінною.* Проблеми розрахунку теплових та дифузійних процесів у півпросторі $l < x < \infty$ з шаруватим покриттям $0 < x < l$ вимагають знаходження розв'язку одновимірного лінійного параболічного рівняння з кусково-постійним коефіцієнтом $k$ дифузії чи температуропровідності

$$u_t = (k u_x)_x, \tag{28}$$

де $u(x, t)$ — шукана функція; $x$ — координата; $t$ — часова змінна;

$$k(x) = \begin{cases} k_i, & x_{i-1} < x < x_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ k_{m+1}, & x > x_m. \end{cases}$$

Розв'язок рівняння (28) повинен задовольняти умови

$$k_1 u_x(0, t) = \beta(t) u(0, t) - \mu(t); \qquad u(x, 0) = 0;$$

$$|u(x, t)| \leq M, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{29}$$

де $\beta(t)$, $\mu(t)$ — задані функції.

При розв'язанні таких задач виникають труднощі, пов'язані з необмеженістю області: $0 < x < \infty$. Тому вважається за доцільне звести задачу (28), (29) до задачі в обмеженій області $0 < x < x_m = l$, яка б враховувала і наявність півпростору $x > l$ [16]. Для цього розглянемо умови спряження в точці $x = l$, які випливають з рівняння (28):

$$\begin{gathered} [u]_{x=l} = u(l+0, t) - u(l-0, t) = 0, \\ \left[ k \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=l} = 0. \end{gathered} \tag{30}$$

В області $x > l$, $t > 0$ розв'язок $u = u^+$ задачі (28), (29) записується у вигляді

$$u^+(x, t) = -\frac{1}{\sqrt{k_{m+1}\pi}} \int_0^t \frac{\nu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left( -\frac{(x-l)^2}{4k_2(t-\tau)} \right) d\tau,$$

$$\nu(\tau) = k_{m+1} u_x^+(l, t),$$

і отже, при $x = l$ маємо

$$u^+(l+0, t) = -\frac{1}{\sqrt{k_{m+1}\pi}} \int_0^t \frac{k_{m+1} u_x^+(l+0, \tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau.$$

Згідно з (30) остання рівність набуває вигляду

$$u^-(l-0, t) = -\frac{1}{\sqrt{k_{m+1}\pi}} \int_0^t \frac{k_{m+1} u_x^-(l-0, \tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau, \tag{31}$$

де $\bar{u}(x, t)$ — розв'язок задачі (28), (29) в області $0 < x < l,\ 0 < t \leq T$. Розв'язуючи інтегральне рівняння Абеля (31), маємо

$$-k_m u_x^-(l-0, t) = \sqrt{\frac{k_{m+1}}{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{k_m u^-(l, \tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau. \tag{32}$$

Рівність (32) є нелокальною за часом крайовою умовою в точці $x = l$ для рівняння (28). Неважко бачити, що права частина цієї умови пропорційна дробовій похідній за часом — $D_{0t}^{1/2} u(l, t)$ порядку $1/2$ від граничного значення шуканої функції $u(x, t)$. Тому (32) можна також трактувати як крайову умову з дробовою похідною за часом.

Отже, задачу (28), (29) зведено до наступної нелокальної початково-крайової задачі в обмеженій області $\Omega \equiv \{0 < x < l,\ 0 < t < T\}$:

$$\begin{gathered} u_t = (k u_x)_x, \\ k_1 u_x(0, t) = \beta(t) u(0, t) - \mu(t), \\ u(x, 0) = 0, \quad |u(x, t)| \leq M, \quad 0 < x < l, \quad 0 \leq t \leq T, \\ -k_m u_x(l, t) = \sqrt{\frac{k_{m+1}}{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{k_m u(l, \tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau. \end{gathered} \tag{33}$$

Знаходження розв'язку в області $x > l,\ 0 < t < T$ здійснюється за формулою

$$u^+(x, t) = -\frac{1}{\sqrt{k_{m+1}\pi}} \int_0^t \frac{k_m u_x^-(l-0, \tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left(-\frac{(x-l)^2}{4k_2(t-\tau)}\right) d\tau. \tag{34}$$

У роботі [17] доведено коректність постановок подібних нелокальних початково-крайових задач, побудовано однопараметричні сім'ї різницевих схем та показано, що вони є стійкими і збігаються в рівномірній метриці.

3.2. *Нелокальність у крайовій умові за просторовою змінною.* При розрахунках процесів кондуктивного та радіаційного теплообміну виникають нестаціонарні задачі для рівняння теплопровідності при нелінійних крайових умовах, що містять потоки перевипромінювання тепла. Для визначеності постановки задачі в таких випадках використовується інтегральне рівняння радіаційного теплообміну. Останнє є лінійним інтегральним рівнянням Фредгольма другого роду з симетричним обмеженим неперервним додатним ядром $K(P, Q)$ відносно інтенсивності падаючого потоку, що дозволяє за допомогою резольвенти $R(P, Q)$ ядра визначити потік і для температурного поля отримати початково-крайову задачу з нелінійною нелокальною крайовою умовою, яка містить оператор типу Гамерштейна.

У випадку несиметричного розігріву нескінченного циліндра маємо наступну нелокальну задачу у двовимірній області [18, 19]:

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \\ \Omega \equiv \{(\rho, \varphi):\ 1 < \rho < \rho_0,\ 0 < \varphi < 2\pi\}, \quad \tau > 0, \\ u(\rho, \varphi, 0) = u_0(\rho, \varphi), \quad 1 \leq \rho \leq \rho_0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ \frac{\partial u}{\partial \rho} = f(u) - \varepsilon \int_0^{2\pi} R(\varphi, \psi) f(u(1, \psi, \tau))\, d\psi - \mu(\varphi, \tau), \quad \rho = 1, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad \tau > 0, \end{gathered} \tag{35}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = -hu, \quad \rho = \rho_0, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad \tau > 0,$$

$$u(\rho, \varphi, \tau) = u(\rho, \varphi + 2\pi, \tau),$$

де

$$\mu(\varphi, \tau) = \frac{\varepsilon r_1}{\lambda}\left[E_{\text{ист}}(\varphi, \tau) + (1-\varepsilon)\int\limits_0^{2\pi} R(\varphi, \psi) E_{\text{ист}}(\psi, \tau)\, d\psi\right],$$

$$E_{\text{ист}}(\varphi, \tau) = q(\tau)\frac{1-\zeta\cos\varphi}{1+\zeta^2-2\cos\varphi} = q(\tau)\sum_{n=1}^{\infty}\zeta^n \cos n\varphi,$$

$$q(\tau) = \frac{Q(\tau)}{2\pi r}, \quad \zeta = \frac{\delta}{r} < 1, \quad f(u) = \frac{r_1 \varepsilon\sigma}{\lambda} u^4 = r_1 k u^4,$$

$$K(\varphi-\psi) = \frac{1}{4}\sin\left|\frac{\varphi-\psi}{2}\right| = \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n(\varphi-\psi)\right)}{4n^2-1},$$

$$R(\varphi-\psi) = \frac{1}{2\pi\varepsilon} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n(\varphi-\psi)\right)}{4n^2-\varepsilon}.$$

Узагальнені розв'язки відповідної лінеаризованої задачі, коли функція $f(u)$ пропорційна $u$, досліджено в [19]. За допомогою встановлених апріорних оцінок доведено теореми існування і єдиності останніх у класі функцій $W_2^{1,0}(Q_T)$. Побудовано різницеву схему другого порядку апроксимації [20].

У випадку скінченного циліндра маємо задачу [21, 22]:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\Omega = \{(\rho, x) \colon 1/2 < \rho < \rho_0,\ 0 < x < x_0\}, \quad \tau > 0,$$

$$u(\rho, x, 0) = 0, \quad 1/2 \le \rho \le \rho_0, \quad 0 \le x \le x_0,$$

$$u(\rho, 0, \tau) = \chi(\tau), \quad x = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial \rho} = -f(u), \quad x = x_0, \quad \tau > 0; \tag{36}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = f(u) - \varepsilon\int\limits_0^{l} R_1(x, \xi) f(u(\xi, \tau))\, d\xi - \mu(x, \tau), \quad \rho = 1/2, \quad \tau > 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = 0, \quad \rho = \rho_0, \quad \tau > 0,$$

де $R_1 = \varepsilon R$, $R(x-\xi)$ — резольвента ядра $K(x-\xi)$; $0 \le \chi(\tau) \le 1$, $\chi'(\tau) \ge 0$;

$$x = z/2r_1, \quad t = 4r_1^2\tau/a^2, \quad r = 2r_1\rho, \quad T = T_0 u;$$

$$f(u) = 2S_k r_1 u^4, \quad \mu(x, \tau) = F(x) + (1-\varepsilon)\int\limits_0^{l} R(x, \zeta) F(\zeta)\, d\zeta;$$

$$F(x) = \frac{S_k r_1}{2}\left(\frac{x^2+2}{(x^2-4)^{1/2}} - x\right); \quad S_k = \frac{\varepsilon\sigma T_0^3}{\lambda};$$

$$K(x-\xi) = 1-|x-\xi|\,\frac{(x-\xi)^2+6}{[(x-\xi)^2+4]^{3/2}},$$

$$R(x,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{n-1} K_n(x,\xi).$$

3.3. *Інтегро-диференціальні рівняння.* Нелокальність нелінійних початково-крайових задач (35) та (36) зумовлена наявністю в крайовій умові інтегрального оператора типу Гамерштейна з обмеженим неперервним додатним ядром $R(P, Q)$. У ряді випадків виникають задачі з нелокальностями такого типу вже в диференціальному рівнянні. Так, якщо шукана функція $u(P, Q, t)$ слабко залежить від координати $\rho$, то після усереднення відносно $\rho$ нелокальна крайова умова трансформується в нелокальне диференціальне рівняння. У випадку задачі (35) маємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} - \frac{\partial u}{\partial t} - au + bf(u) - \int_0^{2\pi} \tilde{R}(\varphi,\psi) f(u(1,\psi,t))\,d\psi = \tilde{\mu}(t), \quad 0<\varphi<2\pi, \quad \tau>0,$$

$$u(\varphi,0) = u_0(\varphi), \quad 0\le\varphi\le 2\pi, \qquad u(\varphi,t) = u(\varphi+2\pi,t), \tag{35'}$$

де $a$, $b$ — деякі сталі, а $\tilde{R}(\varphi,\psi)$ та $\tilde{\mu}(t)$ — функції, пропорційні резольвенті $R(\varphi,\psi)$ та потоку $\mu(t)$. Слід зазначити, що в цій задачі нелокальність пов'язана також і з умовою періодичності.

У випадку задачі (35′) після усереднення відносно $\rho$ маємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial \tau} + cf(u) - \int_0^{l} R^*(x,\xi) f(u(\xi,\tau))\,d\xi - \mu^*(\tau), \quad 0 < x < x_0, \quad \tau>0,$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le x_0, \tag{36'}$$

$$u(0,\tau) = \chi(\tau), \quad x = 0; \qquad \frac{\partial u}{\partial \rho} = -f(u), \quad x = x_0, \quad \tau>0.$$

Зауважимо, що усереднення відносно $x$ диференціального рівняння (33) приводить до задачі Коші для рівняння з дробовою похідною

$$y''(t) + cD_{0t}^{1/2}y(t) + dy(t) = f(t), \qquad y(0) = 0, \tag{33'}$$

де $c$ і $d$ — сталі, а $f(t)$ — відома функція.

3.4. *Нелокальність за областю як умова в особливій точці.* Екологічні проблеми прогнозу зміни стану навколишнього середовища в результаті дії точкових джерел забруднення зводяться до розв'язку нелокальних початково-крайових задач типу [8, 9, 22]

$$\operatorname{div} \mathbf{K} \operatorname{grad} c - (\bar{v}, \operatorname{grad} c) - \frac{\partial c}{\partial t} = f(c), \quad x\in\Omega(t)\setminus x_0, \quad t>0,$$

$$c(x,0) = 0, \qquad x\in\Omega(0),$$

$$(\mathbf{K} \operatorname{grad} c, \bar{n}) - \alpha c = 0, \qquad x\in S(t) \equiv \partial\Omega(t)\cap\partial D, \quad t>0, \tag{37}$$

$$c(x,t) = 0, \qquad (\mathbf{K} \operatorname{grad} c, \bar{n}) = 0, \quad x\in\Gamma(t) \equiv \partial\Omega(t)\cap D, \quad t>0;$$

$$\int_0^t \iiint_{\Omega(t)} \left(\frac{dc}{dt} + f(c)\right) dc\,dt + \alpha\int_0^t \iint_{S(t)} c\,ds\,dt = \int_0^t Q(t)\,dt,$$

де $f(c)$ — задана функція шуканої концентрації $c$, яка характеризує асиміляційні властивості середовища; $x_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30})$ — координати джерела інтенсивності $Q(t)$; $\Omega(t)$ — область, обмежена відомою поверхнею $S(t)$ і невідомою $\Gamma(t)$; $\alpha$ — коефіцієнт поглинання; $D$ — деяка область в $R^3$, яка містить $\Omega(t)$ при довільному значенні часу $t$; $\bar{n}$ — орт зовнішньої нормалі до $\partial\Omega(t) \equiv S(t) \cup \cup \Gamma(t)$; $\bar{v}$ — вектор швидкості. Нелокальну умову (37) у випадку $\bar{v} = 0$ після інтегрування за часом можна спростити до вигляду

$$\iiint\limits_{\Omega(t)} c\,dc + \int\limits_0^t \iiint\limits_{\Omega(t)} f(c)\,dc\,dt + \alpha \int\limits_0^t \iint\limits_{S(t)} c\,ds\,dt = \int\limits_0^t Q(t)\,dt. \qquad (38)$$

Крім нелокальності задачі типу (37) містять ще й вільну межу. У таких нелінійних нелокальних задачах з вільними межами необхідно знайти як функцію $u(x, t)$, так і область її визначення $\Omega(t)$, тобто вільну межу $\Gamma(t)$: $\Phi(x, t) = 0$, на якій відомі дві крайові умови: концентрація та її потік дорівнюють нулю — $c(x, t) = 0$, $(\mathbf{K}\,\mathrm{grad}\, c, \bar{n}) = 0$.

Розв'язок задачі (37) за фізичним змістом повинен мати характер дифузійної хвилі, яка розповсюджується в незабрудненій турбулентній атмосфері. З математичної точки зору виконання цих вимог накладає наступні обмеження на характер поведінки функції $f(c)$ в околі нуля [22]:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = \infty, \quad \int\limits_0^c \left( \int\limits_0^c f(\tilde{c})\,d\tilde{c} \right)^{-1/2} dc < \infty, \qquad (39)$$

де $c$ — максимальне значення концентрації $c(x, t)$.

Задачі (37) значно спрощуються у випадку, коли $\bar{v} = 0$ та відсутня поверхня $S$: $\mathrm{mes}\, S = 0$. Для діагонального тензора турбулентної дифузії $\mathbf{K} = K(r, t, c)\mathbf{I}$, де $\mathbf{I}$ — одиничний тензор, вони стають одномірними:

$$\frac{1}{r^{1-n}} \frac{\partial}{\partial r}\left( r^{n-1} K \frac{\partial c}{\partial r} \right) - \frac{\partial c}{\partial t} - f(c) = 0, \quad r \in (0, r(t)), \quad t > 0,$$

$$c(r, 0) = 0, \quad r \in (0, r_0), \quad (r_0 = 0), \qquad (40)$$

$$c = 0; \quad \frac{\partial c}{\partial r} = 0, \quad r = \bar{r}(t), \quad t > 0,$$

$$\omega_n \left( \int\limits_0^{r_\Phi(t)} c r^{n-1}\,dr + \int\limits_0^t \int\limits_0^{r_\Phi(t)} f[c(r, t)] r^{n-1}\,dr\,dt \right) = \int\limits_0^t Q(t)\,dt, \quad n = 1, 2, 3, \quad (41)$$

де $\omega_n$ — площа поверхні одиничної сфери $(\omega_1 = 2, \omega_2 = 2\pi, \omega_3 = 4\pi)$; $r$ — відстань до джерела

$$(r = x - x_0, \quad n = 1; \quad r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2,$$

$$n = 2; \quad r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2, \quad n = 3);$$

$r_\Phi(t)$ — максимальний радіус області забруднення, який належить визначати $(\Gamma(t) \equiv \{ r - r_\Phi(t) = 0 \})$. Шуканими тут є функції $c(r, t)$ та $r_\Phi(t)$.

При розрахунках зміни дифузійних процесів забруднення атмосфери та океану використовується квазілінійне рівняння

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{1}{r^{1-n}} \frac{\partial}{\partial r}\left( r^{n-1} K \frac{\partial c}{\partial r} \right), \quad r \in (0, r_\Phi(t)), \quad t > 0, \quad n = 1, 2, 3, \qquad (42)$$

з лінійною нелокальною умовою

$$\omega_n \int\limits_0^{r_\Phi(t)} c r^{n-1} dr = \int\limits_0^t Q(t)\,dt, \quad n = 1, 2, 3, \tag{43}$$

де $K = K_0 \varphi(t) r^m c^k$; $\varphi(t)$ — довільна функція; $K_0$, $k$ — деякі сталі. В [23] розглядалися лінійні нелокальні задачі для рівняння (42) з $k = 0$ при різних $\varphi(t)$ і $m$. Методом Біркгофа одержано точні розв'язки задачі (42), (43) при $k \neq 0$ та при $m = 0$, $k \neq 0$.

Якщо $K = \text{const}$, то у випадку $n = 3$ після заміни залежної і незалежної змінних [22]

$$c = c_0 u / ax, \quad r = r_\Phi ax, \quad t = r_\Phi^2 a^2 \tau / K, \tag{44}$$

задача (40), (41) набуває канонічного вигляду

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial \tau} = x^{1-\beta} u^\beta, \quad 0 < x < s(\tau), \quad \tau > 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < s(0) \quad (s(0) = 0), \\ u(s(\tau), \tau) = u_x(s(\tau), \tau) = 0, \quad \tau > 0, \\ \int\limits_0^{s(\tau)} [u_\tau + x^{1-\beta} u^\beta]\, x\, dx = q(\tau), \quad \tau > 0, \end{gathered} \tag{45}$$

де

$$q(\tau) = \frac{Q(r_\Phi^2 a^2 \tau / K)}{4\pi c_0 r_\Phi K}. \tag{46}$$

Тут позначено

$$\begin{gathered} a = \kappa^{-2/(3-\beta)}, \quad \kappa^2 = \alpha c_0^{\beta-1} r_\Phi^2 / K, \\ s(\tau) = r_\Phi(\tau) / r_\Phi, \\ q(\tau) = Q(r_\Phi^2 \tau / K) / 4\pi c_0 r_\Phi K; \end{gathered}$$

$c_0$ та $r_\Phi$ — розмірні нормуючі множники, абсолютні величини яких можна вважати рівними одиниці.

Постановка нелокальної нелінійної задачі (45), (46) з вільною межею містить задану функцію $q(\tau)$ та параметр нелінійності $\beta$. Відповідна стаціонарна задача зводиться до розв'язання рівняння Емдена–Фаулера з відповідною нелокальною умовою.

Конструктивні методи розв'язання наведених одновимірних задач, пов'язані з методом Роте, інтегральних рівнянь та спеціальних апроксимацій, розглянуто в роботах [2, 8, 9, 15, 17–22].

1. *Фридман А.* Вариационные принципы в задачах со свободными границами. – М.: Наука, 1990. – 536 с.
2. *Березовский А. А.* Классические и специальные постановки задач Стефана // Нестационарные задачи Стефана. – Киев, 1988. – С. 3–23. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88.49).
3. *Березовский А. А.* Лекции по нелинейным краевым задачам математической физики: В 2 ч. – Киев: Наук. думка, 1976. – Ч. II. – 298 с.
4. *Митропольский Ю. А., Березовский А. А.* Задачи Стефана с предельным стационарным состоянием в спецэлектрометаллургии, криохирургии и физике моря // Мат. физика и нелинейн. механика. – 1987. – Вып. 7. – С. 50–60.

5. *Мартинсон Л. К.* Исследование математической модели процесса нелинейной теплопроводности в средах с объемным поглощением // Мат. моделирование. – М.: Наука, 1986. – С. 278–303.
6. *Калашников А. С.* Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // Успехи мат. наук. – 1987. – **42**, вып. 2(254). – С. 135–164.
7. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Изд-во иностр. лит., 1954. – 415 с.
8. *Березовский Н. А., Догучаева С. М.* Задачи Стефана в проблеме загрязнения и самоочищения окружающей среды точечным источником // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – С. 18–21.
9. *Березовский Н. А., Догучаева С. М.* Математична модель забруднення та самоочищення оточуючого середовища точковим джерелом // Задачи со свободными границами и нелокальные задачи для нелинейных параболических уравнений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1996. – С. 11–14.
10. *Березовский А. А., Богуславская Е. С.* Математическая модель динамики зоны сосуществования кислорода и сероводорода в Черном море // Задачи теплопроводности с подвижными границами. – Киев, 1985. – С. 3–8. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.5).
11. *Митропольский Ю. А., Беляев В. И., Богуславский С. Г., Березовский А. А.* Математическое моделирование динамики сероводородной зоны Черного моря // Вестн. АН УССР. – 1987. – № 5. – С. 16–26.
12. *Mitropolsky Yu. A., Berezovsky A. A., Berezovsky S. A.* Free boundary problems for nonlinear evolution equations in metalurgy, medicine and ecology. – Kiev, 1994. – 54 p. – (Preprint / Institute of Mathematics. Akad. Sci. Ukr. SSR. 94.20).
13. *Березовский А. А., Плотницкий Т. А., Леонтьев Ю. В.* Обратные преобразования в задачах кристаллизации // Обратные задачи в проблемах кристаллизации и физики моря. – Киев, 1985. – С. 3–9. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.54).
14. *Митропольский Ю. А., Березовский А. А., Плотницкий Т. А.* Задачи со свободными границами для нелинейного эволюционного уравнения в проблемах металлургии, медицины, экологии // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 11. – С. 790–800.
15. *Березовский А. А.* Двумерные математические модели криодеструкции биоткани // Математическое моделирование физических процессов. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 14–38.
16. *Березовская Л. М., Березовский А. А., Лукьянов В. И.* Нестационарное температурное поле приемника лазерного излучения // Нелинейные задачи диффузии и сложного теплообмена. – Киев, 1990. – С. 19–40. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 90.42).
17. *Шхануков М. Х., Керефов А. А., Березовский А. А.* Краевые задачи для уравнения теплопроводности с дробной производной в граничных условиях и разностные методы их численной реализации // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 9. – С. 1289–1298.
18. *Березовская Л. М.* Расчет стационарного температурного поля многоэкранной изоляции // Нелинейные краевые задачи теплопроводности. – Киев, 1980. – С. 14–28. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 80.36).
19. *Митропольский Ю. А., Березовский А. А. Шхануков М. Х.* Об одной нелокальной задаче для параболического уравнения // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 11. – С. 790–800.
20. *Митропольский Ю. А., Березовский А. А. Шхануков М. Х.* Об одной нелокальной задаче для уравнений теплопроводности в двумерной области и ее разностной аппроксимации // Допов. НАН України. – 1996. – № 2. – С. 27–30.
21. *Березовский С. А., Асланова Е. М.* К расчету температурного поля несимметрично разогреваемой цилиндрической оболочки // Краевые задачи математической физики. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – С. 35–48.
22. *Березовский А. А.* Нелокальні граничні задачі для нелінійних параболічних рівнянь // Задача со свободными границами и нелокальные задачи для нелинейных параболических уравнений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1996. – С. 1–7.
23. *Озмидов Р. В.* Горизонтальная турбулентность и турбулентный обмен в океане. – М.: Наука, 1968. – 196 с.

Одержано 05.06.96