УДК 519.21

Д. Я. Петрина (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
Е. Д. Петрина (Ин-т кибенетики НАН Украины, Киев)

О СУЩЕСТВОВАНИИ РАВНОВЕСНЫХ СОСТОЯНИЙ СИСТЕМ УПРУГИХ ШАРОВ В ПРЕДЕЛЕ БОЛЬЦМАНА – ЭНСКОГА *

We study equilibrium states of systems of hard spheres in the Boltzmann–Enskog limit $(d \to 0,\ 1/v \to \infty\ (z \to \infty)$, and $d^3(1/v) = \text{const}\ (d^3 z = \text{const}))$. For this purpose, we use the Kirkwood–Salsburg equations. We prove that, in the Boltzmann–Enskog limit, solutions of these equations exist and the limit distribution functions are constant. By using the cluster and compatibility conditions, we prove that all distribution functions are equal to the product of one-particle distribution functions, which can be represented as power series in $\tilde{z} = d^3 z$ with certain coefficients.

Вивчаються рівноважні стани систем пружних куль в границі Больцмана – Енскога, коли $(d \to 0,\ 1/v \to \infty\ (z \to \infty)$, а $d^3(1/v) = \text{const}\ (d^3 z = \text{const}))$. Для цього використовуються рівняння Кірквуда – Зальцбурга. Доведено, що в границі Больцмана – Енскога існують розв'язки цих рівнянь, і граничні функції розподілу сталі. Використовуючи умову узгодженості і кластерності, доведено, що всі функції розподілу дорівнюють добутку одночастинкових, які в свою чергу можна подати степеневим рядом від $\tilde{z} = d^3 z$ з певними коефіцієнтами.

Изучение состояний бесконечных систем статистической механики в различных предельных ситуациях, когда некоторые параметры стремятся к определенному пределу, представляет большой интерес. Выяснилось, что такие фундаментальные уравнения, как уравнения Больцмана, Власова, гидродинамики и диффузии могут быть строго выведены при определенных предельных режимах. Так, для системы упругих шаров уравнение Больцмана вытекает из иерархии ББГКИ в пределе Больцмана – Грэда, когда диаметр шара $d \to 0$, плотность $1/v \to \infty$ (или активность $z \to \infty$), но $d^2(1/v) = \text{const}$ $(d^2 z = \tilde{z} = \text{const})$ [1, 2]. Вызывает большой интерес задача изучения другого предела, когда $d \to 0$, $1/v \to \infty$ $(z \to \infty)$, но $d^3(1/v) = \text{const}$ $(d^3 z = \text{const})$ — предел Больцмана – Энскога. С учетом этого предела связывают надежды строго вывести уравнения Больцмана – Энскога.

В данной работе исследуются равновесия состояния системы упругих шаров в пределе Больцмана – Энскога. Для этой цели используются уравнения Кирквуда – Зальцбурга. Доказано, что их решения существуют в пределе Больцмана – Энскога, и предельные функции распределения являются постоянными. Из условий согласованности и кластерности вытекает, что все частичные функции распределения являются произведением одночастичных, аналогично случаю Больцмана – Грэда. Однако в отличие от предельных функций Больцмана – Грэда, где одночастичные функции распределения равны просто перенормированной активности $\tilde{z} = d^2 z$, в случае Больцмана – Энскога она представляется степенным рядом от $\tilde{z} = d^3 z$ с определенными коэффициентами.

1. Решение уравнения Кирквуда – Зальцбурга. Рассмотрим равновесные состояния систем со случайным числом частиц. В рамках большого канонического ансамбля эти состояния описываются последовательностью функций распределения в конфигурационном пространстве $F = (F_1(q_1), \ldots, F_s((q)_s), \ldots)$, которые удовлетворяют уравнениям Кирквуда – Зальцбурга [3, 4]

$$F_s((q)_s) = z \exp\left\{-\beta \sum_{i=2}^{s} \Phi(q_1 - q_i)\right\} \left[F_{s-1}((q)_s^1) \right. +$$

* Работа выполнена при поддержке Международного фонда, грант № UB 3000.

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \prod_{i=1}^{n} \left(e^{-\beta\Phi(q_1 - y_i)} - 1\right) F_{s-1+n}\left((q)_s^1, (y)_n\right) d(y)_n \Bigg], \quad s > 1, \tag{1}$$

$$F_1(q)_1 = z\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \prod_{i=1}^{n} \left(e^{-\beta\Phi(q_1 - y_i)} - 1\right) F_n\left((y)_n\right) d(y)_n\right],$$

$$d(y)_n = dy_1 \ldots dy_n, \quad (y)_n = (y_1, \ldots, y_n).$$

Здесь z — активность, β — обратная температура, $\beta > 0$, $(q)_s^1 = (q_2, \ldots, q_s)$, $\Phi(q)$ — потенциал взаимодействия. Рассмотрим случай чистых упругих шаров с диаметром d (твердых сердцевин). Тогда

$$\Phi(q) = \Phi(|q|) = \Phi^d(q) = \begin{cases} +\infty, & |q| \le d, \\ 0, & |q| > d, \end{cases}$$

$$e^{-\beta\Phi^d(q)} - 1 = \begin{cases} -1, & |q| \le d, \\ 0, & |q| > d. \end{cases}$$

Домножим уравнения Кирквуда – Зальцбурга на $(d^3)^s$ и введем обозначение

$$F_s^d((q)_s) = (d^3)^s F_s((q)_s), \quad \tilde{z} = z d^3, \quad F^d = \left(F_1^d(q_1), \ldots, F_s^d((q_s)), \ldots\right).$$

Тогда уравнения (1) будут иметь вид

$$F_s^d((q)_s) = \tilde{z} \exp\left\{-\beta \sum_{i=2}^{s} \Phi(q_1 - q_i)\right\} \Bigg[F_{s-1}^d((q)_s^1) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(d^3)^n} \int \prod_{i=1}^{n} \left(e^{-\beta\Phi(q_1 - y_i)} - 1\right) F_{s-1+n}^d\left((q)_s^1, (y)_n\right) d(y)_n \Bigg], \tag{2}$$

$$F_1^d(q_1) = \tilde{z}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(d^3)^n} \int \prod_{i=1}^{n} \left(e^{-\beta\Phi(q_1 - y_i)} - 1\right) F_n^d((y)_n) d(y)_n\right].$$

Введем банахово пространство E_ξ, элементами которого являются последовательности ограниченных функций $f = \{f_1(q_1), \ldots, f_s((q)_s), \ldots\}$ с конечной нормой

$$\|f\| = \sup_{s \ge 1} \xi^{-s} \sup_{(q)_s} |f_s((q)_s)|,$$

где ξ — положительная постоянная, определяемая далее.

Определим оператор K_d, действующий в пространстве E_ξ, согласно формуле

$$(K_d f)_s((q)_s) = \tilde{z} \exp\left\{-\beta \sum_{i=2}^{s} \Phi(q_1 - q_i)\right\} \times$$

$$\times \Bigg[f_{s-1}((q)_s^1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(d^3)^n} \times$$

$$\times \int \prod_{i=1}^{n} \left(e^{-\beta\Phi^d(q_1 - y_i)} - 1\right) f_{s-1+n}\left((q)_s^1, (y)_n\right) d(y)_n \Bigg], \quad s \ge 1, \quad f_0 = 0.$$

С помощью оператора K_d систему уравнений (2) можно представить в виде одного операторного уравнения для последовательности

$$F^d = \tilde{z} K_d F^d + \tilde{z} F_0, \quad F = (1, 0, 0, \dots). \tag{3}$$

Оценим норму оператора $\tilde{z} K_d$ в E_ξ:

$$|\tilde{z}(K_d f)_s((q)_s)| \le |\tilde{z}| \left[\xi^{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(d^3)^n} \xi^{s-1+n} \left(\frac{4}{3} \pi d^3 \right)^n \right] \|f\|,$$

$$\|\tilde{z} K_d\| = \sup_{s \ge 1} \xi^{-s} \sup_{(q)_s} \frac{|\tilde{z}(K_d f)_s((q)_s)|}{\|f\|} \le \frac{|\tilde{z}|}{\xi} \exp\left(\xi \frac{4}{3} \pi \right). \tag{4}$$

Теорема 1. *Уравнение* (3) *имеет единственное решение в* E_ξ

$$\left(\xi = \left(\frac{4}{3} \pi \right)^{-1} \right) \quad \text{при} \quad |\tilde{z}| < \frac{3}{4} (\pi e)^{-1}, \tag{5}$$

и оно представимо сходящимся по норме пространства E_ξ *рядом*

$$F^d = \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{z} K_d)^k \tilde{z} F_0. \tag{6}$$

Доказательство теоремы следует из того, что $\|K_d\| = k < 1$ при данных ограничениях на $\tilde{z}$. Кроме того, из (6) следует

$$\|F^d\| \le |\tilde{z}| \frac{1}{1-k}, \quad \|F_s^d(q)_s\| \le |\tilde{z}| \frac{1}{1-k} \xi^s. \tag{7}$$

Обозначим через W_s множество запрещенных конфигураций s частиц $W_s(q_1, \dots, q_s| \; |q_i - q_j| \le d$ хотя бы для одной пары $(i, j))$. Функции $F_s^d((q)_s)$ согласно их физическому смыслу должны исчезать на запрещенных конфигурациях, т. е. $F_s^d((q)_s) = 0$, если $(q)_s \in W_s$. Покажем, что это вытекает из (6). Будем рассматривать подпространство E_ξ^1 последовательностей функций $f \in E_\xi$, равных нулю на запрещенных конфигурациях: $f_s((q)_s) = 0$, если $(q)_s \in W_s$. Очевидно, $(K_d f)_s (q)_s = 0$ на W_s, ибо

$$\exp\left\{ -\beta \sum_{i=2}^{s} \Phi(q_1 - q_i) \right\} = 0,$$

если $|q_1 - q_i| < d$, $i = 2, \dots, s$, а $f_{s-1+n}((q)_s^1, (y)_n) = 0$ при $|q_i - q_j| < d$, $(i, j) = (2, \dots, s)$. Поэтому это подпространство E_ξ^1 инвариантно относительно действия оператора K_d и решение уравнений (3) принадлежит ему.

3. Функции распределения в теории возмущений. Рассмотрим ядро, определяющее оператор K_d:

$$\mathbb{K}_d(q_1, (y)_n) \le \prod_{i=1}^{n} (e^{-\beta \Phi(q_1 - y_i)} - 1).$$

Оно не равно нулю, если $|q_1 - y_i| \le d$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. С другой стороны, $f_{s-1+n}((q)_s^1, (y)_n) \ne 0$ при $|y_i - y_j| \ge d$, $i, j = 1, \dots, n$, для $f \in E_\xi^1$. Таким образом, для того чтобы выполнялось соотношение

$$\int \mathbb{K}_d(q_1, (y)_n) f_{s-1+n}((q)_s^1, (y)_n) \, d(y)_n \ne 0,$$

должны выполняться условия:

1) $|y_i - y_j| \ge d$, $i, j = \overline{1, n}$;

2) $|q_1-y_j|\le d,\ i,j=\overline{1,n}$;

3) $|q_i-y_j|\ge d,\ i=\overline{2,s},\ j=\overline{1,n}$.

Геометрически это означает, что расстояние между центрами n шаров, расположенных в точках $(y_1,\ldots,y_n)$, должно быть больше или равно d, а расстояние между $(y_1,\ldots,y_n)$ и фиксированной точкой q_1 должно быть меньше или равно d. Очевидно, максимальное число шаров, удовлетворяющих этим условиям — число n_0 шаров с плотной упаковкой вокруг данного шара с центром в точке q_1, откуда следует, что в уравнениях Кирквуда – Зальцбурга отличен от нуля лишь отрезок ряда с $n<n_0$ для всех $s\ge 1$.

Рассмотрим область $\boldsymbol{D}_{d_0}$, в которую входят точки $(q_1,\ldots,q_s)$, удовлетворяющие условиям $|q_i-q_j|>d_0,\ (i,j)=(1,\ldots,s)$, т. е.

$$\boldsymbol{D}_{d_0} = D\big((q_1,\ldots,q_s)|\ |q_i-q_j|>d_0,\ (i,j)=(1,\ldots,s)\big),$$

где d_0 — произвольное фиксированное число, $d_0>d$.

Лемма 1. *Для произвольного как угодно малого фиксированного* $d_0>d$ *и* $(q_1,\ldots,q_s)\in\boldsymbol{D}_{d_0}$ *функции распределения в произвольном* n*-м порядке теории возмущений (по* $\tilde z$*)*

$$F_s^{d^{(n)}}(q_1,\ldots,q_s) = ((\tilde z K_d)^{n-1}\tilde z F_0)_s(q_1,\ldots,q_s)$$

при достаточно малом d *становятся равными постоянным, не зависящим от* d.

Доказательство. Известно, что оператор K_d действует в пространстве E_ξ согласно формуле

$$(K_d f)_s((q)_s) = \tilde z\exp\left\{-\beta\sum_{i=2}^{s}\Phi(q_1-q_i)\right\}f_{s-1}((q)_s^1) +$$

$$+\ \exp\left\{-\beta\sum_{i=2}^{s}\Phi(q_1-q_i)\right\}\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(d^3)^n}\int\prod_{i=1}^{n}(e^{-\beta\Phi(q_1-y_i)}-1)\,f_{s-1+n}((q)_s^1,(y)_n)\,d(y)_n.$$

Пусть первое слагаемое — это результат действия оператора K_1, а второе — результат действия оператора K_2. Тогда

$$(K_d f)_s((q)_s) = (K_1 f)_s((q)_s) + (K_2 f)_s((q)_s). \tag{8}$$

Выражение $((\tilde z K_d)^{n-1}\tilde z F_0)_s(q_1,\ldots,q_s)$ представляется в виде суммы кратных интегралов от произведения функций вида $e^{-\beta\Phi}-1$ и $e^{-\beta\Phi}$, причем оператору K_2 соответствуют ядра

$$\prod_{i=1}^{k}(e^{-\beta\Phi(q_j-y_i)}-1)$$

и

$$\prod_{i=1}^{l}(e^{-\beta\Phi(y_j-y_i)}-1),\quad j\in(1,\ldots,s),$$

а оператору K_1 соответствуют множители $\exp\{-\beta\sum\Phi(\cdot-\cdot)\}$, где аргументы могут быть как из числа q_i, так и y_j. Напомним, что по переменным y ведется интегрирование. Исследуем этот кратный интеграл. Назовем точки q_j и y_j центрами соответствующих ядер. Центры, по которым ведется интегрирование, обозначим через $y_{\mathbb{J}}$ и будем их нумеровать римскими числами y_{I}, $y_{\mathrm{II}}, \ldots$; при этом номера увеличиваются для центров ядер операторов K_2 в направлении справа налево.

Центр y_{I} связан определенным образом с одной из точек из числа $(q_1, \ldots$ $\ldots, q_s)$. Действительно, точка y_{I} входит обязательно в ядро с центром в точке y_{II}, потому что мы интегрируем по y_{I}, а это возможно только в том случае, когда точка y_{I} находится среди аргументов ядра оператора K_2, стоящего левее от оператора K_2 с ядром, имеющим центр в y_{I}. Из того, что y_{I} входит в ядро с центром в y_{II}, следует $|y_{\mathrm{I}}-y_{\mathrm{II}}|\le d$. Точка y_{II} является аргументом ядра с центром в точке y_{III} и поэтому $|y_{\mathrm{II}}-y_{\mathrm{III}}|\le d$. Продолжая эти рассуждения, после конечного числа аналогичных шагов заключаем, что некоторый центр $y_{\mathbb{J}}$ является аргументом ядра с центром в q_i, $i\in(1, \ldots, s)$. Поэтому $|y_{\mathbb{J}}-q_i|\le d$, и мы получаем цепочку неравенств

$$|y_{\mathrm{I}}-y_{\mathrm{II}}| \le d, \quad |y_{\mathrm{II}}-y_{\mathrm{III}}| \le d, \ldots, \; |y_{\mathbb{J}}-q_i| \le d. \tag{9}$$

Проделывая эту процедуру со всеми центрами ядер в точках y, получаем цепочки неравенств аналогичного типа, которые завершаются в других точках из числа $(q_1, \ldots, q_s)$.

Таким образом, все центры ядер в точках y распадаются на группы, которые удовлетворяют цепочкам неравенств (9), завершающихся в точках из числа $(q_1, \ldots, q_s)$. Соответствующие точки из числа $(q_1, \ldots, q_s)$ назовем притягивающими центрами для своих групп центров в точках y (так как при действии оператора K_d аргументы $(q_1, \ldots, q_s)$ сдвигаются на единицу влево, то одна и та же точка q не может быть притягивающим центром разных групп).

Из приведенной выше цепочки неравенств (9) следует, что расстояние от точек каждой группы к своему притягивающему центру кратно d. В свою очередь, расстояние между различными притягивающими центрами $|q_i-q_j|\ge d_0$, $(i,j)\in(\overline{1,s})$, $d_0>d$. Поэтому расстояние между центрами, принадлежащими группам с разными притягивающими центрами, может быть сделано больше, чем d при достаточно малом d и фиксированном d_0. Одновременно и аргументы ядер этих различных групп находятся на расстоянии, большем чем d. Это, в свою очередь, означает, что все факторы вида $e^{-\beta\Phi(y_i-y_j)}$, где y_i и y_j являются аргументами ядер с центрами, принадлежащими группам с различными притягивающими центрами, равны единице, так как $|y_i-y_j|>d$.

Равны единице также факторы вида $e^{-\beta\Phi(q_i-y_j)}$, где q_i не является притягивающим центром центров ядер с аргументами y_j. Равны единице и факторы вида $e^{-\beta\Phi(q_i-q_j)}$, так как $|q_i-q_j|\ge d_0$.

Из всего изложенного выше следует, что при $(q_1, \ldots, q_s)\in \boldsymbol{D}_{d_0}$ и достаточно малом d выражение $((\tilde{z}K_d)^{n-1}\tilde{z}F_0)_s(q)_s$ равно произведению кратных интегралов, а каждый интеграл, в свою очередь, представляется в виде произведения ядер

$$\prod_{i=1}^{k}\left(e^{-\beta\Phi(q_j-y_i)}-1\right),$$

$$\prod_{i=1}^{l} (e^{-\beta\Phi(y_j - y_i)} - 1)$$

и факторов $e^{-\beta\Phi(y_i - y_j)}$, где y_i и y_j являются аргументами ядер с центрами, принадлежащими к одной группе со своим притягивающим центром. Таким образом, подынтегральная функция в каждом интеграле зависит лишь от аргументов ядер, центры которых принадлежат к одной группе со своим притягивающим центром.

Каждый из кратных интегралов схематически представляется следующим образом:

$$V_d(q_1) = \frac{1}{(d^3)^{n_1 + n_{\mathbb{J}} + \ldots + n_{\mathrm{I}}}} \times$$

$$\times \int \prod_{i=1}^{n_1} (e^{-\beta\Phi(q_1 - y_i)} - 1) \prod_{k=1}^{n_{\mathbb{J}}} (e^{-\beta\Phi(y_{\mathbb{J}} - y_k)} - 1) \times \ldots$$

$$\ldots \times \prod_{l=1}^{n_{\mathrm{I}}} (e^{-\beta\Phi(y_{\mathrm{I}} - y_l)} - 1) \prod_{(i_1, i_2) \in (1, \ldots, n_1)} e^{-\beta\Phi(y_{i_1} - y_{i_2})} \times$$

$$\times \prod_{(k_1, k_2) \in (1, \ldots, n_{\mathbb{J}})} e^{-\beta\Phi(y_{k_1} - y_{k_2})} \times \ldots$$

$$\ldots \times \prod_{(l_1, l_2) \in (1, \ldots, n_{\mathrm{I}})} e^{-\beta\Phi(y_{l_1} - y_{l_2})} d(y)_{n_1} d(y)_{n_{\mathbb{J}}} \ldots d(y)_{n_{\mathrm{I}}}. \qquad (10)$$

Кроме того, подынтегральное выражение в (10) может зависеть от факторов вида $e^{-\beta\Phi(y_i - y_j)}$, где y_i, y_j принадлежат множествам из числа $(y)_{n_1}$, $(y)_{n_{\mathbb{J}}}$, … …, $(y)_{n_{\mathrm{I}}}$.

Заметим, что функция $V_d(q_1)$ трансляционно-инвариантна, т. е. $V_d(q_1 + a) = V_d(q_1)$, где a — произвольный вектор. Для доказательства этого факта в выражении для $V_d(q_1)$ следует сделать замену q_1 на $q_1 + a$ с одновременной заменой переменных интегрирования y_i на $y_i + a$.

В силу трансляционной инвариантности кратный интеграл $V_d(q_1)$ не зависит от аргумента притягивающего центра и поэтому является постоянной относительно него, т. е. $V_d(q_1) = V_d$. Это, в свою очередь, означает, что и $((\tilde{z} K_d)^{n-1} \tilde{z} F_0)_s (q)_s$ не зависит от $(q)_s$. Нам осталось доказать, что $((\tilde{z} K_d)^{n-1} \tilde{z} F_0)_s (q)_s$ не зависит и от d. Для этого рассмотрим доказательство следующего утверждения.

Лемма 2. *Функция V_d не зависит от d, т. е. $V_d = V_{d/\lambda}$ при произвольном $\lambda > 0$.*

Доказательство. В выражении для $V_d(q)$ сделаем замену $q = \tilde{q}\lambda$. Для переменных интегрирования введем подстановку $y_i = \tilde{y}_i\lambda$, $d(y)_n = \lambda^{3n} d(\tilde{y})_n$. Тогда

$$V_d(\tilde{q}\lambda) = \frac{1}{(d^3)^{n_1 + n_{\mathbb{J}} + \ldots + n_{\mathrm{I}}}} \times$$

$$\times \int \prod_{i=1}^{n_1} (e^{-\beta\Phi^d(\lambda\tilde{q}_1 - \lambda\tilde{y}_i)} - 1) \prod_{\mathbb{J}=1}^{n_{\mathbb{J}}} (e^{-\beta\Phi^d(\lambda\tilde{y}_i - \lambda\tilde{y}_{\mathbb{J}})} - 1) \times \ldots$$

$$\ldots \times \prod_{l=1}^{n_{\mathrm{I}}} (e^{-\beta\Phi^d(\lambda\tilde{y}_{\mathrm{I}} - \lambda\tilde{y}_l)} - 1) \prod_{(i_1, i_2) \in (1, \ldots, n_1)} e^{-\beta\Phi^d(\lambda\tilde{y}_{i_1} - \lambda\tilde{y}_{i_2})} \times$$

$$\times \prod_{(j_1, j_2) \in (1, \ldots, n_{\mathrm{J}})} e^{-\beta\Phi^d(\lambda\tilde{y}_{j_1} - \lambda\tilde{y}_{j_2})} \times \ldots$$

$$\ldots \times \prod_{(l_1, l_2) \in (1, \ldots, n_{\mathrm{I}})} e^{-\beta\Phi^d(\lambda\tilde{y}_{l_1} - \lambda\tilde{y}_{l_2})} \lambda^{3n_1} \lambda^{3n_{\mathrm{J}}} \ldots \lambda^{3n_{\mathrm{I}}} d(\tilde{y})_{n_1} \ldots d(\tilde{y})_{n_{\mathrm{I}}}.$$

Рассмотрим некоторые свойства функций $e^{-\beta\Phi^d}$ и $e^{-\beta\Phi^d} - 1$. Имеем

$$e^{-\beta\Phi^d(\lambda y_i - \lambda y_j)} = \begin{cases} 1, & |y_i\lambda - y_j\lambda| > d \\ 0, & |y_i\lambda - y_j\lambda| < d \end{cases} =$$

$$= \theta(|y_i\lambda - y_j\lambda| - d) =$$

$$= \theta\left(|y_i - y_j| - \frac{d}{\lambda}\right) = e^{-\beta\Phi^{d/\lambda}(y_i - y_j)}, \tag{11}$$

$$|e^{-\beta\Phi^d(\lambda y_i - \lambda y_j)} - 1| = \begin{cases} 1, & |y_i\lambda - y_j\lambda| < d \\ 0, & |y_i\lambda - y_j\lambda| > d \end{cases} =$$

$$= \theta(d - |y_i\lambda - y_j\lambda|) =$$

$$= \theta\left(\frac{d}{\lambda} - |y_i - y_j|\right) = |e^{-\beta\Phi^{d/\lambda}(y_i - y_j)} - 1|, \tag{12}$$

$$\theta(x) = 1, \quad x > 0, \quad \theta(x) = 0, \quad x < 0.$$

Таким образом, равенства (11) и (12) означают, что

$$e^{-\beta\Phi^d(\lambda y_i - \lambda y_j)} = e^{-\beta\Phi^{d/\lambda}(y_i - y_j)},$$

$$|e^{-\beta\Phi^d(\lambda y_i - \lambda y_j)} - 1| = |e^{-\beta\Phi^{d/\lambda}(y_i - y_j)} - 1|.$$

Отсюда получаем

$$V_d(\tilde{q}\lambda) = \frac{1}{(d/\lambda)^{3(n_1 + n_{\mathrm{J}} + \ldots + n_{\mathrm{I}})}} \int \prod_{i=1}^{n_1} (e^{-\beta\Phi^{d/\lambda}(\tilde{q} - \tilde{y}_i)} - 1) \times$$

$$\times \prod_{\mathrm{J}=1}^{n_{\mathrm{J}}} (e^{-\beta\Phi^{d/\lambda}(\tilde{y}_i - \tilde{y}_{\mathrm{J}})} - 1) \ldots \prod_{l=1}^{n_{\mathrm{I}}} (e^{-\beta\Phi^{d/\lambda}(\tilde{y}_{\mathrm{I}} - \tilde{y}_l)} - 1) \times$$

$$\times \prod_{(i_1, i_2) \in (1, \ldots, n_1)} e^{-\beta\Phi^{d/\lambda}(\tilde{y}_{i_1} - \tilde{y}_{i_2})} \prod_{(j_1, j_2) \in (1, \ldots, n_1)} e^{-\beta\Phi^{d/\lambda}(\tilde{y}_{j_1} - \tilde{y}_{j_2})} \times \ldots$$

$$\ldots \times \prod_{(l_1, l_2) \in (1, \ldots, n_1)} e^{-\beta\Phi^{d/\lambda}(\tilde{y}_{l_1} - \tilde{y}_{l_2})} d(y)_{n_1} d(y)_{n_{\mathrm{J}}} \ldots d(y)_{n_{\mathrm{I}}}. \tag{13}$$

Напомним, что $\tilde{q} = q/\lambda$, $\tilde{y}_i = y_i/\lambda$. Тогда из (9) следует $V_d(q) = V_{d/\lambda}(q/\lambda)$.

Итак, функция $V_d(q)$ не зависит от q, $V_d(q) = V_d$, и, в свою очередь, постоянная V_d не зависит от d, ибо $V_d = V_{d/\lambda}$ при произвольном $\lambda > 0$. Лемма 2 доказана.

Так как

$$F_s^{d(n)}(q_1, \ldots, q_s) = ((\tilde{z} K_d)^{n-1} \tilde{z} F^0)_s (q_1, \ldots, q_s)$$

представимо в виде произведения кратных интегралов $V_d(q_1)\,V_d(q_2)\,\ldots\,V_d(q_s)$, каждый из которых является постоянной, не зависящей от d при достаточно малом d, то и $F_s^d((q)_s)$ не зависит от $(q)_s$ и d. Лемма 1 доказана.

Замечание. В том случае, когда одно из слагаемых в выражении для $((\tilde{z}\,K_d)^{n-1}\tilde{z}\,F^0)_s(q_1,\ldots,q_s)$ не содержит ядер, доказательство леммы 1 очень простое, ибо это слагаемое равно произведению $e^{-\beta\Phi(q_i-q_j)}$, которые равны единице, если $(q_1,\ldots,q_s)\in \boldsymbol{D}_{d_0}$.

3. Предел функций распределения при $d\to 0$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *При $|\tilde{z}|<3(\pi e)^{-1}/4$ функции распределения $F_s^d(q_1,\ldots,q_s)$, $s=1,2,\ldots$, при $d\to 0$, $(q_1,\ldots,q_s)\in \boldsymbol{D}_{d_0}$ и как угодно малом d_0 становятся постоянными.*

Доказательство. В лемме 1 установлено, что $F_s^{d^{(n)}}(q_1,\ldots,q_s)$ при $d\to 0$ становятся постоянными, не зависящими от $(q_1,\ldots,q_s)$, при $(q_1,\ldots,q_s)\in$ $\in \boldsymbol{D}_{d_0}$, и произвольном $d_0>d$. Обозначим эту постоянную через $F_s^{0^{(n)}}$.

Другими словами, существует предел

$$\lim_{d\to 0} F_s^{d^{(n)}}(q_1,\ldots,q_s) \;=\; F_s^{0^{(n)}}$$

для каждого n при $(q_1,\ldots,q_s)\in \boldsymbol{D}_{d_0}$ и произвольного как угодно малого d_0.

Рассмотрим ряды

$$F_s^d(q_1,\ldots,q_s) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} F_s^{d^{(n)}}(q_1,\ldots,q_s) \tag{14}$$

и

$$F_s^0 \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} F_s^{0^{(n)}}. \tag{15}$$

При $|\tilde{z}|<3(\pi e)^{-1}/4$ оба ряда сходятся (первый равномерно по $(q_1,\ldots,q_s)$), так как оценки нормы оператора K_d не зависят от d. Тогда для любого как угодно малого $\varepsilon>0$ существует такой номер n_0, что

$$\left|\sum_{n=n_0}^{\infty} F_s^{d^{(n)}}(q_1,\ldots,q_s)\right| \;<\; \varepsilon$$

и

$$\left|\sum_{n=n_0}^{\infty} F_s^{0^{(n)}}\right| \;<\; \varepsilon,$$

при этом первое неравенство справедливо при всех d.

Из леммы 1 следует, что при достаточно малом d и $(q_1,\ldots,q_s)\in \boldsymbol{D}_{d_0}$

$$\sum_{n=0}^{n_0} F_s^{d^{(n)}}(q_1,\ldots,q_s) \;=\; \sum_{n=0}^{n_0} F_s^{0^{(n)}},$$

более того, $F_s^{d^{(n)}}(q_1,\ldots,q_s) \;=\; F_s^{0^{(n)}}$.

Это означает, что для произвольного как угодно малого ε существует такое малое d, что при $(q_1,\ldots,q_s)\in \boldsymbol{D}_{d_0}$

$$|F_s^d(q_1, \ldots, q_s) - F_s^0| < \varepsilon,$$

т. е.

$$\lim_{d \to 0} F_s^d(q_1, \ldots, q_s) = F_s^0;$$

при этом сходимость равномерная по $(q_1, \ldots, q_s) \in \boldsymbol{D}_{d_0}$. Теорема доказана.

4. Определение функций распределения F_s^0 через F_1^0. Вернемся к теореме 2. Результаты теоремы показывают, что функции распределения $F_s^d(q_1, \ldots, q_s)$ сходятся при $d \to 0$ к постоянной F_s^0 равномерно по $q_1, \ldots, q_s$ извне некоторой окрестности гиперплоскостей $q_i = q_j$, $(i, j) = (1, \ldots, s)$.

Покажем, что все постоянные F_s^0 при $s > 1$ определяются через одну константу F_1^0. Для этого воспользуемся известными условиями согласованности и условиями ослабления корреляции, или, как еще говорят, кластерными свойствами для функций распределения.

Рассмотрим условие кластерности [3, 4] для функций распределения $F_s^d((q)_s)$, согласно которому последовательности $F^d = (F_1^d(q_1), \ldots F_s^d((q)_s), \ldots)$ сопоставляется последовательность $g_1(q_1) \ldots g_s((q_s))$ с помощью формул

$$F_s^d(q_1, \ldots, q_{s-1}, q_s) = F_s^d(Q) = \sum g(Q_1) \ldots g(Q_k), \tag{16}$$

$$g(Q_1) = g_{n_1}(q_{i_1}, \ldots, q_{i_{n_1}}), \quad g(Q_k) = g_{n_k}(q_{j_1}, \ldots, q_{j_{n_k}}),$$

где суммирование происходит по всевозможным разбиениям последовательности Q на k подмножеств $Q_1, \ldots, Q_k$ $(1 \le k \le s)$, причем $Q = \bigcup_{r=1}^{k} Q_r$, $n_1 + \ldots + n_k = s$, а функции g_i последовательности g являются трансляционно-инвариантными и удовлетворяют условию

$$\int |g_i(q_1, \ldots, q_i)| \, d(q_1 - q_i) \ldots d(q_{i-1} - q_i) =$$

$$= \lim_{\Lambda \to \mathbb{R}^\nu} \frac{1}{V(\Lambda)} \int_{\Lambda^i} |g_i(q_1, \ldots, q_i)| \, dq_1 \ldots dq_i < \infty. \tag{17}$$

Из этих условий следует

$$\lim_{\Lambda \to \mathbb{R}^\nu} \frac{1}{V(\Lambda)} \int_{\Lambda} g_i(q_1, \ldots, q_i) \, dq_i = 0 \quad \text{при} \quad i > 1 \tag{18}$$

и $g_1(q_1) = g_1 = \text{const}$.

Для функции распределения при каждом d справедливо условие согласованности

$$\lim_{\Lambda \to \mathbb{R}^\nu} \frac{1}{V(\Lambda)} \int_{\Lambda} F_s^d(q_1, \ldots, q_{s-1}, q_s) \, dq_s = F_{s-1}^d(q_1, \ldots, q_{s-1}) \, g_1. \tag{19}$$

Доказательство условия (19) состоит в том, что функции распределения $F_s^d(q_1, \ldots, q_s)$ можно представить в виде

$$F_s^d(q_1, \ldots, q_s) = g_1(q_s) \, F_{s-1}^d(q_1, \ldots, q_{s-1}) + M_s(q_1, \ldots, q_s),$$

где функция $M_s(q_1, \ldots, q_s)$ представляется в виде, аналогичном представлению (16) для $F_s^d(q_1, \ldots, q_s)$, только в представлении для M_s отсутствует разбиение, содержащее одну точку q_s, т. е. точка q_s обязательно входит в разбиение, где есть еще хотя бы одна точка из числа $(q_1, \ldots, q_s)$ и, в силу (18), вклад от M_s в (19) равен нулю.

Применяя повторно условие согласованности (19) для F_{s-1}^d, F_{s-2}^d, ... , получаем следующее условие согласованности:

$$\lim_{\Lambda \to \mathbb{R}^\nu} \frac{1}{V(\Lambda)^s} \int_{\Lambda^s} F_s^d(q_1, \ldots, q_s)\, dq_1 \ldots dq_s = g_1^s. \tag{20}$$

Мы уже доказали, что функция $F_s^d(q_1, \ldots, q_s)$ при $d \to 0$ стремится к постоянной для всех $q_1, \ldots, q_s$ из D_{d_0} при как угодно малом d_0. Покажем, что из (20) следует, что $F_s^d(q_1, \ldots, q_s)$ равна g_1^s на упомянутом выше компакте D_{d_0}.

Разобьем область интегрирования в (20) на две части: D_{d_0} и его дополнение $\Lambda^s \backslash D_{d_0}$. Тогда

$$\lim_{\Lambda \to \mathbb{R}^\nu} \frac{1}{V(\Lambda)^s} \int_{\Lambda^s} F_s^d(q_1, \ldots, q_s)\, dq_1 \ldots dq_s =$$
$$= \lim_{\Lambda \to \mathbb{R}^\nu} \frac{1}{V(\Lambda)^s} \int_{D_{d_0}} F_s^d(q_1, \ldots, q_s)\, dq_1 \ldots dq_s +$$
$$+ \lim_{\Lambda \to \mathbb{R}^\nu} \frac{1}{V(\Lambda)^s} \int_{\Lambda^s \backslash D_{d_0}} F_s^d(q_1, \ldots, q_s)\, dq_1 \ldots dq_s. \tag{21}$$

Второе слагаемое в (21) меньше либо равно

$$\frac{|\tilde{z}|}{1-k} \xi^s \frac{V(\Lambda)^s - V(D_{d_0})}{V(\Lambda)^s}$$

(на основании оценки (7)). Первое слагаемое равно $\dfrac{V(D_{d_0})}{V(\Lambda)^s} F_s^0$ при достаточно малом d.

Так как

$$\frac{V(D_{d_0})}{V(\Lambda)^s} \to 1$$

при $\Lambda \to \mathbb{R}^\nu$, то второе слагаемое стремится к нулю при $\Lambda \to \mathbb{R}^\nu$, а первое слагаемое при $\Lambda \to \mathbb{R}^\nu$ стремится к $F_s^0 = \text{const}$. Учитывая условие согласованности (20), окончательно имеем $F_s^0 = g_1^s = (F_1^0)^s$.

Один из авторов (Д. Я. Петрина) выражает признательность профессору Г. Стеллу и профессору Я. Полевчаку из университета Стоуни Брук, обративших его внимание на постановку рассмотренной в настоящей статье проблемы.

1. *Lanford O. E.* Time evolution of large classical systems // Lect. Notes Phys. – 1975. – № 38. – P. 1–111.
2. *Gerasimenko V. I., Petrina D. Ya.* Existence of Boltzmann–Grad limit for an infinite hard sphere system // Theor. Math. Fiz. – 1990. – **83**, № 1. – P. 92–114.
3. *Ruelle D.* Statistical mechanics. Rigorous Results. – New York–Amsterdam: Benjamen, 1970. – 200 p.
4. *Petrina D. Ya., Gerasimenko V. I., Malyshev D. V.* Mathematical foundation of Classical Statistical Mechanics. – Gordon and Breach Sci. Publ., 1989. – 336 p.

Получено 06.06.96