УДК 517.9

В. І. Фущич (Ін-т математики НАН України, Київ)

СИМЕТРІЯ РІВНЯНЬ ЛІНІЙНОЇ ТА НЕЛІНІЙНОЇ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ

We describe local and nonlocal symmetries of linear and nonlinear wave equations and present a classification of nonlinear multy-dimensional equations compatible with the Galileeu principle of relativity. We propose new systems of nonlinear equations for the description of physical phenomena in classical and quantum mechanics.

Описано локальні і нелокальні симетрії лінійних та нелінійних хвильових рівнянь, класифікації нелінійних багатовимірних рівнянь, сумісних з принципом відносності Галілея. Запропоновано нові системи нелінійних рівнянь для опису фізичних процесів у класичній та квантовій механіці.

Проблема побудови нелінійних математичних моделей для опису процесів у механіці, фізиці, біології є однією з головних задач математичної фізики [1–4]. Сьогодні ми не можемо вважати, що класичні рівняння Ньютона–Лоренца, Даламбера, Нав'є–Стокса, Максвелла, Шродінгера, Дірака та інші рівняння руху послідовно і повно описують реальні фізичні процеси. У зв'язку з цим досить сказати, що нині ми не знаємо жодного рівняння руху в квантовій механіці для двох частинок, яке було б сумісне з принципом відносності Лоренца–Пуанкаре–Айнштайна. Широкий спектр рівнянь, які запропоновані багатьма дослідниками, як правило, мають принципові недоліки і часто призводять до абсурдних фізичних наслідків.

Характерна особливість сучасного математичного опису реальних процесів полягає у тому, що рівняння руху для частинок, хвиль, полів є складними нелінійними системами диференціальних і інтегро-диференціальних рівнянь. Як будувати такі рівняння? Як розв'язувати і досліджувати такі системи? Очевидно, що підхід Лагранжа–Ойлера (механічний у своїй основі) до побудови рівняння руху у багатьох випадках є обмеженим. Досить нагадати, що в рамках класичного методу Лагранжа–Ойлера неможливо одержати без переходу до потенціалів рівняння Максвелла для електромагнітних хвиль.

У роботах [3–12] запропоновано нелагранжевий підхід для побудови і класифікації рівнянь руху. В основі цього підходу лежать принципи відносності Галілея та Лоренца–Пуанкаре–Айнштайна. Короткий огляд деяких результатів у цьому напрямку подається далі.

1. Короткий коментар про відкриття Шродінгера. Перш за все нагадаємо, що 70 років тому Ервін Шродінгер відкрив рівняння руху і цим самим заклав математичну основу квантової механіки. 23 червня 1926 р. Шродінгер представив до друку роботу [2], в якій запропонував рівняння

$$S\Psi = 0, \qquad S = p_0 - \frac{p_a^2}{2m} - V(t, x),$$
$$p_0 = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \qquad p_\alpha = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \quad a = 1, 2, 3, \tag{1}$$

де $\Psi = \Psi(x_0 = t,\ \bar{x})$ — комплекснозначна хвильова функція, V — потенціал.

Ця робота була останньою з серії чотирьох статей під однією назвою, в яких розв'язана проблема квантування в атомній фізиці.

Чи можна сказати, що Ервін Шродінгер вивів своє рівняння?

Знайомство з оригінальною роботою [2] дає нам однозначну відповідь на це питання. Шродінгер не вивів рівняння. Рівняння (1) було написано без обґрунтування, більш того, Шродінгер вважав, що правильним рівнянням руху в квантовій механіці повинно бути рівняння четвертого порядку для дійсної функції, а не рівняння (1) для комплексної функції. Шродінгер розглядав рівняння (1) як деяке допоміжне, проміжне рівняння, яке дає змогу спрощувати обчислення.

В основі попередніх його робіт були рівняння

$$\Delta\Psi - \frac{2(E-V)}{E^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0, \tag{2}$$

$$\Delta\Psi + \frac{8\pi^2}{\hbar^2}(E-V)\Psi = 0, \tag{3}$$

де Ψ — дійсна функція.

Коли потенціал V не залежить від часу, Шродінгер виводить з (2), (3) хвильове рівняння четвертого порядку

$$\left(\Delta - \frac{8\pi^2}{\hbar^2}V\right)^2\Psi + \frac{16\pi^2}{\hbar^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0, \tag{4}$$

де Ψ — дійсна функція.

Про рівняння (4) Шродінгер пише „…рівняння (4) є єдиним і загальним хвильовим рівнянням для польового скаляра Ψ … хвильове рівняння (4) заключає в собі закон дисперсії і може служити основою розвинутої мною теорії консервативних систем. Його узагальнення на випадок потенціалу вимагає деяку обережність … спроба перенести рівняння (4) на неконсервативні системи зустрічається з складністю, яка виникає через член $\dfrac{\partial V}{\partial t}$. Тому далі я піду по іншому шляху, більш простому з обчислювальної точки зору. Цей шлях я вважаю принципово самим правильним. (4) є рівнянням коливання пластинки."

У листі до Лорентца (6 червня 1926 р., Цюріх) Шродінгер пише: „… з рівнянь (2) і (3) ми одержуємо загальне хвильове рівняння (4), яке не залежить від константи інтегрування E. Воно точно співпадає з рівнянням коливання пластинки, яке містить квадрат оператора Лапласа. Відкриття цього простого факту забрало у мене багато часу".

У листі до Планка (14 червня 1926 р., Цюріх) Шродінгер пише: „… отже справжнім хвилюьовим рівнянням є рння четвертого порядку відносно координат …"

І далі Шродінгер виписує рівняння (1) для комплексної функції Ψ. Якраз у цьому місці статті [2] Шродінгер робить геніальний (і алогічний крок), записуючи рівняння (1) для комплексної функції.

Відносно рівняння (1) Шродінгер пише „Деяка трудність, без сумніву, виникає в застосуванні комплексних хвильових функцій. Якщо вони принципово необхідні, а не є тільки спосіб полегшення (спрощення) обчислень, то це буде означати, що існують принципово дві функції, які тільки разом дають опис стану системи … Справжнє хвильове рівняння, найбільш вірогідно, має бути рівняння четвертого порядку. Для неконсервативної системи $\left(\dfrac{\partial V}{\partial t} \neq 0\right)$ мені, одначе, не вдалось знайти таке рівняння".

З наведеного ми можемо зробити такі висновки.

***Висновок* 1.** *У* 1926 *р. Шродінгер вважав, що правильним рівнянням руху у квантовій механіці має бути рівняння четвертого порядку. Для випадку, коли потенціал не залежить від часу, це рівняння має вигляд* (4).

***Висновок* 2.** *У червні* 1926 *р. Шродінгер вважав, що рівняння* (1), *першого порядку за часом і другого порядку за просторовими змінними, для комплексної функції є проміжним (не основним); його треба використати тільки для спрощення обчислень.*

Висновок 3. *Шредінгер вважав, що у тому випадку, коли потенціал V залежить від часу, рівняння руху має бути також четвертого порядку для дійсної функції (йому його не вдалось одержати).*

Висновок 4. *Шредінгер ніколи пізніше не обговорював рівняння четвертого порядку.*

Сьогодні можна однозначно сказати, що Шредінгер помилявся відносно важливості (фундаментальності) рівнянь (1), (4). Дійсно, рівняння (1) є основним рівнянням руху квантової механіки, а рівняння (4) не може бути рівнянням руху, оскільки воно не сумісне з принципом відносності Галілея.

Це твердження є наслідком симетрійного аналізу рівнянь (1) і (4) [3]: рівняння (1) інваріантне відносно групи Галілея. У зв'язку з наведеним у наступному пункті дано відповідь на такі питання:

1. Які лінійні рівняння другого, четвертого, n-го порядку сумісні з принципом відносності Галілея?

2. Чи існують лінійні рівняння першого порядку за часовою змінною і четвертого порядку за просторовими змінними, які сумісні з принципом відносності Галілея?

Під принципом відносності Галілея ми розуміємо інваріантність (у сенсі Лі) рівняння відносно перетворень

$$t \to t' = t, \qquad \bar{x} \to \bar{x}' = \bar{x} + \bar{v}t, \tag{5}$$

коли хвильова функція перетворюється за лінійним зображенням групи (5) [4]:

$$\Psi \to \Psi' = T_g \Psi. \tag{6}$$

Перш ніж дати відповідь на сформульовані питання, наведемо добре відомі факти про локальну симетрію лінійного вільного $(V=0)$ рівняння Шредінгера (1).

Теорема 1 [3]. *Максимальною (у сенсі Лі) алгеброю інваріантності* (1) *є* 13-*вимірна алгебра Лі*

$$AG_2(1,3) = \langle P_0, P_a, J_{ab}, G_a, D, \Pi \rangle,$$

з базисними елементами

$$\begin{gathered} P_0 = i\frac{\partial}{\partial x_0} = p_0, \quad P_a = -i\frac{\partial}{\partial x_0} = p_a, \quad J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a, \\ G_a = ip_a - mx_a, \quad a = 1, 2, 3, \quad D = 2x_0 p_0 - x_a p_a, \\ \Pi = x_0^2 p_0 - x_0 x_a p_a + \frac{in}{2} x_0 - \frac{m}{2} x_a^2, \\ Q = i\left(\Psi \frac{\partial}{\partial \Psi} - \Psi^* \frac{\partial}{\partial \Psi^*}\right). \end{gathered} \tag{7}$$

Оператори G_a породжують (генерують) перетворення Галілея (5) і таке перетворення для хвильової функції:

$$\Psi \to \Psi' = \exp\left\{i\left(\bar{v}\bar{x} + \frac{\bar{v}^2 t}{2}\right)\right\}\left\{\Psi(t,x)\,|_{\bar{x}\to\bar{x}+\bar{v}t}\right\}. \tag{8}$$

Деталі доведення див. у [4] і цитованій там літературі.

Ми використовуємо наступні позначення:

$AG(1,3) = \langle P_0, P_a, J_{ab}, G_a \rangle$ — 10-вимірна алгебра Галілея;

$AG_1(1,3) = \langle P_0, P_a, J_{ab}, G_a, D \rangle$ — розширена алгебра Галілея;

$AG_2(1,3) = \langle P_0, P_a, J_{ab}, G_a, D, \Pi \rangle$ — повна алгебра Галілея;

$AE(1,3) = \langle P_0, P_a, J_{ab} \rangle$ — алгебра Евкліда;

$AE_1(1,3) = \langle P_0, P_a, J_{ab}, D \rangle$ — розширена алгебра Евкліда.

Теорема 2 [5]. *Максимальною алгеброю інваріантності рівняння* (4) $(V=0)$ *є розширена алгебра Евкліда* $AE_1(1,3)$.

З наведених теорем маємо такі наслідки.

***Наслідок* 1.** *Рівняння* (4) *несумісне з принципом відносності Галілея* (5). *Це означає, що* (4) *не може розглядатися як рівняння руху частинки (поля) в квантовій механіці. Вся множина розв'язків рівняння* (4) *не інваріантна відносно перетворень Галілея* (5), (6).

Зауважимо, що будь-який гладкий розв'язок рівняння (1) є розв'язком рівняння (4) (при $(V=0)$), тобто множина розв'язків (4) містить у собі розв'язки (2).

2. Виведення рівняння Шродінгера і рівняння високого порядку. Виведемо рівняння Шродінгера з вимоги інваріантності рівняння відносно перетворень Галілея (5), (8) і групи часових і просторових трансляцій.

Розглянемо довільне лінійне рівняння першого порядку за часом і другого порядку за просторовими змінними

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = a_{lk}(t,\bar{x})\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_l \partial x_k} + b_l(t,\bar{x})\frac{\partial\Psi}{\partial x_l} + c(t,\bar{x})\Psi, \tag{9}$$

де $a_{lk}(t,\bar{x})$, $b_l(t,\bar{x})$, $c(t,\bar{x})$ — довільні гладкі функції.

Теорема 3 [5, 6]. *Серед множини рівнянь* (9), *інваріантних відносно групи* (5) *і групи трансляцій, для комплексної функції* Ψ *є тільки одне рівняння, яке локально еквівалентне рівнянню Шродінгера* (1).

Отже, клас лінійних рівнянь, які сумісні з класичним принципом відносності Галілея, зводиться до одного рівняння (1).

***Зауваження* 1.** Якщо в (9) Ψ — дійсна функція, то єдиним рівнянням, сумісним з принципом Галілея, є рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \Delta u, \tag{10}$$

λ — довільний параметр.

В [7] запропоновано таке узагальнення рівняння $(V=0)$ Шродінгера (1):

$$(\lambda_1 S + \lambda_2 S^2 + \ldots + \lambda_n S^n)\Psi = \lambda\Psi,$$
$$S^2 = \left(p_0 - \frac{p_a^2}{2m}\right)^2, \ldots, S^n = \left(p_0 - \frac{p_a^2}{2m}\right)^n, \tag{11}$$

$\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — довільні параметри.

Рівняння (11) сумісне з принципом відносності Галілея і інваріантне відносно алгебри Галілея $AG(1,3)$, але не інваріантне відносно масштабного D і проективного Π операторів $(\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0)$.

Повну інформацію про симетрію рівняння (11) дає наступна теорема.

Теорема 4 [13]. *Серед лінійних рівнянь довільного порядку є тільки рівняння* (11), *яке інваріантне відносно алгебри* $AG(1,3)$. *У випадку, коли* $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$, *рівняння* (11) *інваріантне відносно алгебри* $AG_2(1,3)$.

Таким чином, клас лінійних галілей-інваріантних рівнянь довільного порядку досить вузький і зводиться до рівняння (11). Всі інші галілей-інваріантні рівняння локально еквівалентні рівнянню (11).

3. Алгебра Лоренца для рівняння Шродінгера. Лінійне рівняння Шродінгера (коли $V=0$ і при деяких специфічних видах потенціалів $V(t,x)$) має крім локальної (теорема 1) і нелокальну симетрії (див. [4] і цитовану там літературу). Наведемо одну з таких незвичних (нелокальних) симетрій.

Теорема 5 [8]. *Рівняння Шродінгера* (1), (*коли* $V=0$) *інваріантне відносно алгебри Лоренца* $AL(1,3)=\langle J_{ab}, J_{0a}\rangle$, *базисні елементи якої задаються операторами*

$$
\begin{aligned}
&J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a,\\
&J_{0a} = \frac{1}{2m}(pG_a + G_a p),\\
&p \equiv \left(p_1^2+p_2^2+p_3^2\right)^{1/2} = (-\Delta)^{1/2},\\
&G_a \equiv x_0 p_a - m x_a, \quad [J_{0a}, J_{0b}] = -iJ_{ab}.
\end{aligned} \tag{12}
$$

Важливо підкреслити, що псевдодиференціальні оператори $\langle J_{0a}\rangle$ не генерують ні перетворень Лоренца, ні перетворень Галілея:

$$x_a \to x'_a = \exp\{iJ_{0a}v_a\}x_a\exp\{-J_{0b}v_b\} \neq \text{лоренц-перетворення}, \tag{13}$$

$$x_0 \to x'_a = \exp\{iJ_{0a}v_a\}x_a\exp\{-J_{0b}v_b\} = x_0. \tag{14}$$

Час при таких нелокальних перетвореннях не міняється.

4. Нелокальна галілей-симетрія еволюційного рівняння четвертого порядку. Розглянемо рівняння першого порядку за часовою змінною і четвертого порядку за просторовими змінними

$$p_0\Psi = \mathcal{H}(p^2)\Psi, \quad \mathcal{H}(p^2) = a_0 m_0 + a_2 p^2 + a_4\frac{p^4}{8}, \tag{15}$$

$p^2 = p_a^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = -\Delta$, $a_2 = 1/2m_0$, a_0, a_2, a_4, m_0 — довільні дійсні константи.

Гамільтоніан (15), коли $a_0=1$, $a_4=-m_0^{-3}$, являє собою перші три члени розкладу в ряд Тейлора релятивістського гамільтоніана

$$\mathcal{H}(p^2) = \left(p^2+m_0^2\right)^{1/2} = m_0 + \frac{p^2}{2m_0} - \frac{p^4}{8m_0^3}.$$

У випадку, коли $a_0=a_4=0$, рівняння (15) співпадає з рівнянням Шродінгера (1).

Зі стандартної (загально прийнятої) фізичної точки зору рівняння (15) не можна розглядати як рівняння руху в квантовій механіці, оскільки воно не інваріантне ні відносно групи Галілея, ні відносно групи Лоренца. Тобто ні один з відомих принципів відносності (Галілея або Лоренца–Пуанкаре–Айнштайна) не виконується для рівняння (15).

Застосовуючи метод Лі, можна довести, що максимальною алгеброю інваріантності рівняння (15) є алгебра Евкліда $AE(1,3) = \langle P_0, P_a, J_{ab}\rangle$, I — одиничний оператор. Виявляється, що крім локальної симетрії рівняння (15) має широку нелокальну симетрію. Зокрема, рівняння (15) інваріантне відносно алгебри Галілея $AG(1,3)$, базисні елементи (оператори G_a) якої задаються операторами 3-го порядку. Більш точно, справедливе наступне твердження.

Теорема 6 [9, 10]. *Рівняння* (15) *інваріантне відносно* 20*-вимірної алгебри Лі, базисні елементи якої задаються операторами*

$$P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad P_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a, \tag{16}$$

$$G_a = (iV_a - x_a)m_0, \tag{17}$$

$$V_a = \frac{1}{m_a}\left(1 + a_4\frac{p^2}{2m_0^2}\right)p_a, \tag{18}$$

$$R_{ab} = a_4\left(P_a P_b + \frac{1}{2}\delta_{ab}P^2\right). \tag{19}$$

Оператори (16)–(19) задовольняють комутаційні співвідношення

$$[J_{ab}, G_c] = i(\delta_{ac}G_b - \delta_{bc}G_a),$$

$$[P_a, G_b] = i\delta_{ab}I, \quad [G_a, G_b] = 0,$$

$$[P_0, G_a] = iV_a, \quad [V_a, G_b] = i(R_{ab} - a_2\delta_{ab}I),$$
$$[J_{ab}, R_{cd}] = i(\delta_{ac}R_{bd} + \delta_{bd}R_{ac} - \delta_{bc}R_{ad} - \delta_{ad}R_{bc}),$$

$$[J_{ab}, V_c] = i(\delta_{ac}V_b - \delta_{bc}V_a),$$

$$[G_a, R_{bc}] = ia_4(\delta_{ab}P_c + \delta_{bc}P_a + \delta_{ac}P_b).$$

Підкреслимо, що оператори (17)–(19) є операторами третього і другого порядку, а це означає, що вони породжують нелокальні перетворення. Так, оператори Галілея G_a генерують стандартні локальні перетворення для часу і координат

$$t \to t' = \exp(iu_aG_a)\,t\exp(-iu_bG_b) = t,$$
$$x_a \to x'_a = \exp(iv_bG_b)\,x_a\exp(-v_lG_l) = x_a + v_at,$$

і нелокальні перетворення для хвильової функції [3]

$$\Psi(x) \to \Psi'(x) = \exp\left\{im_0\left(x_au_a + \frac{\vec{u}^2}{2}t - \frac{1}{2}a_4\,tu_a\,P_aP^2\right)\right\}\Psi. \tag{20}$$

Як добре відомо, швидкість частинки в релятивістській механіці визначається за формулою

$$v_a = \frac{p_a}{m}, \quad m = m(\vec{v}^2), \quad m = m_0(1 - v^2)^{-1/2}. \tag{21}$$

У механіці, побудованій на базі рівняння (15), відповідна формула має вигляд

$$v_a = \frac{p_a}{m_0} + \frac{a_4p^2}{2}p_a. \tag{22}$$

Якщо швидкість частинки задати формулою (21) і використати (22), то ми одержуємо формулу залежності маси, в новій механіці, від швидкості

$$\frac{m}{m_0} + \frac{a_4}{2}m^3v^3 - 1 = 0. \tag{23}$$

Розв'язавши кубічне рівняння (23), одержимо (в залежності від знака коефіцієнта a_4) такі формули:

$$m = m_0 \frac{3}{\omega} \sin\left\{\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\sqrt{1-\omega^2}}\right\}, \quad a_4 < 0, \quad \omega \neq 1, \tag{24}$$

$$m = m_0 \frac{3}{\omega} \operatorname{sh}\left\{\frac{1}{3} \ln\left(\omega + \sqrt{1+\omega^2}\right)\right\}, \quad a_4 > 0, \tag{25}$$

$$\omega = \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} (\bar{v})^2 \sqrt{m_0^3 |a_4|}.$$

Отже, у квантовій механіці, побудованій на базі рівняння (15), виконується нестандартний принцип відносності Галілея (формула (20)) і маса частинки (поля) залежить від швидкості згідно з формулами (24), (25).

5. Принцип відносності Галілея і нелінійні рівняння типу Шродінгера. За останні роки багато авторів, виходячи з різних мотивів і міркувань, запропонували широкий спектр нелінійних узагальнень рівнянь Шродінгера. Частина нелінійних рівнянь, запропонованих для опису нелінійних ефектів у плазмі, оптиці, квантовій механіці, не задовольняють принципу відносності Галілея. У зв'язку з цим у роботах [3, 4, 6, 7, 11] проведено симетрійну класифікацію нелінійних рівнянь типу Шродінгера, які інваріантні відносно групи Галілея та різних її розширень.

У цьому пункті наведемо деякі результати про класифікацію нелінійних рівнянь типу Шродінгера, які мають таку ж симетрію (або ширшу), як і лінійне рівняння Шродінгера (1).

Розглянемо нелінійне рівняння другого порядку

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta\Psi + i\frac{\Delta\varphi(\Psi^*\Psi)}{2\Psi^*\Psi}\Psi = F\left(\Psi^*\Psi, \left(\bar{\nabla}\left(\Psi^*\Psi\right)\right)^2, \Delta\left(\Psi^*\Psi\right)\right)\Psi, \tag{26}$$

де φ, F — довільні гладкі функції.

Теорема 7 [7, 11]. *Рівняння (26) у випадку, коли $\varphi = 0$, а функція $F(\Psi^*\Psi)$ не залежить від похідних, інваріантне відносно повної алгебри $AG_2(1, n)$ з базисними елементами (7) тоді і тільки тоді, коли*

$$F(\Psi^*\Psi) = \lambda |\Psi|^{4/n}, \tag{27}$$

n — число просторових змінних.

Теорема 8 [12]. *Рівняння (26) інваріантне відносно алгебри $AG_2(1, n)$ і оператора I тоді і тільки тоді, коли*

$$F\left(\Psi^*\Psi, \left(\bar{\nabla}(\Psi^*\Psi)\right)^2, \Delta(\Psi^*\Psi)\right) = \frac{\Delta|\Psi|}{|\Psi|} N\left(\frac{|\Psi|\Delta|\Psi|}{\left(\bar{\nabla}|\Psi|\right)^2}\right),$$
$$\varphi(\Psi^*\Psi) = |\Psi|^2, \tag{28}$$

де N — довільна гладка функція.

У випадку, коли $N = 1/2$, $\varphi = 0$, рівняння (26) набуває вигляду

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta\Psi = \frac{1}{2}\frac{\Delta|\Psi|}{|\Psi|}\Psi. \tag{29}$$

Рівняння (29) запропоновано в роботах [14–18]. Воно має унікальну симетрію.

Теорема 9 [19]. *Рівняння (29) інваріантне відносно алгебри Лі з базисними операторами*

$$\begin{aligned}
&P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad P_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \quad I = \Psi\frac{\partial}{\partial \Psi} + \Psi^*\frac{\partial}{\partial \Psi^*},\\
&J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a, \quad a, b = 1, 2, \ldots, n,\\
&G_a = tP_a + \frac{x_a}{2}Q, \quad Q = i\left(\Psi\frac{\partial}{\partial \Psi} - \Psi^*\frac{\partial}{\partial \Psi^*}\right),\\
&D = 2tP_0 + x_a P_a - \frac{n}{2}I,\\
&\Pi = t^2 P_0 + t x_a P_a + \frac{|\bar{x}|}{4}Q - \frac{nt}{2}I,
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
&G_a^{(1)} = -i\ln\frac{\Psi}{\Psi^*}P_a + x_a P_0, \quad D^{(1)} = -i\frac{\Psi}{\Psi^*}Q + x_a P_a,\\
&\Pi^{(1)} = -\left(\ln\frac{\Psi}{\Psi^*}\right)Q - 2i\left(\ln\frac{\Psi}{\Psi^*}\right)x_a P_a + |\bar{x}|^2 P_0 + in\left(\ln\frac{\Psi}{\Psi^*}\right)I,
\end{aligned} \tag{31}$$

$$K_a = t x_a P_0 - \left(\frac{|\bar{x}|^2}{2} + it\ln\frac{\Psi}{\Psi^*}\right)P_a + x_a x_b P_b - \frac{n}{2}x_a I - i\frac{x_a}{2}\left(\ln\frac{\Psi}{\Psi^*}\right)Q.$$

Виписана алгебра еквівалентна конформній алгебри $AG(2, n)$ в $(2+n)$-вимірному просторі Мінковського. Якщо від комплексної функції Ψ перейти до амплітуди–фази

$$\Psi = A(t, x)\exp\{i\Theta(t, x)\},$$

то наведені формули значно спрощуються. Алгебра симетрії рівняння (29) еквівалентна алгебрі симетрії класичного рівняння Гамільтона [3]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_k}.$$

Отже, нелінійне рівняння (29) має значно ширшу симетрію, ніж лінійне рівняння Шродінгера (1). Аналогічний ефект має місце і для пуанкаре-інваріантного нелінійного хвильового рівняння [16, 17]

$$\Box\Psi = \frac{\Box|\Psi|}{|\Psi|}\Psi. \tag{32}$$

6. Нелокальна симетрія лінійного пуанкаре-інваріантного хвильового рівняння. Сімдесят років тому, у 1926 р., майже одночасно сім учених: Шродінгер, де Бройль, Дондер ван Дунген, Клейн, Фок, Гордон і Кудар відкрили рівняння

$$\left(p_0^2 - p_a^2\right)u(x_0, \bar{x}) = m^2 u \tag{33}$$

для скалярної комплексної функції u. У випадку, коли $m = 0$, (33) співпадає з хвильовим рівнянням Даламбера.

Відомо, що рівняння (33) інваріантне відносно алгебри Пуанкаре $AP(1, 3)$ з базисними елементами

$$\begin{aligned}
&P_0 = p_0, \quad P_k = p_k, \quad k = 1, 2, 3,\\
&J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3,
\end{aligned} \tag{34}$$

тобто виконуються умови

$$\left[p_0^2 - p_a^2 - m^2, J_{\mu\nu}\right] = 0, \qquad \left[p_0^2 - p_a^2 - m^2, P_\mu\right] = 0. \tag{35}$$

Алгебра $AP(1,3) = \langle P_\mu, J_{\mu\nu} \rangle$ являється максимальною (у сенсі Лі) алгеброю інваріантності рівняння (33).

Оператори $\langle J_{0a} \rangle$ генерують стандартні перетворення Лоренца:

$$x_\mu \to x'_\mu = \exp(iJ_{0a}v_a)x_\mu \exp(-iJ_{0b}v_b) = \text{перетворення Лоренца.}$$

В [20] поставлено і дано позитивну відповідь на таке питання: чи має рівняння (33) додаткову симетрію, відмінну від (34)?

Щоб виявити додаткову (нелокальну) симетрію (33), перепишемо його у вигляді системи двох рівнянь першого порядку за часовою змінною і другого порядку за просторовими змінними

$$i\frac{\partial \Phi}{\partial t} = H\Phi,$$

$$H = \frac{1}{2\kappa}\left\{\left(E^2+\kappa^2\right)\sigma_1 + i\left(E^2-\kappa^2\right)\sigma_2\right\}, \tag{36}$$

$$E^2 = -\Delta + m^2, \quad \kappa \neq 0,$$

$$\Phi = \begin{pmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\end{pmatrix}, \quad \kappa\Phi_1 = i\frac{\partial u}{\partial t}, \quad \Phi_2 = u,$$

κ — довільна константа, σ_1 і σ_2 — (2×2)-вимірні матриці Паулі.

Теорема 10 [20]. *Рівняння* (36) *інваріантне відносно алгебри Пуанкаре, базисні оператори якої мають вигляд*

$$P_0^{(1)} = H, \quad P_1^{(1)} = p_k,$$
$$J_{ab}^{(1)} = x_a p_b - x_b p_a = J_{ab}, \tag{37}$$

$$J_{0b}^{(1)} = x_0 P_a - \frac{1}{2}(Hx_a + x_a H) \neq J_{0a}. \tag{38}$$

Прямою перевіркою можна переконатися, що оператори (37), (38) задовольняють умови

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} - H, J_{0a}\right] = 0,$$
$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} - H, J_{ab}\right] = 0. \tag{39}$$

Істотна різниця між операторами $J_{0a}^{(1)}$ і J_{0a} полягає у тому, що: $J_{0a}^{(1)}$ — оператори другого порядку і генерують нелокальні перетворення; J_{0a} — оператори першого порядку і генерують стандартні локальні перетворення Лоренца.

Підкреслимо, що оператори $J_{0a}^{(1)}$ генерують тотожне перетворення для часу, тобто час інваріантний відносно операторів $J_{0a}^{(1)}$:

$$t \to t' = \exp\left(iJ_{0a}^{(1)}v_a\right)t\exp\left(-iJ_{0b}^{(1)}v_b\right) = t. \tag{40}$$

Просторові перетворення змінних x_a, які генеруються операторами $J_{0a}^{(1)}$, не співпадають з перетвореннями Лоренца:

$$x_k \to x'_k = \exp\left(iJ_{0a}^{(1)}v_a\right)x_k \exp\left(-iJ_{0b}^{(1)}v_b\right) \neq \text{перетворення Лоренца.} \tag{41}$$

Таким чином, ми встановили, що множина розв'язків рівняння (33) має дуальну симетрію:

1. Лоренцову (локальну) симетрію. Час змінюється при переході від однієї інерційної системи до іншої за формулами Лоренца.

2. Нелоренцову (нелокальну) симетрію (40), (41). Час не змінюється при переході від однієї інерційної системи до іншої.

7. Нелокальна галілей-симетрія релятивістського псевдодиференціального хвильового рівняння. Розглянемо псевдодиференціальне рівняння

$$p_0 u = Eu, \quad E \equiv \left(p_a^2 + m^2\right)^{1/2}, \quad u = u(x_0, \bar{x}). \tag{42}$$

Його можна розглядати як „квадратний корінь з хвильового оператора (33)" для скалярної комплексної функції u. Прямим обчисленням можна переконатися, що рівняння (42) інваріантне відносно стандартного зображення алгебри Пуанкаре (34) і неінваріантне відносно стандартного зображення алгебри Галілея (7).

Теорема 11 [9]. *Рівняння* (42) *інваріантне відносно* 11-*вимірної алгебри Галілея з такими базисними операторами:*

$$P_0^{(2)} = \frac{p^2}{2m} = -\frac{\Delta}{2m}, \qquad P_a^{(2)} = p_a = -\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad J_{ab}^{(2)} = x_a p_b - x_b p_a \equiv J_{ab},$$
$$G_a^{(2)} = t\tilde{p}_a - m x_a, \quad \tilde{p}_a \equiv \frac{m}{E} p_a, \quad E = \left(p_a^2 + m^2\right)^{1/2}. \tag{43}$$

Доведення теореми зводиться до перевірки умови інваріантності

$$[p_0 - E, Q_l]u = 0, \tag{44}$$

де Q_l — будь-який оператор з набору (43).

Оператори (43) задовольняють комутаційні співвідношення алгебри Галілея; $G_a^{(2)}$ — псевдодиференціальні оператори, які генерують, на відміну від стандартних операторів G_a, нелокальні перетворення.

Отже, множина розв'язків рівняння руху (42) для скалярної частинки (поля) з позитивною енергією має нелокальну галілеєву симетрію, алгебра Лі якої задається операторами (43).

8. Нелокальна галілей-симетрія рівняння Дірака. Відомо, що рівняння Дірака

$$p_0 \Psi = (\gamma_0 \gamma_a p_a + \gamma_0 \gamma_4 m)\Psi = H(p)\Psi \tag{45}$$

інваріантне відносно алгебри Пуанкаре з базисними операторами (див., наприклад, [3, 4])

$$P_0 = i\frac{\partial}{\partial x_0}, \quad P_k = -i\frac{\partial}{\partial x_k},$$
$$J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \quad S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]. \tag{46}$$

Рівняння Дірака, як це встановлено в роботах автора (див., наприклад, літературу в [3]) має широку нелокальну симетрію.

У цьому пункті встановимо нелокальну галілей-симетрію рівняння Дірака. Для цієї мети, наслідуючи метод [4], за допомогою інтегрального оператора

$$W = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \gamma_0 \frac{H}{E}\right),$$
$$E = \left(p_a^2 + m^2\right)^{1/2}, \quad H = \gamma_0 \gamma_a p_a + \gamma_0 \gamma_4 m \tag{47}$$

перетворимо систему чотирьох зв'язаних диференціальних рівнянь першого порядку на систему незв'язаних псевдодиференціальних рівнянь

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \gamma_0 E\Phi, \quad \gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{48}$$

$$\Phi = W\Psi, \quad \gamma_0 E = WHW^{-1}. \tag{49}$$

Встановлюючи додаткову симетрію рівняння (48), одночасно встановлюємо симетрію рівняння Дірака (45).

Теорема 12 [9]. *Рівняння* (48) *інваріантне відносно* 11-*вимірної алгебри Галілея з базисними операторами*

$$\begin{gathered} P_0^{(3)} = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}, \quad P_a^{(3)} = p_a = -\frac{\partial}{\partial x_a}, \ I, \\ J_{ab}^{(3)} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \\ G_a^{(3)} = t\tilde{p}_a - mx_a, \quad \tilde{p}_a \equiv \gamma_0 \frac{m}{E} p_a. \end{gathered} \tag{50}$$

Оператори (50) *задовольняють комутаційні співвідношення алгебри Галілея* $AG(1,3)$.

Для доведення теореми треба переконатися, що умова інваріантності

$$[p_0 - \gamma_0 E, Q_l]\Psi = 0 \tag{51}$$

виконується для довільного оператора Q_l з набору (50); $G_a^{(3)}$ — інтегральний оператор, що генерує нелокальні перетворення, які не співпадають з класичними перетвореннями Галілея.

Отже, рівняння (48), а тому й рівняння Дірака (45), має нелокальну симетрію, яка задається операторами (50). Явний вигляд операторів (50) для рівняння (45) обчислюється за формулою

$$\tilde{Q}_l = W^{-1} Q_l W. \tag{52}$$

9. Деякі нові рівняння нелінійної математичної фізики. У цьому пункті наведено серію нових нелінійних рівнянь, які можна розглядати як математичні моделі для опису нелінійних процесів у класичній та квантовій механіці, електродинаміці, гідродинаміці.

1. Рівняння Ньютона–Лоренца для зарядженої частинки природно узагальнити так:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m\bar{v}) &= \lambda_1\bar{D} + \lambda_2\bar{B} + \lambda_3(\bar{v}\times\bar{D}) + \lambda_4(\bar{v}\times\bar{B}) + \\ &+ a_1(\bar{E}\times\bar{D}) + a_2(\bar{E}\times\bar{B}) + a_3(\bar{H}\times\bar{D}) + a_4(\bar{H}\times\bar{B}), \end{aligned} \tag{53}$$

$m = m(\bar{v}^2, \bar{E}^2, \bar{H}^2, \bar{E}\bar{H}, \bar{v}\bar{E}, \bar{v}\bar{H})$ — маса частинки, яка залежить від швидкості $\bar{v}^2$ і $(\bar{E}, \bar{H})$ — електромагнітного поля, яке створює сама заряджена частинка; $(\bar{D}, \bar{B})$ — зовнішнє електромагнітне поле; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, a_1, a_2$ — деякі параметри.

У випадку, коли маса m є константою і $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, рівняння (53) співпадає з класичним рівнянням Ньютона з силою Лоренца.

Явна залежність маси від $\bar{v}^2$ і власного електродинамічного поля $(\bar{E}, \bar{H})$ може бути встановлена з вимоги інваріантності (53) відносно групи Галілея або групи Пуанкаре.

Гідроелектродинамічні узагальнення рівняння Ойлера для зарядженої частинки мають вигляд

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_l\frac{\partial}{\partial x_l}\right)m\left(\bar{v}^2, \bar{E}^2, \ldots\right)\bar{v} =$$

$$= \lambda_1\bar{D}+\lambda_2\bar{B}+a_1\left(\bar{E}\times\bar{D}\right)+a_2\left(\bar{E}\times\bar{B}\right)+\ldots, \quad l=1, 2, 3. \tag{54}$$

Пуанкаре-інваріантне рівняння для зарядженої частинки має вигляд

$$\left(v_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)m\left(v_\nu v^\nu, \bar{E}^2-\bar{H}^2, \bar{E}\bar{H}\right)v_\mu = \lambda R_{\mu\nu}v^\nu,$$

де $R_{\mu\nu}$ — антисиметричний тензор зовнішнього електромагнітного поля $(\bar{D}, \bar{B})$.

Нелокальне (псевдодиференціальне) узагальнення рівняння Ньютона для частинки можна подати у вигляді

$$\left(m^2 \frac{d^4}{dx^4}+\lambda\right)^{1/2}\bar{x}(t) = \bar{F}\left(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}, \ddot{\bar{x}}\right). \tag{55}$$

У випадку, коли параметр $\lambda = 0$, (55) співпадає з класичним рівнянням руху Ньютона.

2. Рівняння для скалярного комплексного поля u зі змінною швидкістю v можна задати так:

$$\left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hbar^2 v^2\Delta - m^2v^4\right)u = F(|u|)u, \tag{56}$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial t} + v_l\frac{\partial v_k}{\partial x_l} = g(|u|)\frac{\partial |u|}{\partial x_k}, \quad v^2 \equiv v_1^2+v_2^2+v_3^2, \tag{57}$$

$g(|u|)$ — довільна гладка функція.

Швидкість розповсюдження поля u задається рівнянням (57). Отже, хвильове рівняння (56) (і при $F(|u|) = 0$) з умовою (57) є нелінійним рівнянням. При стандартному підході $v^2 = c^2$, де c — постійна швидкість розповсюдження світла у вакуумі; у цьому випадку рівняння (56) лінійне. Явно пуанкаре-інваріантне рівняння для поля u має вигляд

$$\left(v_\mu v_\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - m^2v^4\right) = 0, \tag{58}$$

$$v_\alpha \frac{\partial v_\mu}{\partial x^\alpha} = g(|u|)\frac{\partial |u|}{\partial x_\mu}, \tag{59}$$

$$v_\mu v^\mu \equiv v_0^2-v_1^2-v_2^2-v_3^2 > 0.$$

Важливою властивістю цієї системи є те, що вона лоренц-інваріантна, швидкість поля v_μ не є сталою величиною і залежить від амплітуди і швидкості зміни амплітуди поля.

3. Стандартна класична і квантова електродинаміка побудована в термінах потенціалів A_μ. Однак до цього часу не використані інші можливості (моделі) формулювання електродинаміки. Не вводячи потенціалів, можна запропонува-

ти таку пуанкаре-інваріантну систему рівнянь для тензора електромагнітного поля $F_{\mu\nu}$ і спінорного поля Ψ:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = j_{\mu}, \quad j_{\mu} = g_1 \overline{\Psi} \gamma_{\mu} \Psi + g_2 \overline{\Psi} p_{\mu} \Psi, \tag{60}$$

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial F_{\nu\alpha}}{\partial x_{\mu}} + \frac{\partial F_{\alpha\mu}}{\partial x_{\nu}} = g\left(\frac{\partial \overline{\Psi} S_{\mu\nu} \Psi}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial \overline{\Psi} S_{\nu\alpha} \Psi}{\partial x_{\mu}} + \frac{\partial \overline{\Psi} S_{\alpha\mu} \Psi}{\partial x_{\nu}} \right),$$

$$\gamma^{\mu} \left(p_{\mu} - \gamma^{\alpha} F_{\mu\alpha} \right) \Psi = m\Psi, \quad p_{\mu} = i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}, \tag{61}$$

$$S_{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}] \equiv \frac{i}{4} (\gamma_{\mu}\gamma_{\nu} - \gamma_{\nu}\gamma_{\mu}).$$

Другу модель електродинаміки, без потенціалів, можна будувати на основі нелінійних рівнянь другого порядку

$$\Box F_{\mu\nu} = g \overline{\Psi} S_{\mu\nu} \Psi, \tag{62}$$

$$(p_{\mu} - \lambda \gamma_{\nu} F_{\mu\nu})(p^{m} - \lambda F^{\mu\alpha} \gamma_{\alpha}) \Psi = m^2 \Psi. \tag{63}$$

4. Одне з можливих нелінійних узагальнень рівнянь Максвелла для електромагнітного поля, яке розповсюджується зі змінною швидкістю v, має вигляд [21]

$$\frac{d\vec{E}}{dt} = v \operatorname{rot} \vec{H} + \vec{j}, \quad \operatorname{div} \vec{E} = \rho,$$
$$\frac{d\vec{H}}{dt} = -v \operatorname{rot} \vec{E}, \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad v = \left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \right)^{1/2}, \tag{64}$$

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_l \frac{\partial}{\partial x_l} \right) v_k + \lambda_2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_l \frac{\partial}{\partial x_l} \right)^2 v_k + \lambda_3 v_k =$$
$$= a_1 E_k + a_2 H_k + a_3 \varepsilon_{kln} E_l H_n, \quad k, l, n = 1, 2, 3, \tag{65}$$
$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + b_1 E_l \frac{\partial}{\partial x_l} + b_2 H_l \frac{\partial}{\partial x_l} + b_3 v_l \frac{\partial}{\partial x_l},$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ — функції, які залежать від інваріантів $\vec{E}^2 - \vec{H}^2$, $\vec{E}\vec{H}$, $\vec{v}^2$.

Виписана система співпадає з класичним рівнянням Максвелла при умові, що v є сталою величиною і всі $\lambda_1, \lambda_2, b_3$ рівні нулеві.

Рівняння другого порядку для електромагнітного поля $(\vec{E}, \vec{H})$ зі змінною швидкістю має вигляд

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \Delta \right) \vec{E} = c_1 \vec{E} + c_2 \vec{H} + c_3 (\vec{E} \times \vec{H}) + c_4 (\vec{v} \times \vec{E}) + c_5 (\vec{v} \times \vec{H}),$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \Delta \right) \vec{H} = d_1 \vec{E} + d_2 \vec{H} + d_3 (\vec{E} \times \vec{H}) + d_4 (\vec{v} \times \vec{E}) + d_5 (\vec{v} \times \vec{H}).$$

Швидкість $\vec{v}$ електромагнітного поля $(\vec{E}, \vec{H})$ визначається з рівняння (65).

5. Пуанкаре-інваріантне узагальнення класичного рівняння Ойлера має вигляд

$$\left(\lambda_1 L+\lambda_2 L^2\right)v_\mu = r_1 v_\mu + r_2\frac{\partial P}{\partial x_\mu} + r_3\left(v_\alpha\frac{\partial v_\nu}{\partial x_\alpha}\right)v_\mu, \tag{66}$$

$$L \equiv v_\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \quad L^2 \equiv \left(v_\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)\left(v_\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right),$$

r_1, r_2, r_3 — гладкі функції від інваріантів $v_\alpha v^\mu$, P.

Застосування наведених нелінійних рівнянь до опису конкретних фізичних процесів дає можливість уточнити довільні функції, які входять у рівняння. Вимога інваріантності до запропонованих рівнянь відносно групи Галілея, групи Пуанкаре та їх різних розширень дозволяє істотно звузити класи допустимих моделей.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 408 с.
2. *Schrödinger E.* Quantisierung als eigenwertprobleme // Annalen der Physik. – 1926. – **81**. – P. 109–139.
3. *Fushchych W., Shtelen W., Serov N.* Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993. – 436 p.
4. *Fushchych W., Nikitin A.* Symmetries of equations of quantum mechanics. – Allerton Press, 1994. – 468 p.
5. *Fushchych W.* How to extend symmetry of differential equations // Symmetry and solutions of nonlinear mathematical physics. – Kiev: Inst. Math. Ukrainian Acad. Sci., 1987. – P. 4–16.
6. *Fushchych W., Cherniha R. M.* The Galilei relativistic principle and nonlinear partial differential equations // J. Phys. A: Math. and Gen. – 1985. – **18**. – P. 3491–3503.
7. *Fushchych W.* Symmetry in problems of mathematical physics // Algebraic-theoretic studies in mathematical physics. – Kiev: Inst. Math. Ukrainian Acad. Sci., 1981. – P. 6–44.
8. *Fushchych W., Seheda Yu.* On a new invariance algebra for the free Schrödinger equation // Dokl. Acad. Sci. USSR. – 1977. – **232**, № 4. – P. 800–801.
9. *Fushchych W.* Group properties of equations of quantum mechanics // Asymptotic problems in theory of nonlinear oscillations. – Kiev: Nauk. dumka, 1977. – 75 p.
10. *Fushchych W., Nikitin A.* Group invariance for quasirelativistic equation of motion // Dokl. Acad. Sci. USSR. – 1978. – **238**, № 1. – P. 46.
11. *Fushchych W., Serov M.* On some exact solutions of the three-dimensional nonlinear Schrödinger equation // J. Phys. A: Math. and Gen. – 1987. – **20**, № 6. – P. L929.
12. *Fushchych W., Boyko V.* Continuity equation in nonlinear quantum mechanics and the Galilei relativity principle // Nonlinear Math. Phys. – 1997. – **4**, № 1–2. – P. 124–128.
13. *Fushchych W., Symenoh Z.* High-order equations of motion in quantum mechanics and Galilean relativity // J. Phys. A: Math. and Gen. – 1997. – **30**. – Lp 5.
14. *Schiller R.* Quasi-classical transformation theory // Phys. Rev. – 1962. – **125**, № 3. – P. 1109.
15. *Rosen N.* The relation between classical and quantum mechanics // Amer. J. Phys. – 1965. – **32**. – P. 597–600.
16. *Guéret Ph., Vigier J.-P.* Relativistic wave equation with quantum potential nonlinearity // Let. Nuovo Cimento. – 1983. – **35**. – P. 125–128.
17. *Guerra F., Pusterla M.* Nonlinear Klein–Gordon equation carrying a nondispersive solitonlike singularity // Ibid. – 1982. – **35**. – P. 256–259.
18. *Doebner H.-D., Goldin G. A.* Properties of nonlinear Schrödinger equations associated with diffeomorphism group representations // J. Phys. A: Math. and Gen. – 1994. – **27**. – P. 1771–1780.
19. *Fushchych W., Cherniha R., Chopyk V.* On unique symmetry of two nonlinear generalizations of the Schrödinger equation // J. Nonlinear Math. Phys. – 1996. – **3**, № 3–4. – P. 296–301.
20. *Fushchych W.* On additional invariance of the Klein–Gordon–Fock equation // Dopov. Acad. Sci. USSR. – 1976. – **230**, № 3. – P. 570–573.
21. *Fushchych W.* New nonlinear equations of electromagnetic field having velocity different from *C* // Dokl. National Acad. Sci. Ukr. – 1992. – № 4. – P. 24–27.

Одержано 27.09.96