УДК 517. 9

Д. И. Мартынюк, В. Я. Данилов, А. Н. Станжицкий (Нац. ун-т, Киев)

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ*

We prove a theorem on the existence of periodic solutions of a system of differential equations with random right-hand side and a small parameter of the form $dx/dt = \varepsilon X(t, x, \xi(t))$ in the neighborhood of the equilibrium of the averaged deterministic system $dx/dt = \varepsilon X_0(t)$.

Доведено теорему про існування періодичних розв'язків системи диференціальних рівнянь з випадковою правою частиною і малим параметром вигляду $dx/dt = \varepsilon X(t, x, \xi(t))$ в околі положення рівноваги усередненої детермінованої системи $dx/dt = \varepsilon X_0(t)$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений со случайной правой частью и малым положительным параметром ε вида

$$dx/dt = \varepsilon X(t, x, \xi(t)), \tag{1}$$

где $X(t, x, y)$ — определенная и непрерывная по совокупности переменных в $R^1 \times R^n \times R^m$ функция, периодическая по t с периодом θ; $\xi(t)$ — с вероятностью 1 непрерывный θ-периодический в узком смысле (в смысле конечномерных распределений) случайный процесс, заданный на некотором полном вероятностном пространстве (Ω, F, P). Если для всех $x \in R$ существует математическое ожидание $EX(t, x, \xi(t))$, то существует и предел

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} EX(s, x, \xi(s))\, ds = \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} EX(t, x, \xi(t))\, dt = X_0(x)$$

равномерно по t и x.

Для системы (1) рассмотрим усредненную детерминированную систему

$$dx/dt = \varepsilon X_0(t). \tag{2}$$

Вопросам близости соответствующих решений уравнений (1) и (2) на конечных интервалах времени посвящено много работ. Полученные в этом направлении результаты являются обобщением первой теоремы Н. Н. Боголюбова, обосновывающей метод усреднения [1] для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Поведение решений системы (1) на бесконечном интервале времени еще мало изучено. Отметим работы [2, 3], где исследовалась устойчивость решений системы (1) по усредненной системе (2).

В данной работе рассмотрен другой аспект теоремы Н. Н. Боголюбова — существование периодических решений системы (1) в окрестности положения равновесия системы (2).

Пусть $y = y_0$ — изолированное положение равновесия системы (2). Введем обозначения

$$B(t, x) = \int_0^t [EX(s, x, \xi(s)) - X_0(x)]\, ds,$$

$$f(t, x) = EX(t, x, \xi(t)).$$

Справедлива следующая теорема.

---

* Выполнена при частичной финансовой поддержке Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий

Теорема. *Пусть для правой части системы* (1) *выполняются условия*:

1) *существует* $L > 0$ *такое, что* $\forall\, x, x^1 \in R^n$, $t \in R^1$

$$|X(t, x, \xi(t)) - X(t, x^1, \xi(t))| \le L|x - x^1| \text{ с вероятностью } 1;$$

2) *в некоторой* ρ*-окрестности точки* y_0 *функция* $X(t, x, \xi(t))$ *дважды непрерывно дифференцируема по* x *с вероятностью* 1, *а все частные производные по* x *первого порядка удовлетворяют в этой же окрестности условию Липшица с неслучайной константой*;

3) $X(t, y_0, \xi(t))$ *и* $\partial X_i(t, y_0, \xi(t))/\partial x_j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, *не зависят от случая*;

4) *все собственные числа матрицы* $H = \partial X_0(y_0)/\partial x$ *имеют отличные от нуля действительные части.*

Тогда можно указать такое ε_0, *что для каждого* ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, *уравнение* (1) *имеет периодическое (в узком смысле) периода* θ *решение, периодически связанное с* $\xi(t)$.

Если же собственные числа матрицы H *имеют отрицательные действительные части, то в достаточно малой окрестности* y_0 *существует единственное* θ*-периодическое решение* (1) $x(t, \varepsilon)$ *такое, что*:

1) *равномерно по* $t \in R^1$, *с вероятностью* 1 *существует предел* $\lim_{\varepsilon \to 0} x(t, \varepsilon) = y_0$;

2) $x(t, \varepsilon)$ — *асимптотически устойчивое с вероятностью* 1 *решение с экспоненциальным характером убывания.*

Доказательство. В уравнении (1) в ρ-окрестности точки y_0 сделаем замену

$$x = y + \varepsilon B(t, y). \tag{3}$$

Можно указать $\rho_1 \le \rho$ такое, что при $|y - y_0| \le \rho_1$ точка x будет лежать в ρ-окрестности y_0 при достаточно малых ε. Имеем

$$\left[E + \varepsilon\frac{\partial B(t, y)}{\partial y}\right]\frac{dy}{dt} = \varepsilon X_0(y) + \varepsilon X(t, y + \varepsilon B(t, y), \xi(t)) - \varepsilon f(t, y). \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что при достаточно малых ε матрица

$$\left[E + \varepsilon\frac{\partial B(t, y)}{\partial y}\right]$$

имеет обратную, поэтому (4) можно явно разрешить относительно dy/dt:

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon X_0(y) + \varepsilon X(t, y + \varepsilon B(t, y), \xi(t)) - \varepsilon f(t, y) + \varepsilon^2 R(t, y, \omega), \tag{5}$$

где функция $R(t, y, \omega)$ с вероятностью 1 ограничена вместе со своими частными производными по y в ρ_1-окрестности точки y_0 некоторой неслучайной константой. Переходя в (5) к переменной z по формуле $y = y_0 + z$ в ρ_1-окрестности y_0 получаем

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon X_0(y_0 + z) + \varepsilon X(t, y_0 + z + \varepsilon B(t, y_0 + z), \xi(t)) -$$

$$- \varepsilon f(t, y_0 + z) + \varepsilon^2 R(t, y_0 + z, \omega).$$

Далее

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon\frac{\partial X_0(y_0)}{\partial y}z + \varepsilon\left[X_0(y_0 + z) - X_0(y_0) - \frac{\partial X_0(y_0)}{\partial y}z\right] +$$

$$+ \varepsilon X(t, y_0 + z + \varepsilon B(t, y_0 + z), \xi(t)) - \varepsilon f(t, y_0 + z) + \varepsilon^2 R(t, y_0 + z, \omega). \tag{6}$$

Из условия теоремы можно установить существование такого $C > 0$, что

$$\left\| \frac{\partial X_0(y_0 + z)}{\partial y} - \frac{\partial X_0(y_0)}{\partial y} \right\| \leq C|z|$$

при достаточно малых $|z|$. При $\varepsilon \to 0$ имеем

$$|X(t, y_0 + \varepsilon B(t, y_0), \xi(t)) - f(t, y_0)| =$$

$$= |X(t, y_0 + \varepsilon B(t, y_0), \xi(t)) - EX(t, y_0, \xi(t))| =$$

$$= |X(t, y_0 + \varepsilon B(t, y_0), \xi(t)) - X(t, y_0, \xi(t))| \leq L\varepsilon B(t, y_0) \to 0.$$

Далее для частных производных имеем оценку

$$\left\| \frac{\partial X(t, y_0 + z + \varepsilon B(t, y_0 + z), \xi(t))}{\partial z} \left(E + \varepsilon \frac{\partial B(t, y_0 + z)}{\partial z} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial f(t, y_0 + z)}{\partial z} - \frac{\partial X(t, y_0, \xi(t))}{\partial z} + \frac{\partial X(t, y_0, \xi(t))}{\partial z} \right\| \leq$$

$$\leq \left\| \frac{\partial X(t, y_0 + z + \varepsilon B(t, y_0 + z), \xi(t))}{\partial z} \left(E + \varepsilon \frac{\partial B(t, y_0 + z)}{\partial z} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial X(t, y_0, \xi(t))}{\partial z} - \frac{\partial f(t, y_0 + z)}{\partial z} - \frac{\partial f(t, y_0, \xi(t))}{\partial z} \right\| \leq \lambda(\varepsilon, \sigma) \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$, $\sigma \to 0$ для $|z| \leq \sigma < \rho_1$. Тогда (6) примет вид

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon Hz + \varepsilon \Phi(t, z, \omega, \varepsilon). \tag{7}$$

Перейдя в (7) к „медленному" времени $\tau = \varepsilon t$ и заменив снова τ на t, окончательно получим

$$\frac{dz}{dt} = Hz + Q(t, z, \omega, \varepsilon), \tag{8}$$

где $Q(t, z, \omega, \varepsilon) = \Phi(t/\varepsilon, z, \omega, \varepsilon)$.

Очевидно, $Q(t, z, \omega, \varepsilon)$ имеет свойства:

1) $Q(t, z, \omega, \varepsilon)$ определена в области $t \in R^1$ при $|z| \leq \rho_1$ и достаточно малых ε;

2) $\sup_{t \in R^1} |Q(t, z, \omega, \varepsilon)| \leq M(\varepsilon)$ с вероятностью 1, где $M(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$;

3) $|Q(t, z, \omega, \varepsilon) - Q(t, z^1, \omega, \varepsilon)| \leq \lambda(\varepsilon, \tau)|z - z^1|$ с вероятностью 1. Введем аналогично [1] функцию Грина $G(t)$ для линейной части (8). Очевидно, что существуют $K > 0$, $a > 0$ такие, что

$$\|G(t)\| \leq Ke^{-\alpha|t|}.$$

Зафиксируем некоторое положительное число d и рассмотрим класс непрерывных с вероятностью 1 случайных процессов $\xi(t)$, определенных на R^1, со значениями в R^n и удовлетворяющих почти наверное неравенству

$$\sup_{t \in R^1} |G(t)| \leq d. \tag{9}$$

Обозначим этот класс процессов через $C(d)$. Будем решать в нем интегральное уравнение

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(z) Q(t+z, F(t+z), \omega, \varepsilon)\, dz. \tag{10}$$

Рассмотрим оператор

$$S_t(F) = \int_{-\infty}^{\infty} G(z) Q(t+z, F(t+z), \omega, \varepsilon)\, dz$$

в классе $C(d)$. Согласно свойствам функции Q имеем

$$|Q(t+z, F(t+z), \omega, \varepsilon)| \le |Q(t+z, 0, \omega, \varepsilon)| +$$

$$+ |Q(t+z, F(t+z), \omega, \varepsilon) - Q(t+z), \omega, \varepsilon)| \le M(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon, d) d$$

с вероятностью 1.

Поэтому с учетом свойств функции $G(t)$ получим, что с вероятностью 1

$$\sup_{t \in R^1} |S_t(F)| \le \{M(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon, d) d\} \int_{-\infty}^{\infty} K e^{-\alpha|z|} dz = \frac{2K}{\alpha} \{M(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon, d) d\}. \tag{11}$$

Для двух процессов из класса $C(d)$ получим

$$|S_t(\overline{F}) - S_t(F)| =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} G(z) \{Q(t+z, \overline{F}(t+z), \omega, \varepsilon) - Q(t+z, F(t+z), \omega, \varepsilon)\} dz \right| \le$$

$$\le K\lambda(\varepsilon, d) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|z|} |\overline{F}(t+z) - F(t+z)| dz \le \frac{2K\lambda(\varepsilon, d)}{\alpha} \sup_{t \in R} |\overline{F}(t) - F(t)|.$$

Подберем теперь d, как функцию параметра ε, так, чтобы $d(\varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0$ и для всех достаточно малых ε выполнялись неравенства

$$\frac{2K}{\alpha} \{M(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon, d) d\} < d, \tag{12}$$

$$\frac{4\lambda(\varepsilon, d)}{\alpha} K < 1. \tag{13}$$

Такой подбор $d = d(\varepsilon)$ возможен, поскольку $M(\varepsilon) \to 0$, $\lambda(\varepsilon, d) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $d \to 0$.

Поэтому с вероятностью 1 получим

$$\sup_{t \in R^1} |S_t(F)| \le d(\varepsilon), \tag{14}$$

$$\sup_{t \in R^1} |S_t(\overline{F}) - S_t(F)| \le \frac{1}{2} \sup_{t \in R^1} |\overline{F}(t) - F(t)|. \tag{15}$$

Решим уравнение (10) методом последовательных приближений. Пусть

$$F_0 = 0, \quad F_1 = S_t(F_0), \ldots, F_{n+1} = S_t(F_n), \ldots. \tag{16}$$

Из (14) следует, что все члены последовательности (16) принадлежат классу $C(d)$. А из (15) получим

$$\sup_{t \in R^1} |F_{n+1} - F_n| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n d,$$

что влечет с вероятностью 1 равномерную по $t \in R^1$ сходимость ряда

$$F_0(t) + \sum_{n=0}^{\infty} [F_{n+1}(t) - F_n(t)].$$

Его сумма есть с вероятностью 1 равномерным пределом $F_n(t)$, значит, $F_n(t)$ сходится к некоторому случайному процессу $F(t)$, принадлежащему классу $C(d)$. Переходя к пределу в (16), убеждаемся, что $F(t)$ является решением уравнения (10). Единственность этого решения в классе $C(d)$ следует из оценки (15). Согласно [1] оно будет и решением системы (8). Тогда и система (1) имеет решение $x(t, \varepsilon)$, для которого $\sup_{t \in R^1} |x(t, \varepsilon) - y_0| \le \rho$ с вероятностью 1, а согласно [4] этого достаточно для существования периодического решения системы (1).

Доказательство второй части теоремы следует из таких рассуждений. Назовем решением типа S любое решение уравнения (8), для которого выполняется условие: если при некотором $t = t_0$, $z(t_0) = z_0$, причем $|z_0| \le \rho_1$, то $\sup_{t \ge t_0} |z(t)| \le \rho_2$ с вероятностью 1, $\rho_1 \le \rho_2 \le \rho$. Тогда для любых решений типа S $z(t)$ и $f(t)$, согласно [1], с вероятностью 1 справедлива оценка

$$|f(t) - z(t)| \le K e^{-\alpha(t - t_0)} |f(t_0) - z(t_0)|$$

для $t \ge t_0$.

Но в случае отрицательных действительных частей всех собственных чисел матрицы H вся ρ_1-окрестность (где $f(t)$ — искомое в теореме решение, а оно принадлежит типу S) состоит из начальных условий типа S при любом t_0. Отсюда следует второе утверждение теоремы, поскольку в силу [4] начальное условие периодического решения принадлежит ρ_1-окрестности $f(t_0)$, что и завершает ее доказательство.

Замечание. Если в системе (1) X не зависит от t, а $\xi(t)$ — стационарный в узком смысле процесс, то условия теоремы обеспечивают существование стационарного связанного с $\xi(t)$ решения, которое имеет те же свойства, что и периодическое решение приведенной теоремы.

1. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1971. – 440 с.
2. *Королюк В. С.* Устойчивость автономной динамической системы с быстрыми марковскими переключениями // Укр. мат. журн. – 1991. – **42**, № 9. – С. 1176–1181.
3. *Царьков Е. Ф.* Случаные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. – Рига: Зинатне, 1989. – 421 с.
4. *Хасминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайном возмущении их параметров. – М.: Наука, 1969. – 367 с.

Получено 23.09.96