DOI: 10.37863/umzh.v72i4.500

УДК 517.5

Р. В. Хаць (Дрогобиц. держ. пед. ун-т ім. І. Франка, Ін-т фізики, математики, економіки та інноваційних технологій)

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА ЛОГАРИФМІВ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ ПОКРАЩЕНОГО РЕГУЛЯРНОГО ЗРОСТАННЯ В $L^q[0, 2\pi]$-МЕТРИЦІ

We describe asymptotic behavior of the logarithms of entire functions of improved regular growth with zeros on a finite system of rays in the metric of $L^q[0, 2\pi]$.

Описано асимптотичну поведінку логарифмів цілих функцій покращеного регулярного зростання з нулями на скінченній системі променів у $L^q[0, 2\pi]$-метриці.

1. Вступ та формулювання основних результатів. Однією з центральних задач теорії цілих функцій є вивчення зв'язку між регулярністю зростання функції та розподілом її нулів. Дослідження цієї задачі привели Б. Левіна та А. Пфлюгера [1] (див. також [2, 3]) до створення наприкінці 30-х років минулого століття теорії цілих функцій цілком регулярного зростання. Функції, які є об'єктами вивчення в цій теорії, характеризуються регулярною поведінкою не лише свого модуля, а й аргументу. Важливим є отримання різних критеріїв належності цілих функцій до класу цілком регулярного зростання. Існує багато умов, які є необхідними та достатніми для наявності цілком регулярного зростання у цілих функцій додатного порядку (див. [2, 3]). Зокрема, В. С. Азарін [5] отримав критерій цієї регулярності в термінах коефіцієнтів Фур'є, а А. А. Кондратюк [6, с. 78] — в термінах q-норми простору $L^q[0, 2\pi]$ логарифма модуля цілої функції.

Важливу роль у розвитку теорії цілих функцій цілком регулярного зростання відіграв метод рядів Фур'є, систематичне застосовування якого розпочалось в роботах Л. Рубела та Б. Тейлора (див. [4]). Зокрема, А. А. Кондратюк [6, с. 78; 7] і Я. В. Васильків [8, 9], використовуючи цей метод, дали опис цілком регулярного зростання логарифма модуля та аргументу цілих і мероморфних функцій додатного порядку в $L^q[0, 2\pi]$-метриці. Для цілих функцій нульового порядку подібні результати одержано в [10, 11].

У роботах [12, 13] введено поняття цілої функції покращеного регулярного зростання і знайдено критерії для цієї регулярності в термінах розподілу нулів за умови, коли останні розміщені на скінченній системі променів. У роботі [14] це поняття поширено на субгармонічні функції. У статті [15] встановлено критерій покращеного регулярного зростання цілих функцій додатного порядку з нулями на скінченній системі променів у термінах їхніх коефіцієнтів Фур'є. В роботі [16] описано покращену регулярність зростання логарифма модуля цілих функцій додатного порядку з нулями на скінченній системі променів у $L^q[0, 2\pi]$-метриці. У працях [14, 17 – 19] досліджено асимптотичну поведінку цілих функцій покращеного регулярного зростання в загальному випадку (з довільним розподілом нулів). Проте поведінку аргументів цілих функцій покращеного регулярного зростання не було досліджено.

Ціла функція f називається функцією покращеного регулярного зростання [12, 13], якщо для деяких $\rho \in (0, +\infty)$, $\rho_1 \in (0, \rho)$ і 2π-періодичної ρ-тригонометрично опуклої функції

$h \not\equiv -\infty$ існує множина $U \subset \mathbb{C}$, яка міститься в об'єднанні кругів із скінченною сумою радіусів, така, що

$$\log|f(z)| = |z|^{\rho} h(\arg z) + o(|z|^{\rho_1}), \quad U \not\ni z = re^{i\varphi} \to \infty.$$

Якщо ціла функція f є функцією покращеного регулярного зростання, то [12] вона має порядок ρ і індикатор $h(\varphi)$. Функція $h(\varphi)$ [6, с. 93, 94, 110; 9, с. 138] (див. також [1, с. 76–78, 199]) скрізь має праву похідну, яка неперервна, за винятком щонайбільше зліченної множини.

Нехай f — ціла функція, $f(0) = 1$ і (λ_n) — послідовність її нулів. Далі вважатимемо функцію

$$\log f(z) = \int\limits_0^z \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta$$

визначеною в комплексній площині з радіальними розрізами від нулів цілої функції f до нескінченності. Функція $\log f(z)$ є однозначною гілкою багатозначної функції $\mathrm{Log}\, f(z) = \log|f(z)| + i\,\mathrm{Arg}\, f(z)$ такою, що $\log f(0) = 0$. Нехай

$$c_k(r, \log|f|) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ik\varphi} \log|f(re^{i\varphi})|\, d\varphi, \qquad k \in \mathbb{Z}, \quad r > 0,$$

— коефіцієнти Фур'є функції $\log|f(re^{i\varphi})|$ і $n(t, \psi; f) = \sum_{|\lambda_n| \le t,\, \arg\lambda_n = \psi} 1$.

Відомо, що згідно з теоремою Адамара–Бореля [1, с. 38; 4, 6, 12, 13] ціла функція f, $f(0) = 1$, порядку $\rho \in (0, +\infty)$ має вигляд

$$f(z) = e^{Q(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{\lambda_n}, p\right),$$

де $\lambda_n \neq 0$ — нулі функції $f(z)$, $Q(z) = \sum_{k=1}^{\nu} Q_k z^k$ — поліном степеня $\nu \le \rho$, $p \le \rho$ — найменше ціле невід'ємне число, для якого $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|^{-p-1} < +\infty$ і $E(w, p) = (1-w)\exp(w + w^2/2 + \ldots + w^p/p)$ — первинний множник Вейєрштрасса роду p.

Наступна теорема вказує на необхідні та достатні умови для покращеного регулярного зростання цілих функцій додатного порядку з нулями на скінченній системі променів.

Теорема А. *Нехай f — ціла функція порядку $\rho \in (0, +\infty)$ з нулями на скінченній системі променів $\{z\colon \arg z = \psi_j\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, $0 \le \psi_1 < \psi_2 < \ldots < \psi_m < 2\pi$. Тоді еквівалентними є такі твердження:*

1) *для деякого $\rho_2 \in (0, \rho)$ і кожного $j \in \{1, \ldots, m\}$ виконується*

$$n(t, \psi_j; f) = \Delta_j t^{\rho} + o(t^{\rho_2}), \qquad t \to +\infty, \quad \Delta_j \in [0, +\infty), \tag{1}$$

і, крім того, у випадку цілого ρ для деяких $\rho_3 \in (0, \rho)$ і $\delta_f \in \mathbb{C}$

$$\sum_{0<|\lambda_n|\le r} \lambda_n^{-\rho} = \delta_f + o(r^{\rho_3 - \rho}), \quad r \to +\infty; \tag{2}$$

2) *f є функцією покращеного регулярного зростання з індикатором $h(\varphi)$, причому, якщо ρ — неціле число, то*

$$h(\varphi) = \sum_{j=1}^{m} h_j(\varphi), \tag{3}$$

де $h_j(\varphi)$ — 2π-періодична функція, визначена на проміжку $[\psi_j, \psi_j + 2\pi)$ рівністю $h_j(\varphi) = \dfrac{\pi\Delta_j}{\sin\pi\rho}\cos\rho(\varphi - \psi_j - \pi)$; для $\rho \in \mathbb{N}$ маємо

$$h(\varphi) = \begin{cases} \tau_f \cos(\rho\varphi + \theta_f) + \sum_{j=1}^{m} h_j(\varphi), & \rho = p, \\ Q_\rho \cos\rho\varphi, & \rho = p+1, \end{cases} \tag{4}$$

де $\tau_f = |\delta_f/\rho + Q_\rho|$, $\theta_f = \arg(\delta_f/\rho + Q_\rho)$ і $h_j(\varphi)$ — 2π-періодична функція, визначена на проміжку $[\psi_j, \psi_j + 2\pi)$ рівністю $h_j(\varphi) = \Delta_j(\pi - \varphi + \psi_j)\sin\rho(\varphi - \psi_j) - \dfrac{\Delta_j}{\rho}\cos\rho(\varphi - \psi_j)$;

3) *для деяких $\rho_4 \in (0, \rho)$, $k_0 \in \mathbb{Z}$ і кожного $k \in \{k_0, k_0 + 1, \ldots, k_0 + m - 1\}$*

$$c_k(r, \log|f|) = c_k r^\rho + o(r^{\rho_4}), \quad r \to +\infty, \qquad c_k := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\varphi} h(\varphi)\, d\varphi;$$

4) *для деякого $\rho_5 \in (0, \rho)$ і кожного $q \in [1, +\infty)$ виконується*

$$\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\log|f(re^{i\varphi})|}{r^\rho} - h(\varphi) \right|^q d\varphi \right\}^{1/q} = o(r^{\rho_5 - \rho}), \quad r \to +\infty.$$

Доведення еквівалентності першого і другого тверджень міститься в роботах [12, 13]. Еквівалентність другого і третього тверджень встановлено у статті [15], а еквівалентність другого і четвертого тверджень доведено в [16].

Актуальним є встановлення нових критеріїв покращеного регулярного зростання цілих функцій додатного порядку. Метою цієї статті є дослідження асимптотичної поведінки логарифмів цілих функцій покращеного регулярного зростання з нулями на скінченній системі променів у метриці просторів $L^q[0, 2\pi]$, $q \in [1, +\infty)$.

Теорема 1. *Нехай f — ціла функція порядку $\rho \in (0, +\infty)$ з нулями на скінченній системі променів $\{z\colon \arg z = \psi_j\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, $0 \le \psi_1 < \psi_2 < \ldots < \psi_m < 2\pi$. Для того щоб функція f була функцією покращеного регулярного зростання, необхідно і достатньо, щоб для деякого $\rho_6 \in (0, \rho)$ і кожного $q \in [1, +\infty)$ виконувалось*

$$\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\arg f(re^{i\varphi})}{r^\rho} + \frac{h'(\varphi)}{\rho} \right|^q d\varphi \right\}^{1/q} = o(r^{\rho_6 - \rho}), \quad r \to +\infty, \tag{5}$$

де $h(\varphi)$ — індикатор f.

***Наслідок* 1.** *Нехай f — ціла функція порядку $\rho \in (0, +\infty)$ з нулями на скінченній системі променів $\{z\colon \arg z = \psi_j\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, $0 \le \psi_1 < \psi_2 < \ldots < \psi_m < 2\pi$. Для того щоб функція f була функцією покращеного регулярного зростання, необхідно і достатньо, щоб для деякого $\rho_7 \in (0, \rho)$ і кожного $q \in [1, +\infty)$ виконувалось*

$$\left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| \frac{\log f(re^{i\varphi})}{r^\rho} - \widetilde{h}(\varphi) \right|^q d\varphi \right\}^{1/q} = o(r^{\rho_7 - \rho}), \quad r \to +\infty,$$

де $\widetilde{h}(\varphi) = h(\varphi) - i\dfrac{h'(\varphi)}{\rho}$.

2. Допоміжні твердження. Нехай f — ціла функція, $f(0) = 1$ і (λ_n) — послідовність її нулів. Позначимо для $k \in \mathbb{Z}$ і $r > 0$

$$N(r, \psi; f) = \int\limits_0^r \frac{n(t, \psi; f)}{t} \, dt, \qquad N^*(r, \psi; f) = \int\limits_0^r \frac{N(t, \psi; f)}{t} \, dt,$$

$$c_k(r, \arg f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{-ik\varphi} \arg f(re^{i\varphi}) \, d\varphi,$$

$$n_k(r, f) = \sum_{|\lambda_n| \le r} e^{-ik \arg \lambda_n}, \qquad N_k(r, f) = \int\limits_0^r \frac{n_k(t, f)}{t} \, dt, \qquad N_k^*(r, f) = \int\limits_0^r \frac{N_k(t, f)}{t} \, dt.$$

Лема 1. *Якщо ціла функція f порядку $\rho \in (0, +\infty)$ з нулями на скінченній системі променів $\{z\colon \arg z = \psi_j\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, $0 \le \psi_1 < \psi_2 < \ldots < \psi_m < 2\pi$, є функцією покращеного регулярного зростання, то для деякого $\rho_8 \in (0, \rho)$ рівномірно по $k \in \mathbb{Z}$*

$$c_k(r, \arg f) = -ikc_k \frac{r^\rho}{\rho} + \frac{k}{k^2 + 1} o(r^{\rho_8}), \quad r \to +\infty, \tag{6}$$

де

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{-ik\varphi} h(\varphi) \, d\varphi = \frac{\rho}{\rho^2 - k^2} \sum_{j=1}^m \Delta_j e^{-ik\psi_j}, \quad \Delta_j \in [0, +\infty), \tag{7}$$

якщо ρ — неціле число, і для $\rho \in \mathbb{N}$

$$c_k = \begin{cases} \dfrac{\rho}{\rho^2 - k^2} \sum_{j=1}^m \Delta_j e^{-ik\psi_j}, \quad |k| \ne \rho = p, \\ \dfrac{\tau_f e^{i\theta_f}}{2} - \dfrac{1}{4\rho} \sum_{j=1}^m \Delta_j e^{-i\rho\psi_j}, \quad k = \rho = p, \\ 0, \quad |k| \ne \rho = p + 1, \\ \dfrac{Q_\rho}{2}, \quad k = \rho = p + 1. \end{cases} \tag{8}$$

Доведення. Якщо виконуються умови леми 1, то [20, с. 10] (лема 1) (див. також [16]) для деякого $\rho_8 \in (0, \rho)$ рівномірно по $k \in \mathbb{Z}$ виконується співвідношення

$$c_k(r, \log|f|) = c_k r^\rho + \frac{o(r^{\rho_8})}{k^2+1}, \quad r \to +\infty,$$

де c_k визначені формулами (7) і (8). Оскільки [8, с. 43]

$$c_k(r, \arg f) = -ik \int\limits_0^r \frac{c_k(t, \log|f|)}{t}\, dt, \quad k \in \mathbb{Z},$$

то з останнього співвідношення отримуємо (6).

Лему 1 доведено.

Лема 2. *Нехай f — ціла функція порядку $\rho \in (0, +\infty)$ з нулями на скінченній системі променів $\{z\colon \arg z = \psi_j\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, $0 \le \psi_1 < \psi_2 < \ldots < \psi_m < 2\pi$, і для деякого $\rho_6 \in (0, \rho)$ та кожного $q \in [1, +\infty)$ виконується асимптотична рівність* (5) *із функцією $h(\varphi)$, визначеною формулами* (3) *і* (4). *Тоді для всіх $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$*

$$c_k(r, \arg f) = -ikc_k \frac{r^\rho}{\rho} + o(r^{\rho_6}), \quad r \to +\infty, \tag{9}$$

$$N_k^*(r, f) = c_k\left(1 - \frac{k^2}{\rho^2}\right)\frac{r^\rho}{\rho} + o(r^{\rho_6}), \quad r \to +\infty, \tag{10}$$

де c_k визначені формулами (7) *і* (8).

Доведення. За умов леми 2 для всіх $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ маємо

$$\left|\frac{c_k(r, \arg f)}{r^\rho} + \frac{ik}{\rho} c_k\right| \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left|\frac{\arg f(re^{i\varphi})}{r^\rho} + \frac{h'(\varphi)}{\rho}\right| d\varphi \le$$

$$\le \left\{\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left|\frac{\arg f(re^{i\varphi})}{r^\rho} + \frac{h'(\varphi)}{\rho}\right|^q d\varphi\right\}^{1/q} = o(r^{\rho_6 - \rho}), \quad r \to +\infty.$$

Отже, для деякого $\rho_6 \in (0, \rho)$ і кожного $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ виконується співвідношення (9) з c_k, визначеними формулами (7) і (8). Оскільки [8, с. 43]

$$N_k^*(r, f) = \frac{i}{k} c_k(r, \arg f) - ik \int\limits_0^r \frac{dt}{t} \int\limits_0^t \frac{c_k(u, \arg f)}{u}\, du, \qquad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad r > 0,$$

то на підставі (9) для всіх $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ отримуємо

$$N_k^*(r, f) = c_k \frac{r^\rho}{\rho} + o(r^{\rho_6}) - ik \int\limits_0^r \frac{dt}{t} \int\limits_0^t \left(-\frac{ik}{\rho} c_k u^{\rho-1} + o(u^{\rho_6 - 1})\right) du =$$

$$= c_k\left(1 - \frac{k^2}{\rho^2}\right)\frac{r^\rho}{\rho} + o(r^{\rho_6}), \quad r \to +\infty.$$

Таким чином, виконується також рівність (10).

Лему 2 доведено.

Лема 3. *Нехай* f — *ціла функція порядку* $\rho \in (0, +\infty)$ *з нулями на скінченній системі променів* $\{z\colon \arg z = \psi_j\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, $0 \le \psi_1 < \psi_2 < \ldots < \psi_m < 2\pi$. *Для того щоб для деякого* $\rho_6 \in (0, \rho)$ *і кожного* $j \in \{1, \ldots, m\}$ *виконувалась рівність*

$$N^*(r, \psi_j; f) = \frac{\Delta_j}{\rho^2} r^\rho + o(r^{\rho_6}), \qquad r \to +\infty, \quad \Delta_j \in [0, +\infty), \tag{11}$$

необхідно і достатньо, щоб для деяких $\rho_6 \in (0, \rho)$, $k_0 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *і кожного* $k \in \{k_0, k_0 + 1, \ldots, k_0 + m - 1\}$ *виконувалось* (10) *із* c_k, *визначеними формулами* (7) *і* (8). *При цьому* $\sum_{j=1}^m \Delta_j e^{-i\rho\psi_j} = 0$, *якщо* $\rho \in \mathbb{N}$.

Лема 3 доводиться на основі рівностей $N_k^*(r, f) = \sum_{j=1}^m e^{-ik\psi_j} N^*(r, \psi_j; f)$, $k \in \mathbb{Z}$, аналогічно лемі 5 з [15, с. 1720].

Лема 4. *Нехай* $\rho \in (0, +\infty)$. *Для того щоб для деякого* $\rho_2 \in (0, \rho)$ *і кожного* $j \in \{1, \ldots, m\}$ *виконувалась рівність* (1), *необхідно і достатньо, щоб для деякого* $\rho_6 \in (0, \rho)$ *і кожного* $j \in \{1, \ldots, m\}$ *виконувалось* (11).

Доведення леми 4 міститься в доведенні леми 3 з [22, с. 143] (див. також [12, 13, 15]).

Лема 5. *Якщо ціла функція* f *порядку* $\rho \in \mathbb{N}$ *задовольняє умови леми* 2, *то для деякого* $\rho_3 \in (0, \rho)$ *виконується умова* (2) *з* $\delta_f = \rho\big(\tau_f e^{i\theta_f} - Q_\rho\big)$.

Доведення. З огляду на лему 2 для деякого $\rho_6 \in (0, \rho)$ і кожного $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ виконуються співвідношення (9) і (10) з c_k, визначеними формулами (7) і (8). При цьому за лемами 3 і 4 для деякого $\rho_2 \in (0, \rho)$ та кожного $j \in \{1, \ldots, m\}$ виконується рівність (1) і $\sum_{j=1}^m \Delta_j e^{-i\rho\psi_j} = 0$. Оскільки [8, с. 43]

$$ic_k(r, \arg f) = c_k(r, \log|f|) + \frac{1}{k} \sum_{0<|\lambda_n|\le r} \left(\frac{\overline{\lambda}_n}{r}\right)^k - \frac{n_k(r, f)}{k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

і [13, с. 21; 21]

$$c_\rho(r, \log|f|) = \frac{1}{2} Q_\rho r^\rho + \frac{1}{2\rho} \sum_{0<|\lambda_n|\le r} \left(\left(\frac{r}{\lambda_n}\right)^\rho - \left(\frac{\overline{\lambda}_n}{r}\right)^\rho\right), \quad k = \rho = p,$$

то

$$ic_\rho(r, \arg f) = \frac{1}{2} Q_\rho r^\rho + \frac{1}{2\rho} \sum_{0<|\lambda_n|\le r} \left(\frac{r}{\lambda_n}\right)^\rho + \frac{1}{2\rho} \sum_{0<|\lambda_n|\le r} \left(\frac{\overline{\lambda}_n}{r}\right)^\rho - \frac{n_\rho(r, f)}{\rho},$$

де $n_\rho(r, f) = \sum_{j=1}^m e^{-i\rho\psi_j} n(r, \psi_j; f)$. Звідси з урахуванням співвідношень (1) і (9) переконуємося, що існує таке $\rho_3 \in (0, \rho)$, що при $r \to +\infty$

$$\sum_{0<|\lambda_n|\le r} \lambda_n^{-\rho} = 2i\rho r^{-\rho} c_\rho(r, \arg f) - \rho Q_\rho - r^{-\rho} \sum_{0<|\lambda_n|\le r} \left(\frac{\overline{\lambda}_n}{r}\right)^\rho + 2r^{-\rho} n_\rho(r, f) =$$

$$= 2i\rho r^{-\rho} c_\rho(r, \arg f) -$$

$$-\rho Q_\rho - r^{-2\rho} \sum_{j=1}^m e^{-i\rho\psi_j} \int_0^r t^\rho \, dn(t, \psi_j; f) + 2r^{-\rho} \sum_{j=1}^m e^{-i\rho\psi_j} n(r, \psi_j; f) =$$

$$= 2i\rho r^{-\rho} c_\rho(r, \arg f) - \rho Q_\rho + r^{-\rho} \sum_{j=1}^{m} e^{-i\rho\psi_j} n(r, \psi_j; f) +$$

$$+\rho r^{-2\rho} \sum_{j=1}^{m} e^{-i\rho\psi_j} \int_0^r t^{\rho-1} n(t, \psi_j; f)\, dt =$$

$$= \rho(\tau_f e^{i\theta_f} - Q_\rho) + \sum_{j=1}^{m} \Delta_j e^{-i\rho\psi_j} + o(r^{\rho_3 - \rho}) =$$

$$= \delta_f + o(r^{\rho_3 - \rho}).$$

Залишилось зауважити, що у випадку $\rho = p + 1$ умова (2) випливає [13, с. 23] з умови (1).

Лему 5 доведено.

3. Доведення теореми 1 і наслідку 1. Спочатку доведемо теорему 1. *Необхідність.* Нехай f — ціла функція покращеного регулярного зростання порядку $\rho \in (0, +\infty)$ з нулями на скінченній системі променів $\{z\colon \arg z = \psi_j\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, $0 \le \psi_1 < \psi_2 < \ldots < \psi_m < 2\pi$, і $h(\varphi)$ — її індикатор, визначений формулами (3) і (4). За лемою 1 для деякої сталої $C > 0$ і кожного $r > r_0$ маємо

$$\left| \frac{c_k(r, \arg f)}{r^\rho} + \frac{ik}{\rho} c_k \right| \le C \frac{k}{k^2 + 1}, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{12}$$

а отже, послідовність $\left(r^{-\rho} c_k(r, \arg f) + \dfrac{ik}{\rho} c_k \right)_{k \in \mathbb{Z}}$ належить до простору $l_{\widetilde{q}}$ для всіх $\widetilde{q} > 1$ і $r > r_0$. Тоді, застосувавши теорему Гаусдорфа – Юнга [6, с. 5, 6] для $q \ge 2$, $q^{-1} + \widetilde{q}^{-1} = 1$, одержимо

$$\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\arg f(re^{i\varphi})}{r^\rho} + \frac{h'(\varphi)}{\rho} \right|^q d\varphi \right\}^{1/q} \le \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{c_k(r, \arg f)}{r^\rho} + \frac{ik}{\rho} c_k \right|^{\widetilde{q}} \right\}^{1/\widetilde{q}}.$$

Отриманий ряд завдяки (12) є рівномірно збіжним для всіх $r > r_0$. Виконавши у ньому граничний перехід при $r \to +\infty$, з урахуванням леми 1 отримуємо (5) для $q \ge 2$. Звідси та з нерівності Гельдера отримуємо співвідношення (5) і для $1 \le q < 2$.

Достатність випливає з лем 2 – 5 та еквівалентності першого і другого тверджень теореми А.

Теорему 1 доведено.

Наслідок 1 безпосередньо випливає з теореми 1 та еквівалентності другого та четвертого тверджень теореми А.

Література

1. Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, Гостехиздат, Москва (1956).
2. А. А. Гольдберг, *Б. Я. Левин — создатель теории целых функций вполне регулярного роста,* Мат. физика, анализ, геометрия, **1**, № 2, 186 – 192 (1994).
3. А. А. Гольдберг, Б. Я. Левин, И. В. Островский, *Целые и мероморфные функции*, Итоги науки и техники. Соврем. пробл. математики. Фундам. направления, **85**, 5 – 186 (1991).
4. L. A. Rubel, *Entire and meromorphic functions*, Springer, New York (1996).

5. В. С. Азарин, *О регулярности роста коэффициентов Фурье логарифма модуля целой функции*, Теория функций, функцион. анализ и их прил., вып. 27, 9 – 21 (1977).
6. А. А. Кондратюк, *Ряды Фурье и мероморфные функции*, Вища шк., Львов (1988).
7. Р. З. Калинець, А. А. Кондратюк, *Про регулярність зростання модуля і аргумента цілої функції в $L^p[0, 2\pi]$-метриці*, Укр. мат. журн., **50**, № 7, 889 – 896 (1998).
8. Я. В. Васильків, *Асимптотична поведінка логарифмічних похідних та логарифмів мероморфних функцій цілком регулярного зростання в $L^p[0, 2\pi]$-метриці, ч. 1*, Мат. студ., **12**, № 1, 37 – 58 (1999).
9. Я. В. Васильків, *Асимптотична поведінка логарифмічних похідних та логарифмів мероморфних функцій цілком регулярного зростання в $L^p[0, 2\pi]$-метриці, ч. 2*, Мат. студ., **12**, № 2, 135 – 144 (1999).
10. О. В. Боднар, М. В. Заболоцький, *Критерії регулярності зростання логарифма модуля та аргументу цілої функції*, Укр. мат. журн., **62**, № 7, 885 – 893 (2010).
11. Н. В. Заболоцкий, О. В. Костюк, *Регулярный рост различных характеристик целых функций нулевого порядка*, Мат. заметки, **100**, № 3, 363 – 374 (2016).
12. Б. В. Винницький, Р. В. Хаць, *Про регулярність зростання цілої функції нецілого порядку з нулями на скінченній системі променів*, Мат. студ., **24**, № 1, 31 – 38 (2005).
13. R. V. Khats', *On entire functions of improved regular growth of integer order with zeros on a finite system of rays*, Mat. Stud., **26**, № 1, 17 – 24 (2006).
14. Гірник М. О., *Субгармонічні функції покращеного регулярного зростання*, Доп. НАН України, № 4, 13 – 18 (2009).
15. Р. В. Хаць, *Регулярність зростання коефіцієнтів Фур'є цілих функцій покращеного регулярного зростання*, Укр. мат. журн., **63**, № 12, 1717 – 1723 (2011).
16. R. V. Khats', *Asymptotic behavior of entire functions of improved regular growth in the metric of $L^p[0, 2\pi]$*, Carpathian Math. Publ., **5**, № 2, 341 – 344 (2013).
17. B. V. Vynnyts'kyi, R. V. Khats', *On asymptotic properties of entire functions, similar to the entire functions of completely regular growth*, Visn. Nats. Univ. L'viv. Politekh., Fiz.-Mat. Nauky, **718**, № 718, 5 – 9 (2011).
18. R. V. Khats', *Asymptotic behavior of averaging of entire functions of improved regular growth*, Carpathian Math. Publ., **5**, № 1, 129 – 133 (2013).
19. I. E. Chyzhykov, *Pfluger-type theorem for functions of refined regular growth*, Mat. Stud., **47**, № 2, 169 – 178 (2017).
20. R. V. Khats', *Averaging of entire functions of improved regular growth with zeros on a finite system of rays*, Visn. Nats. Univ. L'viv. Politekh., Fiz.-Mat. Nauky, **718**, № 718, 10 – 14 (2011).
21. Р. В. Хаць, *Про коефіцієнти Фур'є одного класу цілих функцій*, Мат. студ., **23**, № 1, 99 – 102 (2005).
22. Б. В. Винницький, Р. В. Хаць, *Про асимптотичну поведінку цілих функцій нецілого порядку*, Мат. студ., **21**, № 2, 140 – 150 (2004).

Одержано 16.01.17