УДК 512.544

Б. В. Петренко (Дніпропетр. ун-т)

ПРО ПРЯМІ РОЗКЛАДИ У МОДУЛЯХ НАД ГРУПОВИМИ КІЛЬЦЯМИ

In the theory of infinite groups, one of the most important generalizations of the classical Maschke's theorem is the Kovačs – Newman theorem, which establishes sufficient conditions of the existence of G-invariant complements in modules over a periodic group G finite over the center. In this paper, we generalize the Kovačs – Newman theorem to the case of modules over a group ring KG, where K is a Dedekind domain

В теорії нескінченних груп серед корисних узагальнень класичної теореми Машке досить важливе місце посідає теорема Ковача – Ньюмена, яка дає достатні умови існування G-інваріантних доповнень у модулях над періодичною скінченною над центром групою G. У даній статті теорему Ковача – Ньюмена узагальнено на модулі над груповим кільцем KG, де K — дедекіндова область.

Одним із найбільш відомих і широко використовуваних результатів у теорії груп та її застосуваннях є класична теорема Машке. Корисність цієї теореми привела багатьох математиків до пошуку її узагальнень для нескінченних груп (див., наприклад, огляд [1]). Одне з таких узагальнень отримано у роботі Л. Ковача і М. Ньюмена [2] у термінах груп з операторами, тобто фактично розглянуто питання про існування прямих розкладів у деяких ZG-модулях, де G — скінченна над центром періодична група, Z — кільце цілих чисел.

Якщо K — ньотерова область, G — майже поліциклічна група, то KG — ньотерове кільце (Ф. Холл). З іншого боку, якщо G не є майже поліциклічною групою, то кільце KG, взагалі кажучи, вже не буде ньотеровим. Тоді при вивченні KG-модулів на перший план виступають властивості кільця K. Велику роль при цьому відіграє те, наскільки розвиненою є теорія K-модулів. Це має місце для модулів над дедекіндовими областями — дуже вдалим розширенням кільця цілих чисел. Модулі над груповими кільцями KG, де K — дедекіндова область, розглядалися і раніше (див., наприклад, [3]). Виникає питання про розширення теореми Ковача – Ньюмена з кільця ZG на кільце KG, де K — довільна дедекіндова область. Таке узагальнення і одержане у даній статті.

Теорема. *Нехай G — скінченна над центром π-группа для деякої множини простих чисел π, K — дедекіндова область, A — KG-модуль, B — KG-підмодуль, що задовольняє наступні вимоги*:

1) $A = B \oplus C$ *для деякого K-підмодуля C*;
2) B — *монолітичний KG-підмодуль з монолітом M*;
3) $MP = \langle 0 \rangle$ *для деякого простого ідеалу P кільця K*;
4) $\operatorname{char} K/P = 0$ *або* $\operatorname{char} K/P \notin \pi$.

Тоді $A = B \oplus E$ для деякого KG-підмодуля E.

Нагадаємо, що моноліт модуля — це перетин усіх його ненульових підмодулів. Модуль з ненульовим монолітом називається монолітичним. Якщо R — кільце, A — R-модуль, то його моноліт позначимо через $\mu_R(A)$.

Якщо K — комутативне кільце, то $\operatorname{Spec}(K)$ — це множина усіх простих ідеалів K. Якщо I — ідеал K, $n \in \mathbb{N}$, то покладемо

$$\Omega_{I,n}(A) = \{ a \in A \mid aI^n = \langle 0 \rangle \}.$$

Далі, нехай $A_I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_{I,n}(A)$. Підмодуль A_I називається I-компонентою модуля A. Якщо $A = A_I$ для деякого ідеалу I, то говоритимемо, що A — I-періодичний K-модуль.

Якщо K — дедекіндова область, A — K-модуль, то, очевидно, множина $t_K(A) = \{ a \in A \mid ax = 0$ для деякого $0 \neq x \in K\}$ усіх періодичних елементів модуля A буде K-підмодулем. Модуль $t_K(A)$ називається K-періодичною частиною A. Якщо $t_K(A) = A$, то A називають K-періодичним модулем. Якщо і $t_K(A) = \langle 0 \rangle$, то говорять, що модуль A не має K-скруту.

Лема 1. *Нехай K — дедекіндова область, $P \in \operatorname{Spec}(K)$, $t, n \in \mathbb{N}$, $t \leq n$, $y \in P^t \backslash P^{t+1}$. Тоді $P^t = yK + P^n$.*

Доведення. $yK = \prod_{Q \in \operatorname{Spec}(K)} Q^{r(Q)}$, $P^n = \prod_{Q \in \operatorname{Spec}(K)} Q^{s(Q)}$, тоді $r(P) = t$, $s(P) = n$, $s(Q) = 0$ при $Q \neq P$. Звідси маємо

$$K + P^n = \prod_{Q \in \operatorname{Spec}(K)} Q^{\min\{r(Q), s(Q)\}} = P^t.$$

Лему доведено.

Лема 2. *Нехай K — дедекіндова область, I, J — її ідеали. Тоді K/I і J/IJ ізоморфні як K-модулі.*

Доведення. У наслідку 18.24 з книги [4] доведено, що K/I і J/IJ ізоморфні як абельові групи. Неважко пересвідчитись, що наведений там ізоморфізм є K-модульним. Лему доведено.

Нехай K — дедекіндова область, $P \in \operatorname{Spec}(K)$. Згідно з лемою 2 існує мономорфізм K-модулів $\varphi_{n+1,n}\colon K/P^n \to K/P^{n+1}$ для довільного $n \in \mathbb{N}$. Покладемо $\varphi_{n+s,n} = \varphi_{n+s,n+s-1} \circ \ldots \circ \varphi_{n+1,n}$, $s \in \mathbb{N}$ і $\varphi_{n,n}\colon K/P^n \to K/P^n$, $\xi \to \xi$ — тотожне відображення. Тому можна говорити про ін'єктивну границю прямого спектра $\{K/P^n,\ \varphi_{m,n},\ m, n \in \mathbb{N}\}$.

Покладемо $C_{P^\infty} = \lim\limits_{\rightarrow} \{K/P^n,\ \varphi_{m,n},\ m, n \in \mathbb{N}\}$ і назвемо його P-модулем Прюфера (за аналогією з p-групою Прюфера). Очевидно, що C_{P^∞} — P-періодичний модуль над кільцем K.

Лема 3. *Справедливі наступні твердження*:

i) $C_{P^\infty} = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n K$, *де* $a_n \in C_{P^\infty}$, $a_n K \cong K/P^n$, $a_n K < a_{n+1} K$, $n \in \mathbb{N}$;

ii) $\Omega_{P,n}(C_{P^\infty}) \cong K/P^n$, $n \in \mathbb{N}$;

iii) *єдиними ненульовими K-підмодулями модуля C_{P^∞} є C_{P^∞} і $\Omega_{P,n}(C_{P^\infty})$, $n \in \mathbb{N}$.*

Доведення. Твердження випливають з того, що ненульові ідеали кільця K/P^n вичерпуються ідеалами K/P^n, P/P^n, $\ldots$, P^{n-1}/P^n. Лему доведено.

З леми 3, зокрема, випливає, що C_{P^∞} є K-ін'єктивною оболонкою модуля K/P.

Лема 4. *Нехай K — дедекіндова область, $P \in \operatorname{Spec}(K)$, тоді P-модуль Прюфера є подільним.*

Доведення. Нехай $0 \neq \xi \in K$, тоді існує єдине $n \in \mathbb{N}$ із властивістю $\xi \in P^{n-1} \backslash P^n$. Якщо $C_{P^\infty}\xi \neq C_{P^\infty}$, то згідно з твердженням ii) леми 3 можливі такі випадки:

1) $C_{P^\infty}\xi = \langle 0 \rangle$, але якщо $v \in \Omega_{P,n+1}(C_{P^\infty})$ такий, що $\operatorname{Ann}_K(v) = P^{n+1}$, то $v\xi \neq \langle 0 \rangle$, що є суперечністю;

2) $C_{P^\infty}\xi = \Omega_{P,s}(C_{P^\infty})$ при деякому $s \in \mathbb{N}$, але якщо $v \in \Omega_{P,n+s+1}(C_{P^\infty})$

такий, що $\operatorname{Ann}_K(v) = P^{n+s+1}$, то $v\xi \notin \Omega_{P,s}(C_{P^\infty})$, що є суперечністю. Таким чином, $C_{P^\infty}\xi = C_{P^\infty}$. Лему доведено.

Лема 5. *Нехай K — дедекіндова область, A — простий K-модуль, E — K-подільна оболонка A. Тоді E — K-ін'єктивна оболонка A і $E \cong C_{P^\infty}$, де $P = \operatorname{Ann}_K(A)$.*

Доведення. Відомо, що ін'єктивність і подільність для модулів над дедекіндовими областями співпадають (див., наприклад, твердження 2.10 з [5]). Тому E — істотне розширення A (див., наприклад, теорему 2.21 з [5]). Оскільки $AP = \langle 0 \rangle$, то звідси неважко одержати, що E — P-періодичний модуль над K.

Нехай $y \in P \setminus P^2$, $0 \neq a_1 \in A$. Оскільки A — простий K-модуль, то $A = a_1 K$. Виберемо елементи a_n, $n \geq 1$ з властивістю $a_{n+1} y = a_n$. Покладемо $A_1 = a_1 K$. Очевидно, що $\operatorname{Ann}_K(A_1) = P$, тому $a_1 K \cong K/P$. Далі, покладемо $A_2 = a_2 K$, тоді $\operatorname{Ann}_K(A_2) = P^2$ і $a_2 K \cong K/P^2$. Покладемо $A_t = a_t K$, $t \in \mathbb{N}$. Модуль $\bigcup_{t \in \mathbb{N}} A_t$ містить у собі модуль B такий, що $B \cong \varinjlim \{K/P^n,\ \varphi_{m,n},\ m, n \in \in \mathbb{N}\}$. З леми 4 випливає, що B — K-подільний модуль, а тому $B = E$. Лему доведено.

Покладемо $\Pi_K(A) = \{P \in \operatorname{Spec}(K) \mid A_P \neq \langle 0 \rangle\}$.

Лема 6. *Нехай K — дедекіндова область, A — K-періодичний модуль. Тоді $A = \oplus_{P \in \Pi_K(A)} A_P$.*

Це є наслідок китайської теореми про остачі (див., наприклад, теорему 1.8.18 з [4]).

Лема 7. *Нехай K — дедекіндова область, F — її поле часток, A — K-модуль, E — ін'єктивна оболонка A (подільна оболонка A). Тоді $E = \oplus_{P \in \Pi_K(A)} E_P \oplus C$, де:*

1) *$E_P = \oplus_{\lambda \in \Lambda(P)} D_{\lambda,P}$ для деякої множини індексів $\Lambda(P)$, $D_{\lambda,P} \cong C_{P^\infty}$ для всіх $\lambda \in \Lambda(P)$;*

2) *$C = \oplus_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$, де $C_\lambda \cong F$ для довільного $\lambda \in \Lambda$.*

Доведення. Нехай $D = t_K(E)$, тоді згідно з лемою 6 $D = \oplus_{P \in \Pi_K(E)} E_P$. K-модуль D є K-подільним, а тому (див., наприклад, твердження 2.10 з [5]) і K-ін'єктивним. Тому кожний модуль E_P також є K-ін'єктивним для всіх $P \in \in \Pi_K(E)$. Оскільки E — це істотне розширення A, то $\Pi_K(E) = \Pi_K(A)$.

Нехай $x \in E_P$, $xP = \langle 0 \rangle$, тоді D_x — K-ін'єктивна оболонка модуля xK — міститься у E_P і тому $E_P = D_x \oplus Y$ для деякого K-модуля Y, але $D_x \cong C_{P^\infty}$ згідно з лемою 5. Застосовуючи лему Куратовського – Цорна, доводимо твердження леми при умові 1.

Далі, $E = D \oplus C$ для деякого K-модуля C. Нехай $c \in C$, тоді K — ін'єктивна оболонка модуля cK — ізоморфна K-модулю F. Застосовуючи лему Куратовського — Цорна, доводимо твердження леми при умові 2. Лему доведено.

Лема 8. *Нехай K — деденкіндова область, A — K-модуль. Якщо $\operatorname{Ann}_K(t_K(A)) = P^n$ для деяких $P \in \operatorname{Spec}(K)$, $n \in \mathbb{N}$, то $A = t_K(A) \oplus C$ для деякого K-підмодуля C.*

Доведення. Доведемо лему індукцією по n.

1. При $n = 1$ $t_K(A)$ розкладається у пряму суму K-підмодулів, ізоморфних K/P, оскільки у цьому випадку $t_K(A)$ є векторним простором над полем K/P. Далі, $AP \cap t_K(A) = \langle 0 \rangle$. Розглянемо A/AP як векторний простір над полем

K/P. Тоді $(t_K(A) \oplus AP)/AP \oplus W/AP = AP$ для деякого K/P-модуля W/AP, а отже, W — це K-модуль і $t_K(A) \oplus W = A$.

2. Нехай лему доведено для всіх натуральних $l \leq n-1$; доведемо її для $l = n$, $n \geq 2$. Розглянемо K-модуль $A/\Omega_{P,n-1}(t_K(A))$, тоді $\Omega_{P,n}(t_K(A))/\Omega_{P,n-1}(t_K(A)) = t_K(A/\Omega_{P,n-1}(t_K(A)))$ — векторний простір над полем K/P, і тому згідно з п. 1 маємо $t_K(A)/\Omega_{P,n-1}(t_K(A)) \oplus \oplus Y/\Omega_{P,n-1}(t_K(A)) = A/\Omega_{P,n-1}(t_K(A))$ для деякого K-модуля Y. Але $t_K(Y) = \Omega_{P,n-1}(t_K(A))$, і тому згідно з індуктивним припущенням маємо, що $t_K(Y) \oplus \oplus C = Y$ для деякого K-модуля C, але тоді $t_K(A) \oplus C = A$ і лему доведено.

Лема 9. *Нехай K — дедекіндова область, G — скінченна над центром π-група для деякої множини простих чисел π, A — монолітичний KG-модуль з монолітом M. Нехай далі $MP = \langle 0 \rangle$ для деякого $P \in \mathrm{Spec}(K)$ такого, що* $\mathrm{char}\, K/P = 0$ *або* $\mathrm{char}\, K/P \notin \pi$. *Тоді $\Omega_{P,1}(A) = M$.*

Доведення. Нехай $\zeta(G)$ — центр групи G, $L = \Omega_{P,1}(A)$, $S = KC$. Якщо $z \in \mathrm{Ann}_S(M)$, то Lz — KG-підмодуль A. Виберемо в C таку скінченну підгруппу C_z, що $z \in KC_z$. З теореми 1.3.3 [1] отримуємо розклад $L = M \oplus M_1$ для деякого KC_z-підмодуля M_1. Якщо припустити, що $Lz \neq \langle 0 \rangle$, то $M \subseteq Lz$. З іншого боку, $Lz = Mz \oplus M_1 z = Mz \leq M_1$. Одержана суперечність доводить рівність $Lz = \langle 0 \rangle$, тобто $\mathrm{Ann}_S(M) = \mathrm{Ann}_S(L)$.

Покладемо $T = \mathrm{Ann}_S(M)$, тоді T — ідеал кільця S. Оскільки $MP = \langle 0 \rangle$, то $SP \leq T$. З теореми 1.3.3 [1] отримуємо розклад $M = M_0 \oplus M_0 y_1 \oplus \ldots \oplus M_0 y_n$, де M_0 — простий S-підмодуль M, $y_i \in G$, $1 \leq i \leq n$. Легко бачити, що $\mathrm{Ann}_S(M_0) = T$, тому S/T — поле. L можна розглядати як векторний простір над полем S/T, тому $L = M \oplus B$ для деякого S/T-підпростору B, що водночас є S-підмодулем.

Нехай $F = G/C$, тоді з теореми 1.3.3 [1] маємо рівність $L = M \oplus B_1$ для деякого KG-підмодуля B_1. Оскільки A — KG-монолітичний модуль, то це означає, що $B_1 = \langle 0 \rangle$, тому $L = M$. Лему доведено.

Лема 10. *Нехай K — дедекіндова область, G — група, G — KG-модуль. Покладемо $\Omega_n(A) = \Omega_{P,n}(A)$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$. Припустимо, що A є P-періодичним модулем для деякого $P \in \mathrm{Spec}(K)$ і $\Omega_1(A)$ є простим KG-модулем. Тоді*:

1) *існує така система $\{A_i \mid i \in I\}$ K-підмодулів модуля A, що $A = \oplus_{i \in I} A_i$, і:*

i) *або $A_i \cong K/P^n$ для деякого $n \in \mathbb{N}$ і всіх $i \in I$;*

ii) *або $A_i \cong C_{P^\infty}$ для всіх $i \in I$;*

2) *єдиними KG-підмодулями модуля A є $\langle 0 \rangle$, A, $\Omega_{P,n}(A)$, $n \in \mathbb{N}$;*

3) *якщо A є K-підмодулем деякого модуля B, то $B = A \oplus D$ для деякого K-підмодуля модуля B.*

Доведення. Доведемо твердження 1) леми.

Легко бачити, що $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n(A)$, $\Omega_n(A) \subseteq \Omega_{n+1}(A)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, тоді можливими є лише такі випадки:

i) існує таке $m \in \mathbb{N}$, що $\Omega_m(A) = \Omega_{m+1}(A)$ і m — найменше натуральне число з такою властивістю, тоді

$$\Omega_{m+2}(A) = \{a \in A \mid aP^{m+2} = \langle 0 \rangle\} = \{a \in A \mid (aP)P^{m+1} = \langle 0 \rangle\} =$$

$$= \{a \in A \mid aP^{m+1} = \langle 0 \rangle\} = \Omega_{m+1}(A) = \Omega_m(A).$$

Тому $A = \Omega_m(A)$. Згідно з теоремою 6.14 [5] існує така система натуральних чисел $\{s_i \in \{1, \ldots, m\} \mid i \in I\}$, що $A = \oplus_{i \in I} A_i$, $A_i \cong K/P^{s_i}$.

Доведемо, що $s_i = m$ для всіх $i \in I$. Припустимо, що існує таке $j \in I$, що $s_j < m$. Нехай

$$f \in \bigoplus_{i \in I} A_i, \quad f(i) = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ a, \ 0 \neq a \in A_j, \ aP = \langle 0 \rangle, & i = j. \end{cases}$$

Розглянемо $v \in P^{m-1} \setminus P^m$ і побудований на його основі ізоморфізм KG-модулів $F\colon \Omega_m(A) \to \Omega_1(A)$, $x \to xv$. Тоді

$$\Omega_m(A) \neq \operatorname{Ker} F = \{a \in \Omega_m(A) \mid av = 0\} \supseteq \Omega_{m-1}(A),$$

тому згідно з лемою 1 $\Omega_m(A)/\Omega_{m-1}(A) \cong \Omega_1(A)$. Очевидно, що $f \in \Omega_1(A)$, тоді існує $f_1 \in \oplus_{i \in I} A_i$ таке, що $F(f_1) = f$, але $f_1(j) \in A_j$, тому рівність $f_1(j)v = = f(j) = a \neq 0$ неможлива, а отже, $A \cong (K/P^m)^I$.

ii) $\Omega_n(A) \neq \Omega_{n+1}(A)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді на підставі властивостей відображення F, доведених вище, модуль A є подільним, а тому (див., наприклад, твердження 2.10 з [5]) і ін'єктивним K-модулем. З леми 7 випливає, що $A \cong \cong (C_{p^\infty})^I$ для деякої множини I.

Твердження 2) леми випливає з зазначених вище властивостей відображення F.

Доведемо твердження 3) леми. Якщо $A = \Omega_m(A)$, то це твердження випливає з леми 8. Якщо A — ін'єктивний K-модуль, то це твердження випливає з означення ін'єктивного модуля. Твердження 1) даної леми показує, що інших випадків не існує. Лему доведено.

Лема 11. *Нехай K — дедекіндова область, G — скінченна над центром π-група для деякої множини простих чисел π, C — центр групи G, $S = KC$, A — монолітичний KG-модуль з монолітом M і:*

i) *$t_K(A)$ — P-періодичний модуль для деякого $P \in \operatorname{Spec}(K)$;*

ii) *$\operatorname{char} K/P = 0$ або $\operatorname{char} K/P \notin \pi$;*

iii) *M — S-моноліт модуля A.*

Тоді A — P-періодичний модуль.

Доведення. Покладемо $\Omega_n(t_K(A)) = \Omega_{P,n}(t_K(A))$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$. Нехай $0 \neq a \in A$, тоді $aS \neq \langle 0 \rangle$ і $M \leq aS$, і $0 \neq ax \in M$ для деякого $x \in S$. Виберемо скінченну підгруппу $C_x \leq C$ з властивістю $x \in C_x$. З теореми 1.3.3 [1] випливає, що існує такий KC_x-підмодуль D_1, що $t_K(A) \cap D_1 = \langle 0 \rangle$ і $k_x A \subseteq \subseteq t_K(A) + D_1$, де $k_x = |C_x|$. Розглянемо наступні випадки: $\operatorname{char} K/P = 0$ і $\operatorname{char} K/P = p$ — просте число.

1. Якщо $\operatorname{char} K/P = 0$, то $\Omega_1(t_K(A))$ — це векторний простір над полем нульової характеристики, тому його адитивна група є подільною. Якщо $\Omega_n(t_K(A)) \neq \Omega_{n+1}(t_K(A))$ при деякому $n \in \mathbb{N}$, то з леми 9 випливає $\Omega_1(t_K(A)) = M$, тому $\Omega_{n+1}(t_K(A))/\Omega_n(t_K(A)) \cong \Omega_1(t_K(A))$. Оскільки $t_K(A) = = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n(t_K(A))$, то адитивна група $t_K(A)$ є подільною і не має скруту.

2. Якщо $K/P = p$ — просте число, то з тих же причин адитивна група $t_K(A)$ є p-групою.

У випадку 1 $A/D_1 = (t_K(A)+D_1)/D_1 \oplus E/D_1$ згідно з теоремою 27.1 [6]; у випадку 2 $t_K(A)+D_1/D_1$ — силовська p-підгрупа групи A/D_1 і знову $A/D_1 = (t_K(A)+D_1)/D_1 \oplus E/D_1$ для деякої підгрупи E.

У випадку 1 E/D_1 — періодична частина A/D_1, у випадку 2 — силовська p'-підгрупа. У кожному з цих випадків вона характеристична, тобто є KC_x-підмодулем. Таким чином, $A = t_K(A) \oplus E$ для деякого KC_x-підмодуля E.

Припустимо, що $t_K(A)x = \langle 0 \rangle$, тоді маємо $ax \in Ax = t_K(A)x \oplus Ex \subseteq E$. В той же час $0 \neq ax \in M \subseteq t_K(A)$, що суперечить рівності $t_K(A) \cap E = \langle 0 \rangle$. Отримана суперечність показує, що $t_K(A)x \neq \langle 0 \rangle$. Покладемо $R = \mathrm{Ann}_A(x) = \{ a \in A \mid ax = 0 \}$. Оскільки $x \in KC$, то R — KG-підмодуль A. З доведеного вище випливає, що $t_K(A) \not\subseteq R$. Оскільки в силу леми 10 всі власні KG-підмодулі $t_K(A)$ вичерпуються $\Omega_n(t_K(A))$, $n \in \mathbb{N}$, то $t_K(A) \cap R = \Omega_n(t_K(A))$ для деякого $n \in \mathbb{N}$. Але це означає, що RP^n не має K-скруту, тобто $RP^n \neq \langle 0 \rangle$. Але RP^n — KG-підмодуль; якщо $RP^n \neq \langle 0 \rangle$, то $M \subseteq RP^n$. Таким чином, $RP^n = \langle 0 \rangle$, тобто $R \subseteq \Omega_n(t_K(A))$. З вибору x випливає, що $t_K(A)x$ — ненульовий KG-підмодуль A, тому $M \subseteq t_K(A)x$ і $ax \in t_K(A)x$, тобто $ax = bx$ для деякого $b \in t_K(A)$. Тоді $(a-b)x = 0$ і $a - b \in R \subseteq t_K(A)$, тому $a \in t_K(A)$ і $A = t_K(A)$. Лему доведено.

Лема 12. *Нехай K — дедекіндова область, G — скінченна над центром π-група для деякої множини простих чисел π, C — центр групи G, $S = KC$, A — монолітичний модуль з монолітом M і:*

i) *$t_K(A)$ — P-періодичний модуль для деякого $P \in \mathrm{Spec}(K)$;*

ii) *$\mathrm{char}\, K/P = 0$ або $\mathrm{char}\, K/P \notin \pi$.*

Тоді A — P-періодичний модуль.

Доведення. Якщо V — деякий K-модуль, то згідно з означенням покладемо $\Omega_n(V) = \Omega_{P,n}(V)$, $n \in \mathbb{N}$. З теореми 1.3.1 [1] отримуємо розклад $M = M_0 \oplus M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$, де M_i — простий S-підмодуль A, $0 \leq i \leq n$. Якщо $t_K(A)P^m = \langle 0 \rangle$ для деякого $m \in \mathbb{N}$, то AP^m не має K-скруту. Якщо припустити, що $AP^m \neq \langle 0 \rangle$, то це суперечитиме включенню $M \subseteq AP^m$. Таким чином, $AP^m = \langle 0 \rangle$ і тому $A = t_K(A)$.

Розглянемо тепер випадок, коли $t_K(A)$ є K-подільним. Позначимо через Q_i максимальний S-підмодуль, що містить у собі $\oplus_{k \neq i} M_k$ і має нульовий перетин з M_i. Тоді A/Q_i — S-монолітичний модуль з монолітом $M_i + Q_i/Q_i$. З леми 11 випливає, що A/Q_i — P-періодичний модуль, і з леми 9 випливає $\Omega_1(A/Q_i) = M_i + Q_i/Q_i$, $0 \leq i \leq n$, але тоді

$$A/\bigcap_{0 \leq k \leq n} Q_k \;\leq\; \bigoplus_{k=0}^{n} A/Q_k.$$

При цьому $W = \bigcap_{0 \leq k \leq n} Q_k$ має нульовий перетин з M, тобто W не має K-скруту. Далі,

$$\Omega_1(A/W) \;\cong\; \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega_1(A/Q_k) \;=\; \bigoplus_{k=0}^{n} (M_k + Q_k)/Q_k \;\cong\; \Omega_1(t_k(A) + W/W).$$

Таким чином, $\Omega_1(A/W) = \Omega_1(t_k(A) + W/W)$. Але $t_K(A) + W/W$ є K-подільним модулем. Звідси випливає, що $A/W = t_K(A) + W/W$, тобто $A = t_K(A) \oplus W$.

Ясно, що W — S-підмодуль A. Якщо припустити, що $W \neq \langle 0 \rangle$, то з теореми 1.3.3 [1] випливає існування KG-підмодуля W_1 з властивостями: $W_1 \cap t_K(A) = \langle 0 \rangle$ і $kA \subseteq t_K(A) + W_1$, де $k = |G/C|$. Оскільки $W \neq \langle 0 \rangle$, то W не має K-скруту. Це означає, що A не є K-періодичним модулем. Але тоді $W_1 \neq \langle 0 \rangle$ і $M \subseteq W_1$, що неможливо. З отриманої суперечності випливає, що $A = t_K(A)$. Лему доведено.

Тепер можна довести теорему — основний результат даної роботи.

Доведення. Позначимо через E максимальний KG-підмодуль A, що має з M нульовий перетин. Якщо B анулюється P^n, то $AP^n \cap B = \langle 0 \rangle$; у цьому випадку виберемо E так, щоб $AP^n \subseteq E$.

Звідси випливає, що A/E — монолітичний модуль з монолітом $M + E/E$. Згідно з лемою 12 A/E — P-періодичний модуль і згідно з лемою 9 $\Omega_1(A/E) = M + E/E$. З леми 10 випливає, що B — або пряма сума підмодулів, ізоморфних K/P^n при деякому $n \in \mathbb{N}$, або пряма сума підмодулів, ізоморфних C_{p^∞}.

У першому випадку з вибору E випливає, що A/E анулюється P^n, тобто A/E — пряма сума підмодулів, ізоморфних K/P^n. Оскільки $\Omega_1(A/E) = M + E/E = \Omega_1(B + E/E)$, то звідси випливає, що $A/E = B + E/E$, тобто $A = B \oplus E$.

У другому випадку з K-подільності A/E і $B + E/E$ і рівності $\Omega_1(A/E) = \Omega_1(B + E/E)$ знову матимемо $A/E = B + E/E$ і тому $A = B \oplus E$. Теорему доведено.

1. *Казарин Л. С., Курдаченко Л. А.* Условия конечности и факторизации в бесконечных группах // Успехи мат. наук. – 1992. – **47**, № 3. – С. 75–114.
2. *Kovačs L. G., Newman M. F.* Direct complementation in groups with operators // Arch. Math. – 1962. – **13**. – P. 427–433.
3. *Robinson D. J. S.* Homology and cohomology of locally supersoluble groups // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1987. – **102**, № 2. – P. 233–250.
4. *Кэртис Ч., Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. – М.: Наука, 1969. – 668 с.
5. *Sharpe D. W., Vamos P.* Injective modules. – Cambridge: Cambridge Univ. press, 1972. – 190 p.
6. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы: В 2-х т. – М.: Мир, 1974, 1977. – Т. 1, 2.

Одержано 23.04.96