УДК 519.21

Н. А. Ружевич (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

ПРО ОДНУ ГРАНИЧНУ ТЕОРЕМУ ДЛЯ АДИТИВНОГО ФУНКЦІОНАЛУ НА НЕРЕКУРЕНТНОМУ ЛАНЦЮГУ МАРКОВА

We establish conditions of asymptotic normality of the distribution of an additive functional on a nonrecurrent Markov chain.

Знайдено умови, при яких розподіл адитивного функціоналу на нерекурентному ланцюгу Маркова є асимптотично нормальним.

Розглянемо ланцюг Маркова $\{X_k\}$ з фазовим простором $\{0, 1, 2, \dots\}$ та ймовірностями переходу за один крок

$$P(X_{k+1}=n+1 \mid X_k=n) = p_n, \quad P(X_{k+1}=n \mid X_k=n) = r_n = 1-p_n,$$

$n=0, 1, 2, \dots$, і на цьому ланцюгу адитивний функціонал

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} f(X_k),$$

де $f(k)=f_k$, $k=0, 1, 2, \dots$, — деяка функція, що набуває значень на R. У цьому випадку з ланцюгом Маркова та адитивним функціоналом можна пов'язати два дискретних процеси з незалежними приростами $\xi_m = \sum_{j=0}^{m} \nu_j$, $\eta_m = \sum_{j=0}^{m} f_j \nu_j$, де ν_j — час перебування ланцюга в стані j. Випадкові величини ν_j — незалежні й геометрично розподілені, тобто $P(\nu_j=n)= p_j r_j^{n-1}$, $M\nu_j = 1/p_j$, $n=1, 2, \dots, j=0, 1, 2, \dots$. Зауважимо, що $\eta_m=\alpha_{\xi_m}$.

Робота присвячена дослідженню асимптотичної поведінки умовного розподілу адитивного функціоналу η_m при умові, що $\xi_m=n$, коли $m \to \infty$, $n \to \infty$. Зауважимо, що граничні теореми для адитивних функціоналів на рекурентних випадкових блуканнях розглядались в [1].

Припустимо, що існує число $\delta > 0$ таке, що

$$\inf_j p_j > \delta. \tag{1a}$$

Тоді доцільно розглядати лише випадок, коли

$$n \sim M\xi_m = \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{p_j}, \tag{2}$$

бо з закону великих чисел випливає

$$\frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m} \nu_j - \frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m} M\nu_j \to 0$$

при $m \to \infty$ за ймовірністю.

Оскільки ξ_m та η_m є сумами незалежних випадкових величин, то вказаний умовний розподіл (η_m при умові $\xi_m=n$) можна було б шукати, використовуючи локальну граничну теорему для векторів $(\nu_j, f_j\nu_j)$. Але в даному випадку звичайні локальні теореми не діють, бо розподіл цих векторів на площині вироджений. У роботі використано дослідження умовної характеристичної функції величини η_m при умові $\xi_m=n$. Для неї можна вказати певне інтегральне зображення, для якого застосовується ідея методу перевалу.

Теорема. *Нехай існує число* $\delta > 0$ *таке, що здійснюється* (1а) *і*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m} p_j \le 1-\delta. \tag{1б}$$

Крім того, виконуються умови

$$\sup_j |f_j| < \infty, \tag{3}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_j^2 r_j = \infty, \tag{4а}$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{j=0}^{m} f_j / p_j}{\sqrt{\sum_{j=0}^{m} f_j^2 r_j / p_j^2}} = 0, \tag{4б}$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m} \frac{f_j}{p_j^2} = 0. \tag{4в}$$

Тоді умовний розподіл величини $\eta_m / \sqrt{D\eta_m}$ *при умові* $\xi_m = n$ *є асимптотично нормальним* $N(0,1)$, *тобто*

$$\lim_{m\to\infty} M\exp\left(it\sum_{j=0}^{m} f_j \nu_j \Big/ \sqrt{\sum_{j=0}^{m} f_j^2 r_j / p_j^2} \;\Bigg|\; \sum_{j=0}^{m} \nu_j = n \right) = e^{-t^2/2}$$

для m, n, *що задовольняють* (2).

Доведення. Позначимо $\varphi_m(u,z) = Me^{iu\eta_m} z^{\xi_m}$. Тоді

$$\varphi_m(u,z) = \prod_{j=0}^{m} \frac{p_j e^{iuf_j} z}{1 - r_j e^{iuf_j} z},$$

$$P(\xi_m = n) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi_m(0,z)\, z^{-n-1} dz,$$

$$Me^{iu\eta_m} I_{\{\xi_m = n\}} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi_m(u,z)\, z^{-n-1} dz,$$

де C — контур, що лежить в області аналітичності $\varphi_m(u,z)$ по z і охоплює точку 0. Тоді $\varphi_m(u\,|\,n) = \int_C \varphi_m(u,z)\, z^{-n-1} dz \Big/ \int_C \varphi_m(0,z)\, z^{-n-1} dz$. Звідси отримаємо

$$\varphi_m(u\,|\,n) = \exp\left(iu\sum_{j=0}^{m} f_j \right) \frac{I_{m,n}(u)}{I_{m,n}(0)}, \tag{5}$$

де $I_{m,n}(u) = \int_C \left(z^{n-m} \prod_{j=0}^{m} (1 - r_j e^{iuf_j} z) \right)^{-1} dz$.

Використаємо ідею методу перевалу для обчислення інтеграла $I_{m,n}(u)$ (див. [2, с. 445]). Для цього запишемо $I_{m,n}(u)$ у вигляді $I_{m,n}(u) = \int_C \exp\{\psi_{m,n}(u, z)\}\, dz$, де $\psi_{m,n}(u,z) = -(n-m)\ln z - \sum_{j=0}^{m} \ln(1 - r_j e^{iuf_j} z)$ — аналітична функція при $0 < |z| < \inf\limits_{j \le m} \frac{1}{r_j}$.

Рівняння для знаходження точки перевалу має вигляд $\frac{\partial}{\partial z}\psi_{m,n}(u,z)=0$, що в даному випадку еквівалентне виразу

$$\sum_{j=0}^{m}(1-r_j e^{iuf_j} z)^{-1} = n+1. \tag{6}$$

Позначимо через $z_{m,n}(u)$ той неперервний розв'язок цього рівняння, для якого $z_{m,n}(0)\in\left[0,\ \inf\limits_{j\le m}\frac{1}{r_j}\right)$. Покажемо, що такий розв'язок існує і єдиний для досить малих u і достатньо великих m. Для цього розглянемо функції

$$f_m(z) = \sum_{j=0}^{m}(1-r_j z)^{-1} - (n+1)$$

і

$$g_m(z,u) = \sum_{j=0}^{m}(1-r_j e^{iuf_j} z)^{-1} - \sum_{j=0}^{m}(1-r_j z)^{-1}.$$

Зауважимо, що функція $f_m(z)$ не має нулів для достатньо великих m і для комплексних z при $|z|<\inf\limits_{j\le m}\frac{1}{r_j}$. Дійсно, оскільки

$$(1-r_j z)^{-1} = \frac{1-r_j\bar{z}}{|1-r_j z|^2} = \frac{1-r_j\operatorname{Re}z}{|1-r_j z|^2} + \frac{ir_j\operatorname{Im}z}{|1-r_j z|^2},$$

то рівняння $f_m(z)=0$ еквівалентне двом рівнянням: $\sum_{j=0}^{m}(1-r_j\operatorname{Re}z)/|1-r_j z|^2 = n+1$ та $\operatorname{Im}z\sum_{j=0}^{m} r_j/|1-r_j z|^2 = 0$. Звідси $\operatorname{Im}z=0$, бо $\sum_{j=0}^{m} r_j/|1-r_j z|^2 > 0$ для достатньо великих m згідно з (1б). Для дійсних z при $|z|<\inf\limits_{j\le m}\frac{1}{r_j}$ функція $f_m(z)$ монотонно зростаюча, оскільки згідно з (1б) $f_m'(z) = \sum_{j=0}^{m} r_j/|1-r_j z|^2 > 0$ для достатньо великих m, а тому для дійсних z функція $f_m(z)$ має єдиний нуль при $|z|<\inf\limits_{j\le m}\frac{1}{r_j}$ для достатньо великих m. Отже, функція $f_m(z)$ має єдиний нуль в крузі $|z|<\inf\limits_{j\le m}\frac{1}{r_j}$ для достатньо великих m.

Нехай $0<R_m<\inf\limits_{j\le m}\frac{1}{r_j}$ — таке число, що нуль функції $f_m(z)$ міститься в крузі $|z|<R_m$. Далі, оскільки функцію $g_m(z,u)$ за формулою Тейлора в околі точки $u=0$ можна записати у вигляді

$$g_m(z,u) = -zu\sum_{j=0}^{m}\frac{r_j f_j}{(1-r_j z)^2} -$$

$$-\frac{u^2}{2}\left(z\sum_{j=0}^{m}\frac{r_j f_j^2 e^{i\theta u f_j}}{(1-r_j e^{iu\theta f_j} z)^2} + 2z^2\sum_{j=0}^{m}\frac{r_j^2 f_j^2 e^{i2\theta u f_j}}{(1-r_j e^{iu\theta f_j} z)^3}\right),$$

де $0 < \theta < 1$, то, враховуючи, що $|1 - r_j e^{iu} z| \geq 1 - r_j R_m$ при $|z| = R_m$ для довільного дійсного u, отримуємо

$$|g_m(z, u)| \leq R_m |u| \sum_{j=0}^{m} \frac{r_j |f_j|}{(1 - r_j R_m)^2} +$$

$$+ \frac{u^2}{2} \left(R_m \sum_{j=0}^{m} \frac{r_j f_j^2}{(1 - r_j R_m)^2} + 2R_m^2 \sum_{j=0}^{m} \frac{r_j^2 f_j^2}{(1 - r_j R_m)^3} \right).$$

У правій частині останньої нерівності всі суми скінченні згідно з (1б) і (3) для достатньо великих m, а тому для достатньо малих u і достатньо великих m $|f_m(z)| > |g_m(z, u)|$ при $|z| = R_m$. Звідси з урахуванням того, що $g_m(z, u)$ і $f_m(z)$ — аналітичні функції при $|z| \leq R_m$, одержуємо, що функції $f_m(z)$ і $f_m(z) + g_m(z, u) = \sum_{j=0}^{m} (1 - r_j e^{iuf_j} z)^{-1} - (n+1)$ згідно з теоремою Руше (див. [2, с. 424]) мають єдиний нуль при $|z| \leq R_m$ для достатньо малих u і достатньо великих m. Це означає, що рівняння (6) при достатньо малих u і достатньо великих m має єдиний неперервний розв'язок $z_{m,n}(u)$, для якого $z_{m,n}(0) \in$ $\in \left[0, \inf\limits_{j \leq m} \frac{1}{r_j}\right)$. Для скорочення запису використовуватимемо позначення $z_{m,n}(u) = z(u)$.

Лема. *В умовах теореми*

$$\lim_{n \to \infty} z_{m,n}(0) = 1.$$

Доведення. Використовуючи позначення $z(0) = z_{m,n}(0)$, з (6) отримуємо

$$\sum_{j=0}^{m} (1 - r_j z(0))^{-1} = n + 1.$$

Нехай $\theta_{m,n}(z) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{m} (1 - r_j z)^{-1}$. Тоді $\theta_{m,n}(1) = \frac{M\xi_m}{n+1}$, $\theta_{m,n}(z(0)) = 1$. За теоремою Лагранжа про скінченні прирости $\theta_{m,n}(1) - \theta_{m,n}(z(0)) =$ $= \theta'_{m,n}(\lambda_{m,n})(1 - z(0))$, де $\lambda_{m,n}$ — точка між 1 та $z(0)$. Звідси

$$1 - z(0) = \left(\frac{M\xi_m}{n+1} - 1 \right) \Big/ \left(\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{m} \frac{r_j}{(1 - r_j \lambda_{m,n})^2} \right).$$

Оскільки за умовою (2) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{M\xi_m}{n} = 1$, то для доведення леми достатньо показати, що знаменник правої частини останньої рівності відокремлений від нуля. Дійсно, $z(0) \in \left[0, \inf\limits_{j \leq m} \frac{1}{r_j}\right)$, а тому $0 < \lambda_{m,n} < \inf\limits_{j \leq m} \frac{1}{r_j}$ і $\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{m} \frac{r_j}{(1 - r_j \lambda_{m,n})^2} > \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{m} r_j$. Для достатньо великих m з умови (1б) випливає

$$\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{m} r_j \geq \frac{m+1}{n+1} \frac{\delta}{2},$$

а з (1а), (2) — $m+1 \le n \le \frac{m+1}{\delta}$. Звідси отримуємо $\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{m} r_j \ge$ $\ge \frac{m+1}{(m+1)/\delta+1}\frac{\delta}{2}$ для достатньо великих m і $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{m} r_j \ge \frac{1}{2}$, що і доводить лему.

Повернемось до доведення теореми. Тоді для обчислення $I_{m,n}(u)$ виберемо такий контур інтегрування C, що складається з відрізка $[A, B]$ ($A = z(0) - i\rho$, $B = z(0) + i\rho$) і дуги кола $\cup BA$ з центром в точці 0 та радіусом $\sqrt{z^2(0)+\rho^2}$, де $\rho > 0$ — досить мале число, якщо коло обходити проти годинникової стрілки.

Позначимо $C_1 = [A, B]$, $C_2 = \cup BA$. Тоді

$$I_{m,n}(u) = I^1_{m,n}(u) + I^2_{m,n}(u), \tag{7}$$

де $I^k_{m,n}(u) = \int_{C_k} \exp\{\psi_{m,n}(u,z)\}\,dz$, $k = 1, 2$. Для скороченого запису використовуватимемо позначення $I^k_{m,n}(u) = I_k(u)$.

Покажемо тепер, що для достатньо великих m, n

$$I_1(u) \sim i\sqrt{2\pi}\exp\{\psi_{m,n}(u,z(u))\} \Big/ \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial z^2}\psi_{m,n}(u,z(u))} \tag{8}$$

при $u = t/\sqrt{D\eta_m}$, $|t| < \infty$. Для цього розкладемо в ряд Тейлора функцію $\psi_{m,n}(u,z)$ в околі точки $z(u)$:

$$\psi_{m,n}(u,z) = \psi_{m,n}(u,z(u)) +$$

$$+ \frac{1}{2}(z-z(u))^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\psi_{m,n}(u,z(u)) + o((z-z(u))^2).$$

Зауважимо, що умови (4а) і

$$\lim_{m\to\infty} D\eta_m = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{f_j^2 r_j}{p_j^2} = \infty \tag{4г}$$

еквівалентні, бо з (1а) випливає

$$\frac{1}{\delta^2}\sum_{j=0}^{\infty} f_j^2 r_j \ge \sum_{j=0}^{\infty}\frac{f_j^2 r_j}{p_j^2} \ge \sum_{j=0}^{\infty} f_j^2 r_j .$$

Тоді $z(u) = z\left(t/\sqrt{D\eta_m}\right) \sim z(0)$ згідно з (4г) і

$$\psi_{m,n}(u,z) \sim \psi_{m,n}(u,z(u)) + \frac{1}{2}(z-z(0))^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\psi_{m,n}(u,z(u)).$$

Звідси і з (7) випливає

$$I_1(u) \sim \exp\{\psi_{m,n}(u,z(u))\}\int_{C_1}\exp\left\{\frac{1}{2}(z-z(u))^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\psi_{m,n}(u,z(u))\right\}dz .$$

Тоді, використовуючи позначення

$$D_{m,n}(u) = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\psi_{m,n}(u, z(u)) = \frac{1}{z(u)}\sum_{j=0}^{m}\frac{r_j e^{iuf_j}}{(1 - r_j e^{iuf_j} z(u))^2}$$

і вводячи заміну змінних $iv = (z - z(0))\sqrt{D_{m,n}(u)}$, одержуємо

$$I_1(u) \sim \frac{i\exp\{\psi_{m,n}(u, z(u))\}}{\sqrt{\exp\left\{\frac{\partial^2}{\partial z^2}\psi_{m,n}(u, z(u))\right\}}}\int_{-\rho\sqrt{D_{m,n}(u)}}^{\rho\sqrt{D_{m,n}(u)}}\exp\left\{-\frac{v^2}{2}\right\}dv.$$

Звідси, враховуючи, що за умовою (4г) і лемою

$$D_{m,n}(u) \sim D_{m,n}(0) \sim D\eta_m, \tag{9}$$

згідно з (4г) отримуємо

$$I_1(u) \sim \frac{i\exp\{\psi_{m,n}(u, z(u))\}}{\sqrt{\exp\left\{\frac{\partial^2}{\partial z^2}\psi_{m,n}(u, z(u))\right\}}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{v^2}{2}\right\}dv =$$

$$= \frac{i\sqrt{2\pi}\exp\{\psi_{m,n}(u, z(u))\}}{\sqrt{\exp\left\{\frac{\partial^2}{\partial z^2}\psi_{m,n}(u, z(u))\right\}}},$$

що і доводить (8).

Розглянемо тепер $I_2(u)$. Нехай $\varphi_0 = \operatorname{arctg}(\rho / z(0))$. Тоді $z \in C_2$, якщо $z = \sqrt{z^2(0) + \rho^2}\, e^{i\varphi}$, $\varphi \in [\varphi_0, 2\pi - \varphi_0]$. Оскільки здійснюється умова (3), то $\varphi \pm uf_j \in [\varphi_1, 2\pi - \varphi_1]$ для досить малих u та $\varphi \in [\varphi_0, 2\pi - \varphi_0]$, якщо $0 < \varphi_1 < \varphi$, φ_1 — фіксовано. Зауважимо, що для $0 < a < 1$ $(|1 - ae^{i\varphi}|)^{-1} \le (|1 - ae^{i\varphi_1}|)^{-1}$, якщо $\varphi \in [\varphi_1, 2\pi - \varphi_1]$. Тому $(|1 - r_j e^{iuf_j} z|)^{-1} \le \left(\left|1 - r_j\sqrt{z^2(0) + \rho^2}\, e^{i\varphi_1}\right|\right)^{-1}$ для $r_j\sqrt{z^2(0) + \rho^2} < 1$, тобто для досить великих m, n, бо $z(0) \to 1$, якщо $n \to \infty$, та досить малого $\rho > 0$. Звідси, позначивши $z_1 = \sqrt{z^2(0) + \rho^2}\, e^{i\varphi_1}$, матимемо

$$\sup_{z \in C_2} |\exp\{\psi_{m,n}(u, z)\}| \le |\exp\{\psi_{m,n}(0, z_1)\}| \sim$$

$$\sim \left|\exp\left\{\psi_{m,n}(0, z(0)) + \frac{1}{2}(z_1 - z(0))^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\psi_{m,n}(0, z(0))\right\}\right| \le$$

$$\le \exp\left\{\psi_{m,n}(0, z(0)) - \frac{\lambda}{2}\rho^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\psi_{m,n}(0, z(0))\right\}$$

для досить великих m, n і для довільного $\lambda \in (0, 1)$.

Таким чином,

$$|I_2(u)| = \exp\{\psi_{m,n}(0, z(0))\}\, O\left(\exp\left\{-\frac{\lambda}{2}\rho^2 D_{m,n}(0)\right\}\right). \tag{10}$$

Розглянемо тепер асимптотичну формулу для величини

$$g_{m,n}(u) = \exp\{\psi_{m,n}(u, z(u)) - \psi_{m,n}(0, z(0))\} \tag{11}$$

при $u = t / \sqrt{D\eta_m}$. Використовуючи для цього розклад за формулою Тейлора в околі точки $u = 0$ з точністю $o(u^2)$, отримуємо

$$g_{m,n}(u) = \exp\{ iA_{m,n}u - B_{m,n}u^2/2 \}, \tag{12}$$

де

$$iA_{m,n} = i\left(\sum_{j=0}^{m} \frac{f_j}{1 - r_j z(0)} - \sum_{j=0}^{m} f_j \right) + \frac{z'(0)}{z(0)},$$

$$B_{m,n} = z(0) \sum_{j=0}^{m} \frac{f_j^2 r_j}{(1 - r_j z(0))^2} - 2i z'(0) \sum_{j=0}^{m} \frac{f_j r_j}{(1 - r_j z(0))^2} -$$

$$- (z'(0))^2 \left\{ \sum_{j=0}^{m} \frac{r_j^2}{(1 - r_j z(0))^2} + \frac{1}{z(0)} \sum_{j=0}^{m} \frac{r_j}{1 - r_j z(0)} - \frac{1}{z^2(0)} \right\} - \frac{z''(0)}{z(0)}.$$

Обчислимо тепер $z'(0)$ і $z''(0)$, двічі диференціюючи (6) як неявну функцію в точці $u = 0$. Тоді згідно з доведеною лемою матимемо

$$z'(0) \sim -i \frac{\sum_{j=0}^{m} f_j r_j / p_j^2}{\sum_{j=0}^{m} r_j / p_j^2},$$

$$z''(0) \sim \frac{1}{\sum_{j=0}^{m} r_j / p_j^2} \left(\sum_{j=0}^{m} \frac{f_j^2 r_j}{p_j^2} + 2 \sum_{j=0}^{m} \frac{f_j^2 r_j^2}{p_j^3} + \right.$$

$$\left. + 2 \frac{\sum_{j=0}^{m} f_j r_j / p_j^2}{\sum_{j=0}^{m} r_j / p_j^2} \left(\frac{\sum_{j=0}^{m} f_j r_j / p_j^2}{\sum_{j=0}^{m} r_j / p_j^2} \sum_{j=0}^{m} \frac{r_j}{p_j^2} - 2 \sum_{j=0}^{m} \frac{f_j r_j}{p_j^3} \right) \right).$$

Далі зауважимо, що оскільки для достатньо великих m з (1б) випливає $\sum_{j=0}^{m} r_j / p_j^2 \ \geq \ \sum_{j=0}^{m} (1 - p_j) \geq \delta m$, то

$$\frac{\left| \sum_{j=0}^{m} f_j r_j / p_j^2 \right|}{\sum_{j=0}^{m} r_j / p_j^2} \leq \frac{1}{\delta m} \left| \sum_{j=0}^{m} \frac{f_j r_j}{p_j^2} \right| \leq \frac{1}{\delta m} \left| \sum_{j=0}^{m} \frac{f_j}{p_j} \right| + \frac{1}{\delta m} \left| \sum_{j=0}^{m} \frac{f_j}{p_j^2} \right|$$

для достатньо великих m. Тому з (3), (4б) і (4в), в свою чергу, випливає

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\sum_{j=0}^{m} f_j r_j / p_j^2}{\sum_{j=0}^{m} r_j / p_j^2} = 0. \tag{13}$$

Тоді з (1а) і (3) отримуємо $z'(0) \sim 0$,

$$z''(0) \sim \frac{1}{\sum_{j=0}^{m} r_j / p_j^2} \left(\sum_{j=0}^{m} \frac{f_j^2 r_j}{p_j^2} + 2 \sum_{j=0}^{m} \frac{f_j^2 r_j^2}{p_j^3} \right).$$

Звідси згідно з лемою, (12) і (4г) маємо

$$g_{m,n}\left(t / \sqrt{D\eta_m} \right) \sim \exp\left\{ itA_{m,n} / \sqrt{D\eta_m} - \frac{t^2}{2} B_{m,n} / D\eta_m \right\}, \tag{14}$$

де

$$A_{m,n} / \sqrt{D\eta_m} \sim \left(\sum_{j=0}^{m} \frac{f_j}{p_j} - \sum_{j=0}^{m} f_j \right) \Big/ \sqrt{\sum\nolimits_{j=0}^{m} f_j^2 r_j / p_j^2},$$

$$B_{m,n} / D\eta_m \sim 1 + \frac{1}{\sum_{j=0}^{m} f_j^2 r_j / p_j^2} \left(\frac{\sum_{j=0}^{m} f_j r_j / p_j^2}{\sum_{j=0}^{m} r_j / p_j^2} \left(- \sum_{j=0}^{m} \frac{r_j}{p_j^2} - 1 \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sum_{j=0}^{m} r_j / p_j^2} \left(\sum_{j=0}^{m} \frac{f_j^2 r_j}{p_j^2} + 2 \sum_{j=0}^{m} \frac{f_j^2 r_j^2}{p_j^3} \right) \right).$$

Тому з умов (3), (1a), (13), (4a) випливає

$$B_{m,n} / D\eta_m \to 1 \quad \text{при} \quad m \to \infty, \tag{15}$$

а значить, згідно з (14) $g_{m,n}\left(t / \sqrt{D\eta_m}\right) \sim e^{-t^2/2}$. Тоді звідси і з (11), (8), (10) одержуємо

$$\frac{\left| I_2\left(t / \sqrt{D\eta_m}\right) \right|}{\left| I_1\left(t / \sqrt{D\eta_m}\right) \right|} = e^{t^2/2}\, O\left(\exp\left\{ -\frac{\lambda}{2} \rho^2 D_{m,n}(0) \right\} \sqrt{D_{m,n}\left(t / \sqrt{D\eta_m}\right)} \right) = o(1)$$

згідно з (9) і (4a), тобто

$$I_2\left(t / \sqrt{D\eta_m}\right) = o\left(I_1\left(t / \sqrt{D\eta_m}\right) \right).$$

Таким чином, згідно з (7) $I_{m,n}(u) \sim I_1(u) + o(I_1(u))$ при $u = t / \sqrt{D\eta_m}$ для достатньо великих m, n, а значить, згідно з (8)

$$I_{m,n}(u) \sim i\sqrt{2\pi} \exp\{\psi_{m,n}(u, z(u))\} \Big/ \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi_{m,n}(u, z(u))}$$

при $u = t / \sqrt{D\eta_m}$ для достатньо великих m, n. Звідси за умовами (5) і (11) отримуємо

$$\varphi_m\left(t / \sqrt{D\eta_m} \,\middle|\, n\right) \sim$$

$$\sim \exp\left\{ it \sum_{j=0}^{m} \frac{f_j}{\sqrt{D\eta_m}} \right\} g_{m,n}\left(t / \sqrt{D\eta_m}\right) \sqrt{D_{m,n}(0) / D_{m,n}\left(t / \sqrt{D\eta_m}\right)} \tag{16}$$

для досить великих m, n.

Тому, враховуючи, що з (14) випливає

$$\exp\left\{ it \sum_{j=0}^{m} \frac{f_j}{\sqrt{D\eta_m}} \right\} g_{m,n}\left(t / \sqrt{D\eta_m}\right) \sim$$

$$\sim \exp\left\{ it \frac{\sum_{j=0}^{m} f_j + A_{m,n}}{\sqrt{D\eta_m}} \right\} \exp\left\{ -\frac{t^2}{2} B_{m,n} / D\eta_m \right\},$$

де

$$\frac{\sum_{j=0}^{m} f_j + A_{m,n}}{\sqrt{D\eta_m}} \sim \frac{\sum_{j=0}^{m} f_j / p_j}{\sqrt{\sum_{j=0}^{m} f_j^2 r_j / p_j^2}} \to 0$$

при $m \to \infty$ згідно з (4а), маємо $\exp\left\{it \sum\limits_{j=0}^{m} \frac{f_j}{\sqrt{D\eta_m}}\right\} g_{m,n}\left(t/\sqrt{D\eta_m}\right) \sim e^{-t^2/2}$ згідно з (15). Тоді з (16) і (9) отримуємо для достатньо великих m, n $\varphi_m\left(t/\sqrt{D\eta_m}\,|\,n\right) \sim e^{-t^2/2}$, що і доводить теорему.

Приклад. Умови теореми виконуються, якщо p_j задовольняють умову (1а) і

$$\sum_{j=0}^{\infty} |p_j - p| < \infty, \quad 0 < \varepsilon \le p \le 1-\delta, \tag{17}$$

а f_j задовольняють умову (3) і умови

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=0}^{m} f_j = 0, \tag{18}$$

$$\inf_j |f_j| = f > 0. \tag{19}$$

Дійсно, тоді виконується умова (1б), бо

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m} p_j = p \le 1-\delta,$$

оскільки

$$\left|\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m} p_j\right| = \left|\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m} ((p_j - p) + p)\right| \le \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m} |p_j - p| + \frac{m+1}{m} p \le$$

$$\le \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{\infty} |p_j - p| + \left(1 + \frac{1}{m}\right) p \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} p \le 1-\delta$$

згідно з (17). Звідси випливає

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m} r_j = 1 - \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m} p_j = 1 - p \ge \delta, \tag{20}$$

тобто для достатньо великих m $\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m} r_j \ge \delta$, а значить, $\sum_{j=0}^{m} r_j \ge \delta m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, тобто $\sum_{j=0}^{m} r_j = \infty$. Тому умова (4а) в даному випадку матиме вигляд $\sum_{j=0}^{m} r_j = \infty$, бо $\sum_{j=0}^{\infty} f_j^2 r_j \ge f^2 \sum_{j=0}^{\infty} r_j = \infty$ згідно з (19).

Далі, враховуючи умови (3), (17) і (18), отримуємо

$$\left|\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{j=0}^{m} \frac{f_j}{p_j}\right| = \frac{1}{\sqrt{m}}\left|\sum_{j=0}^{m} f_j \left(\left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p}\right)\right| \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{j=0}^{m} \frac{|f_j||p_j - p|}{p_j\, p} + \left|\frac{1}{\sqrt{m}\,p}\sum_{j=0}^{m} f_j\right| \le$$

$$\leq \left| \frac{1}{\sqrt{m}\varepsilon} \sum_{j=0}^{m} f_j \right| + \sup_j |f_j| \frac{1}{\sqrt{m}\delta\varepsilon} \sum_{j=0}^{\infty} |p_j - p| \underset{m \to \infty}{\to} 0.$$

Звідси і з (19), (20) одержуємо

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\left| \sum_{j=0}^{m} f_j / p_j \right|}{\sqrt{\sum_{j=0}^{m} f_j^2 r_j / p_j^2}} \leq$$

$$\leq \frac{\delta}{|f|} \lim_{m \to \infty} \frac{\left| \sum_{j=0}^{m} f_j / p_j \right|}{\sqrt{\sum_{j=0}^{m} r_j}} = \frac{\delta}{|f|} \lim_{m \to \infty} \frac{\left| \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=0}^{m} f_j / p_j \right|}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=0}^{m} r_j}} \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{\delta}}{|f|} \lim_{m \to \infty} \left| \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=0}^{m} \frac{f_j}{p_j} \right| \underset{m \to \infty}{\to} 0,$$

що і доводить виконання умови (4б).

Умова (4в) випливає з умов (3), (17), (18). Дійсно,

$$\left| \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m} \frac{f_j}{p_j^2} \right| \leq \frac{1}{m} \left| \sum_{j=0}^{m} f_j \left((p_j^{-2} - p^{-2}) + p^{-2} \right) \right| \leq$$

$$\leq \left| p^{-2} \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m} f_j \right| + \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m} |f_j| |p_j^2 - p^2| \, p_j^{-2} p^{-2} \leq$$

$$\leq \delta^{-2} \varepsilon^{-2} \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m} |f_j| |p_j - p| (p_j - p) + \left| \varepsilon^{-2} \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m} f_j \right| \leq$$

$$\leq \delta^{-2} \varepsilon^{-2} \frac{2}{m} \sup_j |f_j| \sum_{j=0}^{\infty} |p_j - p| + \varepsilon^{-2} \left| \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{\infty} f_j \right| \underset{m \to \infty}{\to} 0.$$

Отже, всі умови теореми виконуються.

1. *Скороход А. В., Слободенюк Н. П.* Предельные теоремы для случайных блужданий. – Киев: Наук. думка, 1970. – 302 с.
2. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.

Одержано 15.10.92