УДК 517.9

Н. А. Качановский (Нац. техн. ун-т Украины, „Киев. политехн. ин-т")

ДУАЛЬНАЯ СИСТЕМА АППЕЛЯ И ПРОСТРАНСТВА КОНДРАТЬЕВА В АНАЛИЗЕ НА ПРОСТРАНСТВАХ ШВАРЦА

We study the biorthogonal Appell system and Kondratiev spaces in the case where the parameter of the μ-exponential is perturbed by holomorphic invertible functions. The results obtained are applied to the investigation of the pseudodifferential equations.

Вивчаються біортогональна система Аппеля та простори Кондратьєва при умові збурення параметра μ-експоненціалу голоморфними оборотними функціями. Одержані результати застосовуються для вивчення псевдодиференціальних рівнянь.

Негауссовский бесконечномерный анализ построен в [1 – 3] для гладких аналитических мер μ на дуально-ядерном пространстве S', а в [4] — для более широкого класса невырожденных аналитических мер. В настоящей статье некоторые результаты из [1 – 4] обобщаются на случай возмущения аргумента μ-экспоненциала [2 – 4] обратимыми голоморфными в нуле вместе с обратными вектор-функциями $\alpha, \beta : S_{\mathbb{C}} \to S_{\mathbb{C}}$ (S — пространство Шварца, $S_{\mathbb{C}}$ — его комплексификация) с целью дальнейшего применения к решению определенного класса псевдодифференциальных уравнений.

1. Рассмотрим оснащение $S \subset L_2(\mathbb{R}) \subset S'$, где S — пространство Шварца, $S = \mathrm{pr}\lim_{p\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_p$; S' — сопряженное пространство Шварца, $S' = \mathrm{ind}\lim_{p\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_{-p}$; $\mathcal{H}_p$ — гильбертово пространство, $\mathcal{H}_{-p} = \mathcal{H}'_p$; (подробнее см., например, [5, 6]). Обозначим через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ каноническое спаривание между элементами S и S', через $|\cdot|_p$ норму в $\mathcal{H}_p$.

Будем говорить, что функция $G : S_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ голоморфна в нуле, если существует такая окрестность нуля $\mathcal{U} \subseteq S_{\mathbb{C}}$, что для всех $\eta \in \mathcal{U}$ существует окрестность нуля $\mathcal{V}$ такая, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} d^n \hat{G}(\eta)(\theta)$$

сходится равномерно на $\mathcal{V}$ к непрерывной функции. В соответствии с [7] (см. также [4]) G голоморфна в нуле тогда и только тогда, когда она локально ограничена и удовлетворяет условию G-голоморфности: существуют p и $\varepsilon > 0$ такие, что для всех $\xi_0 \in S_{\mathbb{C}}$ с $|\xi_0|_p \le \varepsilon$ и для всех $\xi \in S_{\mathbb{C}}$ функция одной комплексной переменной $\lambda \to G(\xi_0 + \lambda\xi)$ голоморфна в $0 \in \mathbb{C}$.

Обозначим через $Hol_0(S_{\mathbb{C}})$ алгебру ростков функций $G : S_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$, голоморфных в нуле, которая оснащена топологией индуктивного предела, определяемой следующим семейством норм: $n_{p,l,\infty}(G) = \sup_{|\theta| \le 2^{-l}} |G(\theta)|$, $p, l \in \mathbb{N}$ [7, 4].

Вектор-функцию $\alpha : S_{\mathbb{C}} \to S_{\mathbb{C}}$ назовем голоморфной в точке $0 \in S_{\mathbb{C}}$, если:

1) $\exists\, p \in \mathbb{N}$, $\exists\, \varepsilon > 0$: $\forall\, \xi_0 \in S_{\mathbb{C}}$ такого, что $|\xi_0|_p < \varepsilon$, $\forall\, \xi \in S_{\mathbb{C}}$ функция одной комплексной переменной $\lambda \to \alpha(\xi_0 + \lambda\xi)$ голоморфна в $0 \in \mathbb{C}$, т. е. дифференцируема в окрестности нуля по λ (относительно $|\cdot|_{p'}$, $\forall\, p' \in \mathbb{N}$);

2) (локальная ограниченность) $\forall\, p \in \mathbb{N}\ \exists\, C_p > 0$: $\forall\, \xi \in A$ $|\xi|_p \le C_p \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall\, p' \in \mathbb{N}\ \exists\ C'_{p'}\colon\ \forall\, \xi \in A\ \ |\alpha(\xi)|_{p'} \le C'_{p'}$, A — произвольное ограниченное множество в $S_{\mathbb{C}}$.

Аналогично [8] можно показать, что при этом α непрерывна в окрестности $0 \in S_{\mathbb{C}}$. Более того, требования непрерывности и локальной ограниченности в определении голоморфной функции взаимозаменяемы.

Подобно [7, 9] можно установить следующее утверждение.

Лемма 1. *Голоморфная в нуле обратимая в окрестности нуля функция* $\alpha\colon S_{\mathbb{C}} \to S_{\mathbb{C}}$ *допускает представление*

$$\alpha(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \theta^k, \quad C_k \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \theta \in S_{\mathbb{C}}, \tag{1}$$

где ряд сходится в $S_{\mathbb{C}}$ *при* $\max_{s\in\mathbb{R}} |\theta(s)| < \delta$, δ *зависит от* α.

Доказательство легко следует из поточечного представления $\alpha(\theta(s)) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \theta(s)^k$, которое сходится в условиях леммы равномерно по s, а также из того, что $S_{\mathbb{C}}$ — алгебра, в силу чего все частные суммы ряда (1) принадлежат $S_{\mathbb{C}}$.

Аналогичное разложение справедливо и для обратной функции:

$$\alpha^{-1}(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} K_k \theta^k. \tag{1′}$$

Для удобства обозначений условимся считать, что все *суммы вида* $\sum_{k=1}^{0}$ *по определению равны* 1.

Лемма 2. *Пусть* $G \in Hol_0(S_{\mathbb{C}})$, $\alpha\colon S_{\mathbb{C}} \to S_{\mathbb{C}}$ *голоморфна в нуле. Положим по определению* $\hat{G}(\theta) = G(\alpha(\theta))$. *Тогда* $\hat{G} \in Hol_0(S_{\mathbb{C}})$.

Доказательство состоит в проверке локальной ограниченности и G-голоморфности функции $\hat{G}$: локальная ограниченность почти очевидна, а G-голоморфность легко следует из правила дифференцирования сложной функции.

2. Следуя [4], рассмотрим на измеримом пространстве $(S', \mathcal{B}(S'))$ класс вероятностных мер, удовлетворяющих следующим условиям:

1) преобразование Лапласа μ

$$l_\mu(\theta) := \int_{S'} \exp\{\langle x, \theta\rangle\}\, d\mu(x), \quad \theta \in S_{\mathbb{C}}$$

— голоморфная в $0 \in S_{\mathbb{C}}$ функция (такие меры назовем аналитическими);

2) μ — невырожденная мера, т. е. для всех полиномов φ из $\varphi = 0$ μ-почти везде следует $\varphi \equiv 0$.

Следуя [2–4], назовем μ-экспоненциалом

$$\varepsilon_\mu(\theta, z) := \exp\{\langle z, \theta\rangle\} / l_\mu(\theta).$$

Пусть α и β голоморфны в $0 \in S_{\mathbb{C}}$ и обратимы, причем в (1) $C_1 \ne 0$. Функцию

$$\varepsilon_\mu^{\alpha,\beta}(\theta, z) := \exp\{\langle z, \alpha(\theta)\rangle\} / l_\mu(\beta(\theta)) \tag{2}$$

назовем α, β-экспоненциалом. Ясно, что в случае $\alpha \equiv \beta \equiv \mathrm{id}$ $\varepsilon_\mu^{\alpha,\beta} = \varepsilon_\mu$. В случае $\alpha \equiv \beta$ $\varepsilon_\mu^{\alpha,\beta}$ совпадает с α-экспоненциалом ε_μ^{α}, введенным и изученным в [10].

Поскольку α, β-экспоненциал — голоморфная функция (лемма 2), справедливо разложение

$$\varepsilon_{\mu}^{\alpha,\beta}(\theta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} d^n \, \widehat{\varepsilon_{\mu}^{\alpha,\beta}}(0, z)(\theta),$$

где $d^n \, \widehat{\varepsilon_{\mu}^{\alpha,\beta}}(0, z)(\theta)$ — n-однородный непрерывный полином. С помощью неравенства Коши и поляризационного тождества легко доказать его непрерывность относительно θ, в силу чего применима теорема о ядре (см. [6], теорема 1.2.3). откуда

$$d^n \, \widehat{\varepsilon_{\mu}^{\alpha,\beta}}(0, z)(\theta) = \left\langle P_n^{\mu,\alpha,\beta}(z), \theta^{\otimes n} \right\rangle, \qquad P_n^{\mu,\alpha,\beta}(z) \in S_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n\prime}, \qquad \theta \in \mathcal{U}_0,$$

где $\mathcal{U}_0$ — достаточно малая окрестность нуля в $S_{\mathbb{C}}$. Таким образом,

$$\varepsilon_{\mu}^{\alpha,\beta}(\theta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\langle P_n^{\mu,\alpha,\beta}(z), \theta^{\otimes n} \right\rangle. \tag{3}$$

Назовем системой Аппеля

$$\mathbf{P}^{\mu,\alpha,\beta} := \left\{ \left\langle P_n^{\mu,\alpha,\beta}(\cdot), \varphi^{(n)} \right\rangle : \varphi^{(n)} \in S_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}, \; n \in \mathbb{Z}_+ \right\}.$$

При этом $P_n^{\mu,\alpha,\beta}$ — ядро полинома Аппеля степени n с производящей функцией (2).

Для формулировки теоремы о свойствах $\mathbf{P}^{\mu,\alpha,\beta}$, аналогично [3, 4], введем β-моменты $M_m^{\mu,\beta}$ как систему ядер функций, для которых $l_{\mu}(\beta(\theta))$ является производящей функцией, т. е.

$$l_{\mu}(\beta(\theta)) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left\langle M_m^{\mu,\beta}, \theta^{\otimes m} \right\rangle$$

(существование ядер следует из теоремы о ядре и доказывается точно так же, как и существование ядер $P_n^{\mu,\alpha,\beta}$). Сопряженным оператором следа порядка $m, m > 1$, назовем оператор $\mathcal{M}_{m-1}^{*} \in \mathcal{L}(S_{\mathbb{C}}', S_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} m\prime})$, действующий по закону

$$\left\langle \mathcal{M}_{m-1}^{*} x, \bigotimes_{k=1}^{m} \varphi_k \right\rangle = \left\langle x, \prod_{k=1}^{m} \varphi_k \right\rangle, \qquad \varphi_k \in S_{\mathbb{C}} \qquad \forall\, k = \overline{1, m}.$$

При $m = 1$ положим $\mathcal{M}_0^{*} := 1$. Линейность этого оператора очевидна, непрерывность следует из свойств пространства Шварца (подробнее см. [11]). Пусть $\mathcal{P}$ — оператор симметризации.

Теорема 1. *Для $x, y \in S'$, $n \in \mathbb{N}$ выполняются следующие соотношения:*

$$P_m^{\mu,\alpha,\beta}(x) =$$

$$= m! \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} \left[\sum_{v=1}^{m-n} \frac{1}{v!} \sum_{l_1 \ldots l_v \in \mathbb{N};\, \sum_{s=1}^{v} l_s = m-n} \left(\prod_{s=1}^{v} C_{l_s} \right) \mathcal{P} \left(\bigotimes_{s=1}^{v} \mathcal{M}_{l_s - 1}^{*} x \right) \right] \hat{\otimes} P_n^{\mu,\alpha,\beta}(0), \tag{4}$$

$$P_n^{\mu,\alpha,\beta}(x+y) = \sum_{k,l,m \in \mathbb{N};\, k+l+m=n} \frac{n!}{k!\,m!\,l!} P_k^{\mu,\alpha,\beta}(x) \,\hat{\otimes}\, P_l^{\mu,\alpha,\beta}(y) \,\hat{\otimes}\, M_m^{\mu,\beta}; \tag{5}$$

для всех $p > p_0$ *таких, что вложение* $\mathcal{H}_p \hookrightarrow \mathcal{H}_{p_0}$ *квазиядерно, для достаточно малых* $\rho > 0$

$$\left| P_n^{\mu, \alpha, \beta}(z) \right|_{-p} \leq n!\, C_{0, \rho, p_0} (C_{1, \rho, p, p_0})^n e^{\sup_{|\theta|_{p_0} = \rho} |\alpha(\theta)|_{p_0} |z|_{-p_0}}, \qquad (6)$$

где

$$C_{0, \rho, p_0} := \sup_{|\theta|_{p_0} = \rho} \left| \frac{1}{l_\mu(\beta(\theta))} \right|; \qquad C_{1, \rho, p, p_0} := \frac{e}{\rho} \| i_{p, p_0} \|_{HS},$$

$\| i_{p,p_0} \|_{HS}$ — *норма Гильберта – Шмидта оператора вложения* $\mathcal{H}_p$ в $\mathcal{H}_{p_0}$.

Доказательство. Соотношение (4) получается с помощью разложения в ряд $(l_\mu(\beta(\theta)))^{-1}$ и $e^{\langle \alpha(\beta), x \rangle}$, подстановки α из (1) (лемма 1) и перемножения полученных рядов. Доказательства (5) и (6) получаются аналогично [3, 4].

***Замечание* 1.** В одномерном случае $(x \in \mathbb{R})$ легко получить выражение для степени через полиномы Аппеля (доказательство аналогично доказательству (4)):

$$x^s = s! \sum_{n=0}^{s} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{s-n} \frac{1}{m!} \sum_{k_1 \ldots k_{m+n} \in \mathbb{N};\, \sum_{l=1}^{m+n} k_l = s} \left(\prod_{l=1}^{m+n} K_{k_l} \right) \left(P_n^{\mu, \alpha, \beta}(x) M_m^{\mu, \beta} \right)],$$

где коэффициенты K_{k_l} взяты из $(1')$, тензорное умножение совпадает с поточечным. Из-за необратимости оператора следа это соотношение не переносится непосредственно на бесконечномерный случай, но, тем не менее, степени можно выражать через полиномы Аппеля с помощью разложения ядер последних по базису в $N^{\hat{\otimes} n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Пример. Пусть $\mu = \gamma$ — гауссова мера, т. е. $e_\gamma(\theta, z) = e^{\langle z, \theta \rangle - \langle \theta, \theta \rangle / 2}$. Пусть также $\alpha \equiv \beta$. Тогда для α рассматриваемого вида

$$P_m^{\gamma, \alpha, \alpha}(0) =$$

$$= m! \sum_{v=1}^{[m/2]} \sum_{k_1 \ldots k_v,\, l_1 \ldots l_v \in \mathbb{N};\, \sum_{s=1}^{v} (k_s + l_s) = m} \frac{(-1)^v}{2^v v!} \left(\prod_{s=1}^{v} C_{k_s} C_{l_s} \right) \mathcal{P} \bigotimes_{s=1}^{v} \mathcal{M}^*_{k_s + l_s - 1} 1.$$

Доказательство этого соотношения основано на переупорядочивании рядов Тейлора.

Определим $\tilde{\mathcal{P}}_{\mu,\alpha,\beta}(S')$ — множество функций $\varphi: S' \to \mathbb{C}$ вида

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{M_\varphi} \left\langle P_n^{\mu, \alpha, \beta}(x), \varphi^{(n)} \right\rangle, \qquad x \in S', \quad \varphi^{(n)} \in S_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}.$$

Нетрудно понять, что оно совпадает с множеством $\mathcal{P}(S')$ всех непрерывных на S' полиномов. Топология в $\mathcal{P}(S') = \tilde{\mathcal{P}}_{\mu,\alpha,\beta}(S')$ выбирается так, что (см. [3, 4]) оно становится изоморфным топологической прямой сумме тензорных степеней

$$S_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}: \sum_{n=0}^{\infty} < x^{\otimes n}, \quad \psi^{(n)} > \leftrightarrow \{ \psi^{(n)} : n \in \mathbb{Z}_+ \},$$

причем в сумме слева лишь конечное число слагаемых отлично от нуля. Сходимость в этой топологии покоординатная, т. е. последовательность полиномов ψ_j сходится к полиному ψ тогда и только тогда, когда каждая последовательность координат $\psi_j^{(n)} \in S_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$ полиномов ψ_j сходится к соответствующей координате $\psi^{(n)}$ полинома ψ.

Пусть $\tilde{\mathcal{P}}'_{\mu,\alpha,\beta}(S')$ — пространство, сопряженное к $\tilde{\mathcal{P}}_{\mu,\alpha,\beta}(S')$ относительно $L_2(S',\mu)$. Каноническое спаривание между элементами $\varphi \in \tilde{\mathcal{P}}_{\mu,\alpha,\beta}(S')$ и $\Phi \in \tilde{\mathcal{P}}'_{\mu,\alpha,\beta}(S')$ обозначим $\langle\langle \Phi, \varphi \rangle\rangle$. Анализируя доказательство представления обобщенной функции из $\tilde{\mathcal{P}}'_{\mu,\alpha,\beta}(S')$ через $\mathbf{Q}$-систему в [4], легко заметить, что в действительности доказано несколько более общее утверждение, состоящее в том, что для любой линейно независимой последовательности полиномов, образующей базис в $\tilde{\mathcal{P}}_{\mu,\alpha,\beta}(S')$, существует биортогональная к ней относительно $L_2(S',\mu)$ последовательность обобщенных функций $\mathbf{Q}^{\mu,\alpha\beta}$ таких, что

$$\forall\ \Phi \in \tilde{\mathcal{P}}'_{\mu,\alpha,\beta}(S') \quad \Phi = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{\mu,\alpha,\beta}(\Phi^{(n)}), \qquad \Phi^{(n)} \in S_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n'}, \quad n \in \mathbb{N},$$

и такое представление единственно. При этом $Q_n^{\mu,\alpha,\beta}(\Phi^{(n)})$ линейны относительно $\Phi^{(n)}$. Биортогональность означает, что

$$\left\langle\left\langle Q_n^{\mu,\alpha,\beta}(\Phi^{(n)};\cdot), \left\langle P_m^{\mu,\alpha,\beta}(\cdot), \varphi^{(m)} \right\rangle\right\rangle\right\rangle = n!\left\langle \Phi^{(n)}, \varphi^{(n)} \right\rangle \delta_{mn}$$

Положим

$$\mathbf{Q}^{\mu,\alpha,\beta} := \left\{ Q_n^{\mu,\alpha,\beta}(\Phi^{(n)};\cdot)\colon \Phi^{(n)} S_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n'}, n \in \mathbb{N} \right\}; \qquad \mathbf{A}^{\mu,\alpha,\beta} := (\mathbf{P}^{\mu,\alpha,\beta}, \mathbf{Q}^{\mu,\alpha,\beta}).$$

Ниже мы рассмотрим вопрос о конкретном виде обобщенных функций $Q_n^{\mu,\alpha,\beta}$.

***Замечание* 2.** Формально можно записать $Q_n^{\mu,\alpha,\beta}(\Phi^{(n)};\cdot) = \left\langle \Phi^{(n)}, Q_n^{\mu,\alpha,\beta}(\cdot) \right\rangle$.

3. Введем α, β-аналоги пространств Кондратьева основных и обобщенных функций. Положим $(N_{\alpha,\beta})_\mu^1 := \operatorname{pr\,lim}_{p,q \in \mathbb{N}} (N_{\alpha,\beta})_{\mu,p,q}^1$, где $(N_{\alpha,\beta})_{\mu,p,q}^1$ — пополнение $\tilde{\mathcal{P}}_{\mu,\alpha,\beta}(S')$ по норме

$$\|\varphi\|_{p,q}^2 = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle \varphi^{(n)}, P_n^{\mu,\alpha,\beta}(\cdot) \right\rangle \right\|_{p,q}^2 := \sum_{n=0}^{\infty} \left| \varphi^{(n)} \right|_p^2 (n!)^2 2^{qn}.$$

Нетрудно показать (см. [4]), что, как и в случае $\alpha \equiv \beta \equiv \mathrm{id}$, $(N_{\alpha,\beta})_\mu^1$ плотно топологически вложено в $L_2(S',\mu)$ (впрочем, это можно непосредственно не доказывать, см. ниже). Сопряженное к $(N_{\alpha,\beta})_\mu^1$ относительно $L_2(S',\mu)$ пространство $(N_{\alpha,\beta})_\mu^{-1} = \operatorname{ind\,lim}_{p,q \in \mathbb{N}} (N_{\alpha,\beta})_{\mu,-p,-q}^{-1}$, где

$$(N_{\alpha,\beta})_{\mu,-p,-q}^{-1} := \left\{ \Phi(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{\mu,\alpha,\beta}(\Phi^{(n)};\cdot)\colon \|\Phi\|_{-p,-q}^2 := \sum_{n=0}^{\infty} \left| \Phi^{(n)} \right|_{-p}^2 2^{-qn} < \infty \right\},$$

$Q_n^{\mu,\alpha,\beta}$ определены выше. В силу биортогональности $\mathbf{P}^{\mu,\alpha,\beta}$- и $\mathbf{Q}^{\mu,\alpha,\beta}$-систем действие обобщенной функции $\Phi \in (N_{\alpha,\beta})_{\mu,-p,-q}^{-1}$ на основную $\varphi \in (N_{\alpha,\beta})_{\mu,p,q}^1$ имеет вид

$$\langle\langle \Phi, \varphi \rangle\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n! \left\langle \Phi^{(n)}, \varphi^{(n)} \right\rangle.$$

Определим α, β-аналог нормированного преобразования Лапласа S_μ [2–4]. Пусть $\Phi \in (N_{\alpha,\beta})^{-1}_{\mu}$. Тогда по определению индуктивного предела $\exists\, p,\, q \in \mathbb{N} : \Phi \in (N_{\alpha,\beta})^{-1}_{\mu,-p,-q}$. Из (3) и определения $(N_{\alpha,\beta})^{1}_{\mu,p,q}$ следует, что $\varepsilon^{\alpha,\beta}_{\mu}(\theta,\cdot) \in (N_{\alpha,\beta})^{1}_{\mu,p,q}$ при $2^q|\theta|^2_p < 1$, $\theta \in S_{\mathbb{C}}$. Поэтому для достаточно малых в указанном смысле θ можно положить $(S_{\mu,\alpha,\beta}\Phi)(\theta) := \big\langle\big\langle \Phi, \varepsilon^{\alpha,\beta}_{\mu}(\theta,\cdot)\big\rangle\big\rangle$. Из биортогональности $\mathbf{P}^{\mu,\alpha,\beta}$ и $\mathbf{Q}^{\mu,\alpha,\beta}$ вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Справедливо соотношение* $\big(S_{\mu,\alpha,\beta}\, Q^{\mu,\alpha,\beta}_{n}(\Phi^{(n)};\cdot)\big)(\theta) = \langle \Phi^{(n)}, \theta^{\otimes n}\rangle$.

Доказательство. Имеем

$$\big(S_{\mu,\alpha,\beta}\, Q^{\mu,\alpha,\beta}_{n}(\Phi^{(n)};\cdot)\big)(\theta) = \big\langle\big\langle Q^{\mu,\alpha,\beta}_{n}(\Phi^{(n)};\cdot), \varepsilon^{\alpha,\beta}_{\mu}(\theta,\cdot)\big\rangle\big\rangle =$$

$$= \left\langle\left\langle Q^{\mu,\alpha,\beta}_{n}(\Phi^{(n)};\cdot), \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\big\langle P^{\mu,\alpha,\beta}_{m}(\cdot), \theta^{\otimes m}\big\rangle\right\rangle\right\rangle =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\big\langle\big\langle Q^{\mu,\alpha,\beta}_{n}(\Phi^{(n)};\cdot), \big\langle P^{\mu,\alpha,\beta}_{m}(\cdot), \theta^{\otimes m}\big\rangle\big\rangle\big\rangle = \langle \Phi^{(n)}, \theta^{\otimes n}\rangle.$$

Вычислим $S_{\mu,\alpha,\beta}\Phi$, где

$$(N_{\alpha,\beta})^{-1}_{\mu} \ni \Phi = \sum_{n=0}^{\infty} Q^{\mu,\alpha,\beta}_{n}(\Phi^{(n)}).$$

Имеем

$$(S_{\mu,\alpha,\beta}\Phi)(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\big(S_{\mu,\alpha,\beta}\, Q^{\mu,\alpha,\beta}_{n}(\Phi^{(n)})\big)(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\langle \Phi^{(n)}, \theta^{\otimes n}\rangle.$$

(Ряд в правой части равенства сходится в пространстве $Hol_0(S_{\mathbb{C}})$ ростков голоморфных в нуле функций, см. [4].) Таким образом, из теоремы 2 и линейной независимости системы степеней в $L_2(S', \mu)$ вытекает такое следствие.

Следствие. *$S_{\mu,\alpha,\beta}$ инъективно на $(N_{\alpha,\beta})^{-1}_{\mu}$. Более того, для любой последовательности ядер $\Phi^{(n)} \in S^{\hat{\otimes} n'}_{\mathbb{C}}$, удовлетворяющей условию сходимости в $(N_{\alpha,\beta})^{-1}_{\mu}$, существует единственный $S_{\mu,\alpha,\beta}$-прообраз $\Phi \in (N_{\alpha,\beta})^{-1}_{\mu}$.*

Таким образом $Q^{\mu,\alpha,\beta}_{n}(\Phi^{(n)};\cdot) = \big(S^{-1}_{\mu,\alpha,\beta}\langle \Phi^{(n)}, \theta^{\otimes n}\rangle\big)(\cdot)$.

Замечание 3. В соответствии с доказанными в [2–4] характеризационными теоремами $(N_{\mathrm{id},\mathrm{id}})^{1}_{\mu} = \mathcal{E}^{1}_{\min}(S') = (N)^{1}$, где $\mathcal{E}^{1}_{\min}(S')$ — сужение на S' пространства целых функций первого порядка роста минимального типа; а пространство $(N)^{-1}_{\mu}$ топологически изоморфно $Hol_0(S_{\mathbb{C}})$. Для α, β-аналогов пространств Кондратьева методами, предложенными в [11], легко доказать, что $(N_{\alpha,\beta})^{-1}_{\mu} = (N)^{-1}_{\mu}$, откуда $(N_{\alpha,\beta})^{1}_{\mu} = (N)^{1}$. Это утверждение следует из дословно переносимых на α, β-случай характеризационных теорем.

4. Рассмотрим кратко вопрос о применении α, β-аналогов пространств Кондратьева к решению некоторых псевдодифференциальных уравнений. Положим $\alpha \equiv \mathrm{id}$. При этом (4) формально совпадает с соответствующей формулой в [4].

Рассмотрим уравнение вида

$$l_\mu^{-1}(\beta(D))y(x) = f(x), \tag{7}$$

где

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle P_n^{\mu, \mathrm{id}, \beta}(x), f_n \right\rangle \in (N)^1.$$

При этом

$$l_\mu^{-1}(\beta(D)) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\langle P^{\mu, \mathrm{id}, \beta}(0), D^{\otimes n} \right\rangle,$$

где

$$\left\langle P^{\mu, \mathrm{id}, \beta}(0), D^{\otimes n} \right\rangle \left\langle x^{\otimes m}, \varphi^{(m)} \right\rangle :=$$

$$:= \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-n)!} \left\langle x^{\otimes(m-n)} \hat{\otimes} P_n^{\mu, \mathrm{id}, \beta}(0), \varphi^{(m)} \right\rangle & \text{для } m \geq n; \\ 0 & \text{для } m < n. \end{cases}$$

С помощью (4) доказывается следующая теорема.

Теорема 3. *Решение уравнения* (7) *имеет вид*

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle x^{\otimes n}, f_n \right\rangle \in (N)^1.$$

(Принадлежность решения к $(N)^1$ следует из равенства $(N)^1$ пространству, построенному с помощью разложения по степеням (см. [4]).)

***Замечание* 4.** Можно рассматривать уравнения типа (7) и с правой частью из $(N_{\mathrm{id}, \beta})_\mu^{-1}$, понимая ее как предел последовательности функций из $(N)^1$ (существование такой последовательности следует из плотности вложения $(N)^1$ в $(N_{\mathrm{id}, \beta})_\mu^{-1}$).

***Замечание* 5.** Ясно, что

$$\varepsilon_\mu^{\alpha, \beta}(\theta, z) = \gamma(\theta) \cdot \varepsilon_\mu^{\alpha}(\theta, z), \tag{8}$$

где

$$\gamma(\theta) := l_\mu(\alpha(\theta)) / l_\mu(\beta(\theta)), \qquad \varepsilon_\mu^{\alpha}(\theta, z) := \exp\left\langle z, \alpha(\theta) \right\rangle / l_\mu(\alpha(\theta)) \quad [10].$$

В действительности все обсуждаемое исчисление, включая характеризационные теоремы и следующие из них результаты, переносится даже на более общий случай: $\gamma(\theta)$ в (8) должна лишь быть голоморфной в $0 \in S_{\mathbb{C}}$ функцией, удовлетворяющей условию $\gamma(0) = 1$. На возможность такого расширения автору указал Г. Ф. Ус.

Переносу рассматриваемого исчисления на произвольные дуально-ядерные пространства, изучению уравнений вида (7) с обобщенной правой частью, а также изучению α, β-аналога виковского исчисления (см. [4, 12]) будут посвящены последующие работы.

Автор выражает искреннюю благодарность Ю. Г. Кондратьеву и Г. Ф. Усу за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

1. *Далецкий Ю. Л.* Биортогональный аналог полиномов Эрмита и обращение преобразования Фурье по негауссовской мере // Функцион. анализ и его прил. – 1991. – **25**, № 2. – С. 68–70.
2. *Albeverio S., Kondratiev Y., Streit L.* How to generalize white noise analysis to non-gaussian spaces // Dynamics of Complex and Irregular System / Eds.: Ph. Beancard et al. – World Scientific, 1993. – 57 p.
3. *Albeverio S., Daletzky Y., Kondratiev Y., Streit L.* Non-gaussian infinite dimensional analysis, SFB 237. – 1994. – 45 p. – (Preprint / Inst. Math. Ruhr-Universität–Bochum; № 217).
4. *Kondratiev Y., Streit L., Westerkamp W., Yan J.* Generalized functions in infinite dimensional analysis. – 1995. – 39 p. – (Preprint (BiBoS 369/6/95)).
5. *Kondratiev Y., Streit L.* Spaces of white noise distributions: constructions, descriptions, applications. I. // Rept. Math. Phys. – 1993. – **33**. – P. 341–366.
6. *Березанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г.* Спектральные методы в бесконечномерном анализе. – Киев: Наук. думка, 1988. – 680 с.
7. *Dineen S.* Complex analysis in locally convex spaces. // Math. Studies 57. – North Holland, Amsterdam, 1981. – 215 p.
8. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 830 с.
9. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Общая теория. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – Т.1. – 895 с.
10. *Kondratiev Y., Streit L., Us G.* Generalized Appell systems in infinite-dimensional analysis. – 1995. – 52 p. – (Preprint (BiBoS 820/12/95)).
11. *Us G. F.* Dual Appell systems in Poissonian analysis // Meth. Function. Anal. Topol. – 1995. – **1**. – P. 93–108.
12. *Kondratiev Y., Leukert P., Streit L.* Wick calculus in gaussian analysis. – 1994. – 23 p. – (Preprint (BiBoS 637.94)).

Получено 15.09.95