УДК 517. 95

С. П. Лавренюк (Львів. ун-т)

СИСТЕМИ ПАРАБОЛІЧНИХ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ

We consider a parabolic variational inequality without initial conditions. We construct a class of existence and uniqueness of a solution of this inequality. This class is defined by the exponential decrease or increase of solutions as $t \to -\infty$, depending on the coefficients of the inequality.

Розглядається параболічна варіаційна нерівність без початкових умов. Побудовано клас існування і єдиності розв'язку вказаної нерівності. Цей клас визначається експоненціальним зростанням або спаданням розв'язку при $t \to -\infty$ в залежності від коефіцієнтів нерівності.

Нехай Ω — обмежена область простору $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega$; $Q_T = \Omega \times (-\infty, T)$, $T < \infty$; $V = (\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^l$ — банахів рефлексивний простір векторних функцій $u = \operatorname{colon}(u_1, \ldots, u_l)$ таких, що $u_i \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$, $i = 1, \ldots, l$; $m \geq 1$; $\mathcal{K}$— опукла замкнена множина в V, яка містить нульовий елемент.

Розглянемо задачу про знаходження такої функції, яка задовольняє включення

$$e^{\lambda t} u \in L^\infty((-\infty, T); (L^2(\Omega))^l) \cap L^2((-\infty, T); V),$$
$$e^{\lambda t} u_t \in L^2((-\infty, T); (L^2(\Omega))^l), \quad u \in \mathcal{K} \tag{1}$$

майже для всіх $t \in (-\infty, T)$, і нерівність

$$\int\limits_{Q_t} \Bigg[(u_t, w-u) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leq m} (A_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u, D^\alpha(w-u)) +$$
$$+ \sum_{1\leq|\alpha|\leq m} (B_\alpha(x,t) D^\alpha u, w-u)) - (F(x,t), w-u)) \Bigg] e^{2\lambda t}\, dx dt \geq 0 \tag{2}$$

для довільної функції $w(x, t)$ такої, що $e^{\lambda t} w \in L^2((-\infty, T); V)$, $w \in \mathcal{K}$ майже для всіх $t \in (-\infty, T)$. Тут $A_{\alpha\beta}(x, t)$, $B_\alpha(x, t)$ — квадратні матриці порядку l, $F(x, t) = \operatorname{colon}(f_1(x, t), \ldots, f_l(x, t))$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$, $(\cdot, \cdot)$ — скалярний добуток в $\mathbb{R}^l$,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

Означення. *Функцію* $u(x, t)$, *яка задовольняє включення* (1) *і нерівність* (2), *будемо називати розв'язком варіаційної нерівності* (2).

Як відомо [1, с. 44], для функцій $v(x) \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$ справедливі нерівності Фрідріхса

$$\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=j} (D^\alpha v)^2\, dx \leq \gamma_{m,j} \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=m} (D^\alpha v)^2\, dx, \quad j = 0, 1, \ldots, m,$$

де сталі $\gamma_{m,j}$ залежать лише від області Ω і чисел m, n.

Позначимо через $P_{\mathcal{K}}$ оператор проектування простору V на множину $\mathcal{K}$ і введемо оператор штрафу

$$\mathcal{B}(u) = \mathcal{J}(u - P_{\mathcal{K}}(u)),$$

де $\mathcal{J}$ — оператор двоїстості між просторами V і V^*. Так введений оператор $\mathcal{B}$ є монотонним, обмеженим, ліпшиць-неперервним і [2, с. 384]

$$\mathcal{K} = \{v : v \in V, \mathcal{B}(v) = 0\}.$$

Будемо говорити, що коефіцієнти $A_{\alpha\beta}(x, t)$ нерівності (2) задовольняють умову (A), якщо

$$\int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} (A_{\alpha\beta}(x, t)D^{\beta}v, D^{\alpha}v)\, dx \ge a_m \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=m} |D^{\alpha}v|^2 dx - a_0 \int_{\Omega} |v|^2 dx$$

для всіх $v \in V$ і майже всіх $t \in (-\infty, T]$; $a_m > 0$, $a_0 \ge 0$.

Введемо позначення

$$b_1 = \sup_{Q_T} \sum_{1\le|\alpha|\le m} \| B_{\alpha}(x, t)\|^2, \quad \gamma_1 = \sum_{j=1}^{m} \gamma_{m,j},$$

$$a_1 = a_m - \sqrt{\gamma_1 \gamma_{m,0} b_1} - a_0 \gamma_{m,0}.$$

Теорема 1. *Нехай* $A_{\alpha\beta}$ $(|\alpha| = |\beta| \le m)$, B_{κ} $(1 \le |\kappa| \le m) \in L^{\infty}(Q_T)$ *і виконується умова* (A). *Тоді нерівність* (2) *не може мати більше одного розв'язку при*

$$0 < \lambda < \frac{a_1}{\gamma_{m,0}}, \ \textit{якщо}\ a_1 > 0;$$

$$\lambda < -a_0 - \frac{b_1 \gamma_1}{4a_m}, \ \textit{якщо}\ a_1 \le 0$$

$$\textit{і}\ \lambda = 0, \ \textit{якщо}\ b_1 = 0 \ \textit{і}\ a_m - \gamma_{m,0} a_0 = 0.$$

Доведення. Нехай існують два розв'язки $u^1(x, t)$ і $u^2(x, t)$ варіаційної нерівності (2). Запишемо нерівність (2) для $u^1(x, t)$ і покладемо в ній

$$w(x, t) = \begin{cases} u^2(x, t), & \text{якщо } (x, t) \in Q_{t_1, T}; \\ 0, & \text{якщо } (x, t) \in Q_{t_1}, \end{cases}$$

де $Q_{t_1, T} = \Omega \times (t_1, T)$, t_1 — довільне фіксоване число з $(-\infty, T)$. Потім запишемо нерівність (2) для $u^2(x, t)$ і покладемо в ній

$$w(x, t) = \begin{cases} u^1(x, t), & \text{якщо } (x, t) \in Q_{t_1, T}; \\ 0, & \text{якщо } (x, t) \in Q_{t_1}. \end{cases}$$

Додаючи отримані нерівності, маємо

$$\int_{Q_{t_1, T}} \Bigg[(u_t, u) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} (A_{\alpha\beta}(x, t)D^{\beta}u, D^{\alpha}u) +$$

$$+ \sum_{1\le|\alpha|\le m} (B_{\alpha}(x, t)D^{\alpha}u, u) \Bigg] e^{2\lambda t} dx dt \le 0. \tag{3}$$

Тут $u(x, t) = u^1(x, t) - u^2(x, t)$.

Враховуючи умови теореми, перетворюємо і оцінюємо кожний доданок нерівності (3) окремо:

$$\mathfrak{F}_1 = \int_{Q_{t_1,T}} (u_t, u) e^{2\lambda t} dx dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\Omega_T} |u|^2 e^{2\lambda T} dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega_{t_1}} |u|^2 e^{2\lambda t_1} dx - \frac{1}{2} \int_{Q_{t_1,T}} |u|^2 e^{2\lambda t} dx dt,$$

$$\mathfrak{F}_2 = \frac{1}{2} \int_{Q_{t_1,T}} \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} (A_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u, D^\alpha u)\, e^{2\lambda t} dx dt \ge$$

$$\ge a_m \int_{Q_{t_1,T}} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 e^{2\lambda t} dx dt - \int_{Q_{t_1,T}} |u|^2 e^{2\lambda t} dx dt,$$

$$\mathfrak{F}_3 = \int_{Q_{t_1,T}} \sum_{1\le|\alpha|\le m} (B_\alpha(x,t) D^\alpha u, u)\, e^{2\lambda t} dx dt \le$$

$$\le \frac{1}{2} \int_{Q_{t_1,T}} \left[\delta_0 b_1 \gamma_1 \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 + \frac{1}{\delta_0} |u|^2 \right] e^{2\lambda t} dx dt, \quad \delta_0 > 0.$$

На основі оцінок інтегралів $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3$ з нерівності (3) одержуємо

$$\int_{Q_T} \left[(2a_m - \delta_0 b_1 \gamma_1) \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 - \left(2\lambda + 2a_0 + \frac{1}{\delta_0} \right) |u|^2 \right] e^{2\lambda t} dx dt \le 0, \qquad (4)$$

оскільки

$$\lim_{t_1 \to -\infty} \int_{\Omega_{t_1}} |u|^2 e^{2\lambda t} dx = 0.$$

Легко переконатись, що при виконанні умов теореми відносно λ можна вибрати число $\delta_0 > 0$ так, що з нерівності (4) буде випливати оцінка

$$\int_{Q_T} |u|^2 e^{2\lambda t} dx dt \le 0.$$

Звідси отримуємо, що $u(x,t) = 0$ майже всюди в Q_T і теорема доведена.

Теорема 2. *Нехай* $A_{\alpha\beta}, A_{\alpha\beta t}$ $(|\alpha| = |\beta| \le m)$, $B_\kappa, B_{\kappa t}$ $(|\kappa| \le m) \in L^\infty(Q_T)$, *виконується умова* (A);

$$\int_{Q_T} (|F(x,t)|^2 + |F_t(x,t)|^2) e^{2\lambda t} dx dt < \infty,$$

де λ *задовольняє умови*

$$0 < \lambda < \frac{a_1}{\gamma_{m,0}}, \text{ якщо } a_1 > 0;$$

$$\lambda = 0, \text{ якщо } a_m - \gamma_{m,0} b_0 = 0 \text{ і } b_1 = 0;$$

$$\lambda < -a_0 - \frac{b_1 \gamma_1}{4a_m}, \text{ якщо } a_1 \le 0.$$

Тоді існує розв'язок $u(x,t)$ *варіаційної нерівності* (2).

Доведення. Нехай t_0, $-\infty < t_0 < T$, — довільне фіксоване число. Розглянемо систему рівнянь

$$v_t - \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha}(A_{\alpha\beta}(x,t)D^{\beta}v) + \sum_{1\le|\alpha|\le m} B_{\alpha}(x,t)D^{\alpha}v -$$

$$- \lambda v + \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{B}(v) = F_{t_0}(x,t), \quad (x,t)\in Q_{t_0,T} \tag{5}$$

з крайовими

$$\left.\frac{\partial^i v}{\partial \nu^i}\right|_{S_{t_0,T}} = 0, \quad i = 0, \dots, m-1 \tag{6}$$

і початковими

$$v(x, t_0) = 0, \quad x\in\Omega \tag{7}$$

умовами. Тут $v = \operatorname{colon}(v_1, \dots, v_l)$, $S_{t_0,T} = \partial\Omega\times(t_0, T)$, ν — зовнішня нормаль до $S_{t_0,T}$, ε — довільне фіксоване число,

$$F_{t_0}(x,t) = \begin{cases} e^{\lambda t}F(x,t), & \text{якщо } (x,t)\in Q_{t_0,T}; \\ 0, & \text{якщо } (x,t)\in Q_{t_0}. \end{cases}$$

Згідно з припущенням теореми задача (5)–(7) має розв'язок $v^{\varepsilon,t_0}(x,t)$ такий, що

$$v^{\varepsilon,t_0},\ v_t^{\varepsilon,t_0} \in L^{\infty}((t_0,T); (L^2(\Omega))^l) \cap L^2((t_0,T); V),$$
$$v_{tt}^{\varepsilon,t_0} \in L^2((t_0,T); V^*)$$

і справедлива рівність

$$\int_{Q_{t_0,\tau}} \Bigg[(v_t^{\varepsilon,t_0}, v^{\varepsilon,t_0}) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} (A_{\alpha\beta}(x,t)D^{\beta}v^{\varepsilon,t_0}, D^{\alpha}v^{\varepsilon,t_0}) +$$

$$+ \sum_{1\le|\alpha|\le m} (B_{\alpha}(x,t)D^{\alpha}v^{\varepsilon,t_0}, v^{\varepsilon,t_0}) + \lambda(v^{\varepsilon,t_0}, v^{\varepsilon,t_0}) + \frac{1}{\varepsilon}(\mathcal{B}(v^{\varepsilon,t_0}), v^{\varepsilon,t_0}) -$$

$$- (F_{t_0}(x,t), v^{\varepsilon,t_0}) \Bigg] dxdt = 0 \tag{8}$$

для довільного $\tau\in[t_0, T]$.

Оскільки $\mathcal{B}$ — монотонний оператор, то

$$\int_{Q_{t_0,\tau}} (\mathcal{B}(v^{\varepsilon,t_0}), v^{\varepsilon,t_0})\, dxdt \ge 0.$$

Оцінюючи аналогічно решту доданків рівності (8), як і при доведенні теореми 1, одержуємо нерівність

$$\int_{\Omega_\tau} |v^{\varepsilon,t_0}|^2 dx + \int_{Q_{t_0,\tau}} \Bigg[(2a_m - b_1\gamma_1\delta_0) \sum_{|\alpha|=m} |D^{\alpha}v^{\varepsilon,t_0}|^2 -$$

$$- \left(2a_0 + 2\lambda + \frac{1}{\delta_0} + \delta_1\right)|v^{\varepsilon,t_0}|^2 \Bigg] dxdt +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon}\int_{Q_{t_0,\tau}} (\mathcal{B}(v^{\varepsilon,t_0}), v^{\varepsilon,t_0})\, dxdt \le \frac{1}{\delta_1}\int_{Q_{t_0,\tau}} |F_{t_0}(x,t)|^2 dxdt, \quad \delta_1 > 0. \tag{9}$$

З урахуванням умов для λ можемо вказати такі числа δ_0, δ_1, що з нерівності (9) будуть випливати оцінки

$$\int\limits_{\Omega_\tau} |v^{\varepsilon,t_0}|^2\,dx + \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha v^{\varepsilon,t_0}|^2\,dxdt \le \mu_1 \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} |F_{t_0}(x,t)|^2\,dxdt,$$

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} (\mathcal{B}(v^{\varepsilon,t_0}), v^{\varepsilon,t_0})\,dxdt \le \varepsilon\mu_1 \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} |F_{t_0}(x,t)|^2\,dxdt, \tag{10}$$

де стала μ_1 не залежить від ε і t_0.

Для функції $v^{\varepsilon,t_0}(x,t)$ також справедлива рівність

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \Bigg[(v_{tt}^{\varepsilon,t_0}, v_t^{\varepsilon,t_0}) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} (A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta v_t^{\varepsilon,t_0}, D^\alpha v_t^{\varepsilon,t_0}) +$$

$$+ \sum_{1\le|\alpha|\le m} (B_\alpha(x,t)D^\alpha v_t^{\varepsilon,t_0}, v_t^{\varepsilon,t_0}) - \lambda(v_t^{\varepsilon,t_0}, v_t^{\varepsilon,t_0}) + \frac{1}{\varepsilon}(\mathcal{B}_t(v^{\varepsilon,t_0}), v_t^{\varepsilon,t_0}) +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} (A_{\alpha\beta t}(x,t)D^\beta v^{\varepsilon,t_0}, D^\alpha v_t^{\varepsilon,t_0}) + \sum_{1\le|\alpha|\le m} (B_{\alpha t}D^\alpha v^{\varepsilon,t_0}, v_t^{\varepsilon,t_0}) -$$

$$- (F_{t_0,t}(x,t), v_t^{\varepsilon,t_0}) \Bigg] dxdt = 0. \tag{11}$$

Зауважимо, що [2, с. 419]

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} (\mathcal{B}_t(v^{\varepsilon,t_0}), v_t^{\varepsilon,t_0})\,dxdt \ge 0.$$

Крім того,

$$\int\limits_{\Omega_{t_0}} |v_t^{\varepsilon,t_0}|^2\,dx = \int\limits_{\Omega_{t_0}} (F_{t_0}(x,t_0), v_t^{\varepsilon,t_0})\,dx \le$$

$$\le \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_0}} |v_t^{\varepsilon,t_0}|^2\,dx + \frac{1}{2}\sup_{(-\infty,T)} \int\limits_{\Omega_t} |F(x,t)|^2 e^{2\lambda t}\,dx.$$

Тому з рівності (11) легко одержати нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau} |v_t^{\varepsilon,t_0}|^2\,dx + \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \Bigg[(2a_m - b_1\gamma_1\delta_0) \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha v_t^{\varepsilon,t_0}|^2 -$$

$$- \left(2a_0 + 2\lambda + \frac{1}{\delta_0} + \delta_2\right) |v_t^{\varepsilon,t_0}|^2 \Bigg] dxdt \le$$

$$\le \sup_{(-\infty,T)} \int\limits_{\Omega_t} |F(x,t)|^2 e^{2\lambda t}\,dx + \frac{\mu_2}{\delta_2} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha v^{\varepsilon,t_0}|^2\,dxdt +$$

$$+ \frac{1}{\delta_2} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} |F_{t_0,t}(x,t)|^2\,dxdt, \quad \delta_2 > 0. \tag{12}$$

Якщо тепер врахувати умови, накладені на λ, і оцінки (10), то можна вказати такі δ_0, δ_2, що з (12) буде випливати оцінка

$$\int\limits_{\Omega_\tau} |v_t^{\varepsilon, t_0}|^2\, dx + \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha v_t^{\varepsilon, t_0}|^2\, dx dt \le$$

$$\le \mu_3 \left(\sup_{(-\infty, T)} \int\limits_{\Omega_t} |F(x,t)|^2 e^{2\lambda t}\, dx dt + \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} |F_{t_0,t}(x,t)|^2\, dx dt \right). \tag{13}$$

Сталі μ_2, μ_3 не залежать від ε і t_0.

Надаючи t_0 значень $T-1, T-2, \ldots, T-k, \ldots$, одержуємо послідовність функцій $\{v^{\varepsilon, T-k}(x, t)\}$. Продовжимо кожну з функцій $v^{\varepsilon, T-k}(x, t)$ нулем на область Q_{T-k}. Тоді на основі (10), (13) для функцій $v^{\varepsilon, T-k}(x, t)$ справджуються оцінки

$$\left\| \frac{\partial^i v^{\varepsilon, T-k}}{\partial t^i} \right\|_{L^\infty((-\infty, T); (L^2(\Omega))^l)} \le \mu_4,$$

$$\left\| \frac{\partial^i v^{\varepsilon, T-k}}{\partial t^i} \right\|_{L^2((-\infty, T); V)} \le \mu_4, \quad i = 0, 1, \tag{14}$$

$$\int\limits_{Q_T} (\mathcal{B}(v^{\varepsilon, T-k}), v^{\varepsilon, T-k})\, dx dt \le \varepsilon \mu_4,$$

причому стала μ_4 не залежить від ε і k. Отже, існує підпослідовність $\{v^{\varepsilon, s}(x, t)\} \subset \{v^{\varepsilon, T-k}(x, t)\}$ така, що

$$\frac{\partial^i v^{\varepsilon, s}}{\partial t^i} \to \frac{\partial^i v^\varepsilon}{\partial t^i} \quad \text{*-слабко в } L^\infty((-\infty, T); (L^2(\Omega))^l),$$

$$\frac{\partial^i v^{\varepsilon, s}}{\partial t^i} \to \frac{\partial^i v^\varepsilon}{\partial t^i} \quad \text{слабко в } L^2((-\infty, T); V),$$

коли $s \to \infty$, $i = 0, 1$.

Крім того, оскільки оператор $\mathcal{B}$ монотонний і ліпшиць-неперервний, то

$$\int\limits_{Q_T} (\mathcal{B}(v^{\varepsilon, s}), z)\, dx dt \to \int\limits_{Q_T} (\mathcal{B}(v^\varepsilon), z)\, dx dt,$$

коли $s \to \infty$ для довільної функції $z \in L^2((-\infty, T); V)$. Тому для функції $v^\varepsilon(x, t)$ справедлива рівність

$$\int\limits_{Q_T} \Bigg[(v_t^\varepsilon, z) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} (A_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta v^\varepsilon, D^\alpha z) +$$

$$+ \sum_{1 \le |\alpha| \le m} (B_\alpha(x,t) D^\alpha v^\varepsilon, z) - \lambda (v^\varepsilon, z) + \frac{1}{\varepsilon} (\mathcal{B}(v^\varepsilon), z) -$$

$$- (F(x,t) e^{\lambda t}, z) \Bigg] dx dt = 0, \tag{15}$$

яка б не була функція $z \in L^2((-\infty, T); V)$, і оцінки (14). Тоді з множини функцій $\{v^\varepsilon(x, t)\}$ можна виділити таку послідовність $\{v^{\varepsilon_k}(x, t)\}$, що

$$\frac{\partial^i v^{\varepsilon_k}}{\partial t^i} \to \frac{\partial^i v}{\partial t^i} \quad *\text{-слабко в } L^\infty((-\infty, T); (L^2(\Omega))^l),$$

$$\frac{\partial^i v^{\varepsilon_k}}{\partial t^i} \to \frac{\partial^i v}{\partial t^i} \quad \text{слабко в } L^2((-\infty, T)); V), \quad i = 0, 1,$$

$$\int\limits_{Q_T} (\mathcal{B}(v^{\varepsilon_k}), z)\, dxdt \to \int\limits_{Q_T} (\mathcal{B}(v), z)\, dxdt,$$

коли $k \to \infty$ для довільної функції $z \in L^2((-\infty, T); V)$.

Отже, з (15) маємо

$$\int\limits_{Q_T} (\mathcal{B}(v^{\varepsilon_k}), z)\, dxdt = \int\limits_{Q_T} \Bigg[(F(x,t)e^{\lambda t}, z) -$$

$$- \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} (A_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta v^{\varepsilon_k}, D^\alpha z) - \sum_{1\le|\alpha|\le m} (B_\alpha(x,t) D^\alpha v^{\varepsilon_k}, z) +$$

$$+ \lambda(v^{\varepsilon_k}, z) \Bigg] dxdt \to 0,$$

коли $k \to \infty$ для довільної функції $z \in L^2((-\infty, T); V)$. Тому $\mathcal{B}(v) = 0$ і $v \in K$ майже для всіх $t \in (-\infty, T]$. Нехай t_2, $-\infty < t_2 < T$, — довільне фіксоване число. Очевидно, рівність (15) справедлива для функцій $v^{\varepsilon_k}(x,t)$, яка б не була $z \in \in L^2((-\infty, T); V)$, $z \in K$ майже для всіх $t \in (t_2, T)$. Тоді

$$\int\limits_{Q_{t_2,T}} \Bigg[(v_t^{\varepsilon_k}, z - v^{\varepsilon_k}) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} (A_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta v^{\varepsilon_k}, D^\alpha (z - v^{\varepsilon_k}) +$$

$$+ \sum_{1\le|\alpha|\le m} (B_\alpha(x,t) D^\alpha v^{\varepsilon_k}, z - v^{\varepsilon_k}) - \lambda(v^{\varepsilon_k}, z - v^{\varepsilon_k}) -$$

$$- (F(x,t)e^{\lambda t}, z - v^{\varepsilon_k}) \Bigg] dxdt = \frac{1}{\varepsilon_k} \int\limits_{Q_{t_2,T}} (\mathcal{B}(z) - \mathcal{B}(v^{\varepsilon_k}), z - v^{\varepsilon_k})\, dxdt \ge 0.$$

Оскільки простір $L^2((t_2, T); V)$ компактно вкладений в $L^2((t_2, T); (L^2(\Omega))^l)$, то можна вважати, що

$$v^{\varepsilon_k} \to v \text{ в } L^2((t_2, T); (L^2(\Omega))^l),$$

коли $k \to \infty$. Крім того, при умовах, накладених на λ, оператор

$$\mathcal{A}u \equiv \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u) + \sum_{1\le|\alpha|\le m} B_\alpha(x,t) D^\alpha u - \lambda u$$

є монотонним. Тому

$$\varliminf_{k\to\infty} \int\limits_{Q_{t_2,T}} (\mathcal{A}v^{\varepsilon_k}, z - v^{\varepsilon_k})\, dxdt \le \int\limits_{Q_{t_2,T}} (\mathcal{A}v, z - v)\, dxdt$$

і з нерівності (16) отримуємо

$$\int\limits_{Q_{t_2,T}} \Bigg[(v_t, z - v) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} (A_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta v, D^\alpha (z - v)) +$$

$$+ \sum_{1 \le |\alpha| \le m} (B_\alpha(x,t) D^\beta v, z - v) - \lambda(v, z-v) - (F(x,t)e^{\lambda t}, z - v) \Bigg] dx dt \ge 0$$

для довільної функції $z \in L^2((-\infty, T); V)$, $z \in K$ майже для всіх $t \in (t_2, T)$. Якщо тепер покласти $u = v e^{-\lambda t}$, $z = w e^{\lambda t}$ і врахувати довільність числа t_2, то з останньої нерівності одержимо твердження теореми для $u(x, t)$.

На закінчення зауважимо, що задачі Фур'є (задачі без початкових умов) для еволюційних рівнянь і систем розглядалися в роботах [3 – 11]. Крім того, в [12] досліджено еволюційні варіаційні нерівності в класах обмежених та періодичних функцій.

1. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
2. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 608 с.
3. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А.* Аналог принципа Сен-Венана и единственность решения краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений // Успехи мат. наук. – 1976. – **31**, № 6. – С. 142–166.
4. *Бокало Н. М.* О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. – 1989. – Вып. 14. – С. 3–44.
5. *Бокало Н. М.* Об однозначной разрешимости краевых задач для полулинейных параболических уравнений в неограниченных областях без условий на бесконечности // Сиб. мат. журн. – 1993. – **34**, № 4. – С. 33–40.
6. *Ивасишен С. Д.* О параболических граничных задачах без начальных условий // Укр. мат. журн. – 1982. – **34**, № 5. – С. 547–552.
7. *Кадыров Р. Р., Жураев Б. Б.* О классах единственности решений краевых задач без начальных условий для параболических уравнений высшего порядка // Изв. АН УзССР. Сер. физмат. наук. –1985. – № 2. – С. 23–29.
8. *Лавренюк С. П.* Задача для одного эволюционного уравнения в неограниченном по времени цилиндре // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 11. – С. 1481–1486.
9. *Лавренюк С. П.* Задача без начальных условий для одной эволюционной системы. Условия единственности // Нелинейные граничные задачи. – 1993. – Вып. 5. – С. 53–58.
10. *Ивасишен С. Д.* О корректной разрешимости некоторых параболических граничных задач без начальных условий // Дифференц. уравнения. – 1978. – **14**, № 2. – С. 361–363.
11. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Аналитичность и теоремы типа Лиувилля и Фрагмена – Линделефа для общих параболических систем дифференциальных уравнений // Функцион. анализ и его прил. – 1974. – **8**, вып. 4. – С. 59–70.
12. *Панков А. А.* Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1985. – 184 с.

Одержано 15.06.95