УДК 517.944

Ю. О. Митропольський (Ін-т математики НАН України, Київ),
Г. П. Хома, П. В. Цинайко (Терноп. пед ін-т)

ПЕРІОДИЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРІДНОГО РІВНЯННЯ КОЛИВАННЯ СТРУНИ

We study a periodic problem for the equation $u_{tt}-u_{xx}=g(x,t)$, $u(x,t+T)=u(x,t)$, $u(x+\omega,t)=$ $=u(x,t)$, $(x,t)\in\mathbb{R}^2$ and establish conditions of the existence and uniqueness of the classical solution.

Вивчається періодична задача для рівняння $u_{tt}-u_{xx}=g(x,t)$, $u(x,t+T)=u(x,t)$, $u(x+\omega,t)=$ $=u(x,t)$, $(x,t)\in\mathbb{R}^2$. Знаходяться умови, при яких справедлива теорема існування і єдиності класичного розв'язку.

Досліджується розв'язність лінійної періодичної задачі для гіперболічного рівняння другого порядку з двома змінними.

1. Існування розв'язку. Встановимо умови існування класичного розв'язку періодичної задачі

$$u_{tt}-u_{xx}=g(x,t), \tag{1}$$

$$u(x,t+T)=u(x,t), \tag{2}$$

$$u(x+\omega,t)=u(x,t), \qquad (x,t)\in\mathbb{R}^2. \tag{3}$$

Розглянемо такі простори: C-простір функцій двох змінних x і t, неперервних і обмежених на $\mathbb{R}^2$; G_t — простір функцій двох змінних, неперервних і обмежених на $\mathbb{R}^2$ разом з похідною по t; Q_ω — простір ω-періодичних по x на $\mathbb{R}^2$ функцій; Q_T — простір T-періодичних по t на $\mathbb{R}^2$ функцій; Q_T^- — простір непарних по t і T-періодичних по t на $\mathbb{R}^2$ функцій; $C^{i,j}(\mathbb{R}^2)$ — простір функцій i раз диференційовних по x і j раз диференційовних по t, і якщо $i=j$, то $C^{i,j}(\mathbb{R}^2)=C^i(\mathbb{R}^2)$, Q^Φ — простір функцій двох змінних x і t, які розкладаються в рівномірно збіжні ряди вигляду

$$g(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)\sin kt.$$

Розглянемо один із операторів Вейводи – Штедри [1, 2]

$$(S_1 g)(x,t)=-\frac{1}{2}\int_0^x d\xi\int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau, \tag{4}$$

або в іншому вигляді [1]

$$(S_1 g)(x,t)=-\frac{1}{2}\int_0^x d\xi\int_\xi^x \{g(\xi,t+\xi-\eta)+g(\xi,t-\xi+\eta)\}\,d\eta. \tag{5}$$

Справедливе наступне твердження.

Теорема 1. *Якщо* $g\in G_t\cap Q_T$, *то функція* $u=S_1 g$ *є класичним* ($u\in$ $\in C^2(\mathbb{R}^2)$) *розв'язком лінійної періодичної задачі* (1), (2).

Доведення. На основі (4) і (5) безпосередньою перевіркою переконуємось, що $(S_1 g)(x,t+T)=(S_1 g)(x,t)$ і

$$(S_1 g)_{tt}(x, t) = -\frac{1}{2}\int_0^x \left\{\frac{\partial g(\xi, t+x-\xi)}{\partial(t+x-\xi)} - \frac{\partial g(\xi, t-x+\xi)}{\partial(t-x+\xi)}\right\} d\xi,$$

$$(S_1 g)_{xx}(x, t) = -g(x, t) - \frac{1}{2}\int_0^x \left\{\frac{\partial g(\xi, t+x-\xi)}{\partial(t+x-\xi)} - \frac{\partial g(\xi, t-x+\xi)}{\partial(t-x+\xi)}\right\} d\xi.$$

Таким чином, $u_{tt} - u_{xx} = g(x, t)$, що й треба було довести.

Для дослідження існування розв'язку лінійної періодичної задачі (1) – (3) розглянемо оператор

$$(Rg)(x, t, b) = -\frac{1}{4}\int_0^x d\xi \int_\xi^x \{g(\xi, t+\xi-\eta) + g(\xi, t-\xi+\eta)\}\, d\eta \; +$$

$$+ \; \frac{1}{4}\int_x^b d\xi \int_\xi^x \{g(\xi, t+\xi-\eta) + g(\xi, t-\xi+\eta)\}\, d\eta \; \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{4}\int_0^b Q(\xi)\, d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} g(\xi, \tau)\, d\tau, \qquad (6)$$

де $Q(\xi) = 1$, коли $0 \le \xi \le x$, $Q(\xi) = -1$, коли $x < \xi \le b$; b — дійсне число, відмінне від нуля.

Якщо ввести таке позначення норми функції $g(x, t)$:

$$\| g(x, t)\|_C = \sup\{| g(x, t)| : (x, t) \in \mathbb{R}^2\}, \qquad (7)$$

то, використовуючи означення оператора (6), переконуємось в справедливості твердження.

Теорема 2. *Якщо* $g \in G_t \cap Q_T$, *то функція* $u = Rg$ *є також класичним розв'язком задачі* (1), (2), *для якого справедливі оцінки*

$$\| u(x, t)\|_C \le \frac{b^2}{4}\| g(x, t)\|_C, \qquad (8)$$

$$\| u_t(x, t)\|_C \le \frac{b}{2}\| g(x, t)\|_C, \qquad (9)$$

$$\| u_x(x, t)\|_C \le \frac{b}{2}\| g(x, t)\|_C. \qquad (10)$$

Покажемо, що на основі оператора R можна визначити зв'язок між періодами ω і T, а також класи функцій, в яких сумісна задача (1) – (3).

Позначимо через W_b простір функцій $g \in C$, які задовольняють такі умови:

$$g(b+x, t+x-\tau+b) + g(b+x, t-x+\tau-b) =$$

$$= -g(x, t+x-\tau) - g(x, t-x+\tau) \quad \forall\, (x, t, \tau) \in \mathbb{R}^3, \qquad (11)$$

$$\int_{-\omega}^0 d\xi \int_0^b \{g(b+\xi, t+b-\theta) + g(b+\xi, t-b+\theta)\}\, d\theta = 0. \qquad (12)$$

Теорема 3. *Якщо* $g \in C \cap Q_\omega \cap W_b$, *то функція* $u = Rg$ *задовольняє умову* (3).

Доведення. Для доведення теореми потрібно показати виконання рівності

$$(Rg)(x+\omega, t, b) = (Rg)(x, t, b). \tag{13}$$

Перетворимо ліву частину рівності (13), визначену формулою (6), зробивши спочатку заміну $\xi = \omega + y$ у зовнішньому інтегралі, а потім $\eta = \omega + \tau$ у внутрішньому. Маємо

$$(Rg)(x+\omega, t, b) = -\frac{1}{4}\int\limits_0^{x+\omega} d\xi \int\limits_\xi^{x+\omega} \{g(\xi, t+\xi-\eta) + g(\xi, t-\xi+\eta)\}\, d\eta \; +$$

$$+ \; \frac{1}{4}\int\limits_{x+\omega}^{b} d\xi \int\limits_\xi^{x+\omega} \{g(\xi, t+\xi-\eta) + g(\xi, t-\xi+\eta)\}\, d\eta \; =$$

$$= -\frac{1}{4}\int\limits_{-\omega}^{x} dy \int\limits_y^{x} \{g(\omega+y, t+y-\tau) + g(\omega+y, t-y+\tau)\}\, d\tau \; +$$

$$+ \; \frac{1}{4}\int\limits_{x}^{b-\omega} dy \int\limits_\xi^{x} \{g(\omega+y, t+y-\tau) + g(\omega+y, t-y+\tau)\}\, d\tau .$$

Враховуючи, що $g \in Q_\omega$, останню рівність можна записати так:

$$(Rg)(x+\omega, t, b) =$$

$$= (Rg)(x, t, b) - \frac{1}{4}\int\limits_{-\omega}^{0} dy \int\limits_y^{x} \{g(y, t+y-\tau) + g(y, t-y+\tau)\}\, d\tau \; +$$

$$+ \; \frac{1}{4}\int\limits_{b}^{b-\omega} dy \int\limits_y^{x} \{g(y, t+y-\tau) + g(y, t-y+\tau)\}\, d\tau \; =$$

$$= (Rg)(x, t, b) + I_1 + I_2. \tag{14}$$

Зробивши в I_2 спочатку заміну $y = b + z$ у зовнішньому інтегралі, а потім $\tau = \theta + z$ у внутрішньому, одержимо

$$I_2 = \frac{1}{4}\int\limits_0^{-\omega} dz \int\limits_{b+z}^{x} \{g(b+z, t+b+z-\tau) + g(b+z, t-b-z+\tau)\}\, d\tau \; =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^{-\omega} dz \int\limits_b^{x-z} \{g(b+z, t+b-\theta) + g(b+z, t-b+\theta)\}\, d\theta \; =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_{-\omega}^{0} dz \int\limits_0^{b} \{g(b+z, t+b-\theta) + g(b+z, t-b+\theta)\}\, d\theta \; +$$

$$+ \; \frac{1}{4}\int\limits_0^{-\omega} dz \int\limits_0^{x-\omega} \{g(b+z, t+b-\theta) + g(b+z, t-b+\theta)\}\, d\theta = I_3 + I_4. \tag{15}$$

Інтеграл I_4 заміною $\theta = \tau - z$ зводиться до вигляду

$$I_4 = \frac{1}{4}\int\limits_0^{-\omega} dz \int\limits_z^{x} \{g(b+z, t+b+z-\tau) + g(b+z, t-b-z+\tau)\}\, d\tau . \tag{16}$$

Якщо припустити, що $g \in C \cap Q_\omega \cap W_b$, то на основі (11), (12), (14) – (16)

отримуємо $(Rg)(x+\omega, t, b) = (Rg)(x, t, b)$, тобто виконується умова (13), що треба було довести.

Об'єднуючи результати теорем 2 і 3, одержуємо умови, при яких оператор R породжує розв'язок періодичної задачі (1) – (3).

Теорема 4. *Для* $g \in G_t \cap Q_\omega \cap Q_T \cap W_b$ *функція* $u = Rg$, *визначена формулою* (6), *є функцією із простору* C^2, *яка задовольняє умови лінійної періодичної задачі* (1) – (3).

2. Простори розв'язків. Природно виникає питання: яка структура просторів, вказаних в теоремі 4, і як визначити число b?

Справедливе наступне твердження.

Лема 1. *Кожна функція* $g \in Q_T^-$, *що задовольняє умову*

$$u(b+x, b-z) = g(x,z) \qquad \forall\,(x,z) \in \mathbb{R}^2, \tag{17}$$

задовольняє і умову (11).

Доведення. Для функції $g \in Q_T^-$ умову (11) можна записати так:

$$\begin{gathered} g(b+x, b-(-(t+x-\tau))) - g(x, -(t+x-\tau)) = \\ = g(b+x, b-(t-x+\tau)) - g(x, t-x+\tau). \end{gathered} \tag{18}$$

Отже, якщо виконується умова (17), то виконується умова (18) $(0 \equiv 0)$, а отже, і умова (11).

Лема 1 доведена.

Таким чином, функціональна залежність (17) може визначати підпростори функцій простору W_b. Дійсно, покажемо, що на основі функціональної залежності (17) можна утворити щонайменше три простори функцій, в яких задача (1) – (3) має розв'язок.

I. Нехай

$$g \in Q_\omega \cap Q_T^-; \qquad b = \omega q, \quad q \in \mathbb{N}. \tag{19}$$

В цьому випадку рівність (17) набуває вигляду

$$g(x, \omega q - z) = g(x,z). \tag{20}$$

Оскільки $g \in Q_T^-$, то з (20) випливає, що $\omega q \neq Tk$, $k \in \mathbb{Z}$. Для простоти досліджень будемо вважати $T = 2\pi$. Покладемо

$$\omega q = (2p+1)\pi, \qquad (2p+1, q) = 1, \qquad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}, \tag{21}$$

де запис $(k,s) = 1$ означає, що числа k і s — взаємно прості. В кінцевому результаті рівність (20) запишеться так:

$$g(x, \pi - z) = g(x,z). \tag{22}$$

Враховуючи (22) і зроблені вище припущення, можна визначити число $b = b_1$, період ω_1 і простір C_1 функцій, в якому може бути справедлива теорема 4:

$$\begin{gathered} b_1 = \omega_1 q, \quad \omega_1 = \frac{(2p+1)\pi}{q}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}, \quad (2p+1, q) = 1, \\ C_1 = \{g:\ g(x,t) = g(x+\omega_1, t) = -g(x,-t) = g(x, \pi - t)\}. \end{gathered} \tag{23}$$

Лема 2. *Якщо* $g \in C_1$, *то* $g \in Q_{T=2\pi}$.

Доведення. Справді, $g(x, t+2\pi) = g(x, \pi - (-\pi - t)) = -g(x, \pi - (-t)) = g(x,t)$, що й треба було довести.

II. Нехай

$$g \in Q_\omega \cap Q^-_{T=2\pi}\,; \qquad b = \frac{\omega q}{2}, \quad q = 2s-1, \quad s \in \mathbb{N}. \tag{24}$$

В цьому випадку рівність (17) набуває вигляду

$$g\left(\frac{\omega q}{2} + x, \frac{\omega q}{2} - z\right) = g(x, z). \tag{25}$$

Оскільки $q = 2s-1$, $s \in \mathbb{N}$, — непарне число, то покладемо

$$\omega q = 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad q = 2s-1, \quad s \in \mathbb{N}, \quad (q, l) = 1. \tag{26}$$

На підставі (26), в залежності від вибору числа l (парним чи непарним), визначаємо ще два підпростори C_j, $j = 2, 3$, функцій, в яких може бути справедлива теорема 4:

$$\begin{gathered} b_2 = \frac{\omega_2 q}{2}, \quad \omega_2 = \frac{4p\pi}{q}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q = 2s-1, \quad (p, q) = 1, \\ C_2 = \{g:\ g(x,t) = -g(x,-t) = -g(\omega_2/2 + x, t) = g(x, t+2\pi)\}\,; \end{gathered} \tag{27}$$

$$\begin{gathered} b_3 = \frac{\omega_3 q}{2}, \quad \omega_3 = \frac{2\pi(2p-1)}{q}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q = 2s-1, \quad (2p-1, q) = 1, \\ C_3 = \{g:\ g(x,t) = g(x+\omega_3, t) = g(\omega_3/2 + x, \pi - t) = \\ = -g(x,-t) = g(x, t+2\pi)\}. \end{gathered} \tag{28}$$

3. Властивості просторів C_j і відповідних розв'язків задачі (1) – (3). Позначимо через $L(X, Y)$ простір лінійних і обмежених відображень X в Y. На основі формули (6) для простору C_1 введемо конкретний оператор

$$(R_1 g)(x, t, b_1) = \frac{1}{4}\int\limits_0^{b_1} Q(\xi)\, d\xi \int\limits_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} g(\xi, \tau)\, d\tau. \tag{29}$$

Справедливі наступні твердження.

Теорема 5. *Якщо* $g \in C_1$, *то* $g \in W_{b_1}$.

Доведення. Для доведення теореми 5 достатньо показати, що для числа $b = b_1$ виконуються умови (11) і (12). Оскільки $g \in C_1$, то внаслідок леми 1 умова (11) виконується. Покажемо, що умова (12) також виконується. Для цього запишемо внутрішній інтеграл рівності (12) для значення $b = b_1$ $(b = \omega_1 q = (2p+1)\pi)$ у вигляді

$$\begin{aligned} K &= \int\limits_0^{b_1} \{g(b_1 + \xi, t + b_1 - \theta) + g(b_1 + \xi, t - b_1 + \theta)\}\, d\theta = \\ &= \int\limits_0^{b_1/2} \{g(\xi, t + b_1 - \theta) + g(\xi, t - b_1 + \theta)\}\, d\theta\, + \\ &+ \int\limits_{b_1/2}^{b} \{g(\xi, t + b_1 - \theta) + g(\xi, t - b_1 + \theta)\}\, d\theta. \end{aligned} \tag{30}$$

В останньому інтегралі зробимо заміну $\tau = b_1 - \theta$. Одержимо

$$K = \int_0^{b_1/2} \{g(\xi, t+(2p+1)\pi-\theta) + g(\xi, t-(2p+1)\pi+\theta)\}\, d\theta\; -$$

$$- \int_{b_1/2}^{0} \{g(\xi, t+\tau) + g(\xi, t-\tau)\}\, d\tau =$$

$$= \int_0^{b_1/2} \{g(\xi, \pi-(-t+\theta)) + g(\xi, -\pi+t+\theta)\}\, d\theta\; +$$

$$+ \int_0^{b_1/2} \{g(\xi, t+\tau) + g(\xi, t-\tau)\}\, d\tau \equiv 0. \tag{31}$$

Отже, враховуючи (30) і (31), бачимо, що для C_1 виконується умова (12). Теорема 5 доведена.

Теорема 6. *Нехай* $g \in Q_t \cap C_1$. *Тоді* $R_1 \in L(C \cap C_1, C^{1,1} \cap C_1)$; $R_1 \in L(C_t \cap C_1, C^{2,2} \cap C_1)$.

Теорема 7. *Для* $g \in G_t \cap C_1$ *функція* $u(x,t) = (R_1 g)(x, t, b_1)$ *є функцією з простору* $C^{2,2} \cap C_1$, *яка задовольняє умови періодичної задачі* (1)–(3). *Більш того, дана функція задовольняє умови*

$$u(x, 0) = u(x, \pi) = 0. \tag{32}$$

***Зауваження* 1.** Отже, ми довели, що існує три простори C_j, $j = 1, 2, 3$, функція g, для яких завжди виконується умова (11), тобто одна із двох умов (11), (12), що визначають простір функцій W_b, причому функції простору C_1 задовольняють обидві умови (11) і (12). Для функцій $g \in C_j$, $j = 2, 3$, такий висновок, взагалі кажучи, зробити не можна. Це питання потребує подальшого дослідження. Однак існує клас функцій $g \in C_j$, $j = 2, 3$, які задовольняють умову (12).

Лема 3. *Якщо* $g \in C_j \cap Q_T^{\Phi}$, *то* $g \in W_{b_j}$, $j = 2, 3$.

Доведення проводиться безпосереднім обчисленням внутрішнього інтегралу рівності (12) при умові $b = b_j$, $j = 2, 3$, і з урахуванням означення простору Q_T^{Φ}.

Тепер на основі операторів

$$(R_j g)(x, t, b_j) = \frac{1}{4} \int_0^{b_j} Q(\xi)\, d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} g(\xi, \tau)\, d\tau,$$
$$b_j = \frac{\omega_j q}{2}, \quad \frac{\omega_j q}{2} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad j = 2, 3, \tag{33}$$

легко переконуємось у справедливості наступного твердження.

Теорема 8. *Для* $g \in C_j \cap Q_T^{\Phi}$ *функція* $u(x,t) = (R_j g)(x, t, b_j)$, $j = 2, 3$, *визначена формулою* (33), *є функцією з простору* C^2, *яка задовольняє умови періодичної задачі* (1)–(3) *і умову*

$$u(x, 0) = u(x, \pi) = 0.$$

***Зауваження* 2.** На основі теореми 7 і леми 3 можна зробити такий висновок: тільки оператор R_1 відображає простір C_1 самого в себе.

4. Єдиність розв'язку. Доведемо, що розв'язок відповідної однорідної задачі

$$u^0_{tt} - u^0_{xx} = 0, \tag{34}$$

$$u^0(x, 0) = u^0(x, \pi) = 0, \tag{35}$$

$$u^0(x + \omega_j, t) = u^0(x, t), \tag{36}$$

в просторі C_j, $j = 1, 2, 3$, тривіальний.

Лема 4. *Якщо* $u^0 \in C^2 \bigcap C_j$ *задовольняє* (34)–(36) *для* $\omega = \omega_j$, $j = 1, 2, 3$, *то* $u^0(x, t) = 0$.

Доведення. З (34) і (35) випливає, що

$$u^0(x, t) = s(x + t) - s(x - t) \tag{37}$$

для довільної функції $s \in C^2(\mathbb{R})$, періодичної з періодом 2π, яка задовольняє умову

$$\int_0^{2\pi} s(\alpha)\, d\alpha = 0. \tag{38}$$

Внаслідок (36) маємо $s(x + \omega_j) = s(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Оскільки $\omega_j = 2\pi p/q$, $(p, q) = 1$, при конкретно визначених p і q для кожного простору C_j, то одержимо, що функція s періодична навіть з періодом $2\pi/q$, тобто

$$s\left(x + \frac{2\pi}{q}\right) = s(x). \tag{39}$$

Розглянемо тепер окремо доведення леми 4 в кожному класі C_j, $j = 1, 2, 3$, вказаних функцій.

1. Нехай $u^0 \in C_1$. Тоді із $u^0 \in C_1$ випливає

$$u^0(x, \pi - t) = u^0(x, t),$$

або, враховуючи (37), маємо

$$s(x + \pi - t) - s(x - \pi + t) = s(x + t) - s(x - t).$$

Звідси одержуємо

$$s(x - t + \pi) + s(x - t) = s(x + t - \pi) + s(x + t). \tag{40}$$

Оскільки функція $s(x)$ — 2π-періодична, то рівність (40) може бути записана так:

$$s(x - t - \pi) + s(x - t) = s(x + t - \pi) + s(x + t). \tag{41}$$

На основі (38) рівність (41) можлива лише при виконанні умови

$$s(x - \pi) + s(x) = 0. \tag{42}$$

З іншого боку, оскільки в просторі C_1 $q = 2l$ для деякого натурального l, то функція s на основі (39) є π-періодичною. Отже, з рівності (42) випливає $s \equiv 0$, а це означає, що лема 4 для простору C_1 доведена.

2. Даний випадок доводиться аналогічно випадку 1.

3. Нехай $u^0 \in C_3$. Тоді з $u^0 \in C_3$ випливає

$$u^0(x+\omega_3/2, \pi-t) = u^0(x, t),$$

або, враховуючи (37), маємо

$$s(x+\omega_3/2+\pi-t) - s(x+\omega_3/2-\pi+t) = s(x+t) - s(x-t).$$

Звідси одержуємо

$$s(x+\omega_3/2+\pi-t) + s(x-t) = s(x+\omega_3/2+t-\pi) + s(x+t), \tag{43}$$

або

$$s(x+\omega_3/2+\pi-t) + s(x-t) = s(x+\omega_3/2+\pi+t) + s(x+t).$$

На основі (38) рівність (43) можлива лише при виконанні умови

$$s(x+\omega_3/2+\pi) + s(x) = 0. \tag{44}$$

Підставляючи у вираз (44) $x+k(\pi+\omega/2)$ замість x, одержуємо

$$s\big(x+(k+1)(\omega_3/2+\pi)\big) + s\big(x+k(\omega_3/2+\pi)\big) = 0. \tag{45}$$

Помноживши рівність (45) на $(-1)^k$ і підсумувавши по $k=0, 1, 2, \ldots, p-1$, будемо мати

$$\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\big(s\big(x+(k+1)(\omega_3/2+\pi)\big) + s\big(x+k(\omega_3/2+\pi)\big)\big) = 0,$$

що рівносильно рівності

$$(-1)^{p-1}s\big(x+p(\omega_3/2+\pi)\big) + s(x) = 0. \tag{46}$$

Оскільки $\omega_3 = 2\pi p/q$, p, q — непарні і $\pi p = (\omega_3 q)/2$, то

$$\big(s\big(x+p(\omega_3/2+\pi)\big) = s\big(x+(p+q)\omega_3/2)\big) = s(x).$$

Звідси на підставі (46) отримуємо, що при $u^0 \in C_3$ $2s(x) \equiv 0$, а це означає, що лема 4 для простору функцій C_3 доведена.

Отже, лема 4 повністю доведена.

Використовуючи лему 4, можна тепер дати відповідь про кількість розв'язків періодичної задачі (1)–(3) у просторах C_j, $j=1, 2, 3$, її сумісності.

Теорема 9. *Для* $g \in G_t \cap C_1$ *функція* $u = R_1 g$, *визначена формулою* (29), *є единою функцією з простору* $C^2 \cap C^1$, *яка задовольняє умови періодичної задачі* (1)–(3).

Теорема 10. *Для* $g \in G_t \cap C_j \cap Q_T^{\Phi}$ *функція* $u = R_j g$, $j = 2, 3$, *визначена формулою* (33), *є единою функцією з простору* C^2, *яка задовольняє умови періодичної задачі* (1)–(3).

1. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И.* Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. – Киев: Наук. думка, 1991. – 232 с.
2. *Вейвода О., Штедры М.* Существование классических периодических решений волнового уравнения: Связь теоретико-числового характера периода и геометрических свойств решений // Дифференц. уравнения. – 1984. – **20**, № 10. – С. 1733–1739.

Одержано 05.06.96