УДК 517.5

В. И. Рукасов, О. А. Новиков (Славян. пед. ин-т)

ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССОВ $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$ ОБОБЩЕННЫМИ СУММАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА

On the classes of periodic functions $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$, we study approximating properties of trigonometric polynomials generated by methods for summation of Fourier series.

Досліджуються апроксимаційні властивості тригонометричних поліномів, які породжуються методами підсумовування рядів Фур'є, на класах періодичних функцій $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$.

На протяжении ряда лет А. И. Степанец и его последователи изучают аппроксимационные свойства классов $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, $\hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, определяющихся тем, что обобщенные (ψ, β)-производные их элементов принадлежат некоторому множеству $\mathfrak{N}$. Ряд результатов по этим вопросам изложен в работах [1 – 13].

Классы $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$ определяются следующим образом. Пусть $f(x)$ — непрерывная 2π-периодическая функция и

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

— ее ряд Фурье.

Пусть, далее, $\psi(k)$ — произвольная функция натурального аргумента и β — фиксированное действительное число, $\beta \in (-\infty, \infty)$.

Предположим, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\psi(k)}\left(a_k \cos\left(kx+\frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right)$$

является рядом Фурье некоторой суммируемой функции. Эту функцию обозначим через $f^{\psi}_{\beta}(x)$ и назовем (ψ, β)-производной функции $f(x)$, а множество функций $f(x)$, удовлетворяющих такому условию, обозначим через C^{ψ}_{β}.

Если $f \in C^{\psi}_{\beta}$ и, кроме того,

$$\left|f^{\psi}_{\beta}(x) - f^{\psi}_{\beta}(x')\right| \le \omega(|x-x'|), \qquad x, x' \in R, \tag{2}$$

где $\omega(t)$ — произвольный фиксированный модуль непрерывности, то, следуя [1–4], будем говорить, что $f \in C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$.

При $\psi(k) = k^{-r}, r > 0$, классы $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$ совпадают с хорошо известными классами $W^{r}_{\beta}H_{\omega}$, аппроксимативные свойства которых изучались во многих работах (см., например, [14 – 19]). Более подробно с библиографией по этим вопросам можно ознакомиться в работах [4, 20].

С помощью матрицы $\Lambda = \{\lambda_{n,k}\}$, $n, k = 0, 1, 2, \ldots, \lambda_{n,0} = 1$, $\lambda_{n,k} = 0$ при $k \ge n$ каждой функции $f \in C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$ поставим в соответствие полином порядка n:

$$U_n(f; x; \Lambda) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_{n,k}(a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{3}$$

Будем считать, что матрица $\Lambda = \{\lambda_{n,k}\}$ определяется последовательностью непрерывных функций $\lambda(v) = \lambda_n(v)$, $0 \le v \le 1$, таких, что $\lambda_n(k/n) = \lambda_{n,k}$.

Пусть, далее, $\psi(v)$ — функция, определенная при всех $v \ge 1$, в точках $v = k$, имеющая значения $\psi(k)$ и

$$\tau(v) = \tau_n(v) = \begin{cases} (1-\lambda_n(v))\psi(nv), & n^{-1} \le v \le 1; \\ \psi(nv), & 1 \le v. \end{cases} \tag{4}$$

На отрезке $0 \le v \le n^{-1}$ функцию $\tau_n(v)$ доопределяем любым образом, лишь бы она оставалась непрерывной при всех $v \ge 0$ и обращалось в нуль в начале координат.

Если функция $\tau_n(v)$ непрерывна и ее преобразование Фурье

$$\hat{\tau}_n(t) = \pi^{-1}\int_0^\infty \tau_n(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv$$

является суммируемой на $(-\infty; \infty)$ функцией, то, как показано в работе [4], для любой функции $f \in C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$ справедливо равенство

$$f(x) - U_n(f; x; \Lambda) = \pi^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(x; \frac{t}{n}\right)\int_0^\infty \tau_n(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv\,dt, \tag{5}$$

где

$$\delta\left(x; \frac{t}{n}\right) = f^{\psi}_{\beta}\left(x + \frac{t}{n}\right) - f^{\psi}_{\beta}(x).$$

Из множества $\mathfrak{M}$ всех выпуклых вниз при $v \ge 1$ функций $\psi(v)$, удовлетворяющих условию $\lim_{v\to\infty}\psi(v) = 0$, следуя [4], выделим подмножества $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_c$ и $\mathfrak{M}_\infty$ согласно следующей характеристике.

Пусть $\psi \in \mathfrak{M}$ и $\eta(t) = \eta(\psi, t)$ — функция, связанная с $\psi(t)$ равенством $\psi(\eta(t)) = \psi(t)/2$, $t \ge 1$. Положим

$$\mu(t) = \mu(\psi, t) = \frac{t}{\eta(t) - t}.$$

Ко множеству $\mathfrak{M}_c$ отнесем все функции $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых найдутся такие положительные числа K_1 и K_2 (вообще говоря, зависящие от $\psi(\cdot)$), что $0 < K_1 \le \mu(t) \le K_2 < \infty$; ко множеству $\mathfrak{M}_\infty$ — все функции $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых $\mu(t)$ при $t \to \infty$ монотонно возрастает и неограничена сверху; ко множеству $\mathfrak{M}_0$ — функции $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых величина $\mu(t)$ ограничена сверху и не ограничена снизу никаким положительным числом.

Кроме того, через F обозначим множество функций $\psi \in \mathfrak{M}$, которые удовлетворяют условию

$$\int_1^\infty \frac{\psi(t)}{t}dt < \infty.$$

В работе [13] введены обобщенные суммы Валле Пуссена $V^{\varphi,h}_{n,p}(f; x)$, которые, будучи полиномами вида (3), определяются последовательностью суммирующих функций:

$$\lambda_{n,p}^{\varphi,h}(v) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \dfrac{n-p}{n}; \\ 1 - \dfrac{\varphi_n(nv)}{\varphi_n(n)} h_n(v) & \dfrac{n-p}{n} \le x \le 1, \end{cases}$$

где $p \in N$, $p \le n$, $\varphi_n(v)$ — последовательность непрерывных при $v \ge n-p$ функций, $h_n(v)$ — последовательность функций, равномерно ограниченных на отрезке [0, 1], удовлетворяющих условию $h_n(1) = 1$.

В случае, когда $\varphi_n(v) = v - n + p$, $h_n(1) \equiv 1$, операторы $V_{n,p}^{\varphi,h}(f;x)$ совпадают с известными суммами Валле Пуссена

$$V_{n,p}(f,x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f,x), \tag{6}$$

где $S_k(f,x)$, $k = 0, 1, \ldots,$ — частные суммы порядка k ряда Фурье функции $f(x)$.

В настоящей работе рассматривается асимптотическое поведение при $n \to \infty$ величины

$$\varepsilon_{n,p} = \varepsilon\left(C_\beta^\psi H_\omega; V_{n,p}^{\varphi,h}\right) = \sup_{f \in C_\beta^\psi H_\omega} \left\| f(x) - V_{n,p}^{\varphi,h}(f,x) \right\|_C \tag{7}$$

при условии, что $\lim_{n\to\infty} p/n$ существует, равен ξ и $0 \le \xi < 1$.

Исследование величины (7) сводится к изучению интегрального представления вида (5). Подбирая обобщенный метод Валле Пуссена в зависимости от параметров, определяющих класс $C_\beta^\psi H_\omega$, можно получить достаточно удобное для исследования представление (5).

При этом для величины (7) в ряде важных случаев получены точные по порядку оценки сверху и снизу. Здесь мы пользуемся методикой изучения интегральных представлений вида (5), развитой в работах А. И. Степанца [1–9].

В качестве вспомогательного утверждения доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $0 \le \xi < 1$, $\psi \in F$, $a(n)$ — *произвольная числовая последовательность, для которой* $a(n) \ge a(0) > 0$ $\forall\, n \in N$. *Пусть, далее, функции* $g_n(x) = \psi(x)\varphi_n(x)$ *монотонно возрастают и выпуклы вверх при* $x \in [n-p; n]$, $h_n(x)$ *представимы в виде степенных рядов:*

$$h_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k,n} x^k, \tag{8}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_{k,n} x^k| < \infty \quad \forall\, n \in N.$$

Если $\lim_{n\to\infty} a(n) = \infty$, *то положим* $h_n(x) \equiv 1$.

Тогда существует постоянная $\mathcal{K}$ *такая, что при всех* $n \in N$ *выполняется неравенство*

$$\varepsilon\left(C_\beta^\psi H_\omega; V_{n,p}^{\varphi,h}\right) \le \mathcal{K}\,\omega\!\left(\frac{1}{n-p}\right)\left[\psi(n-p)\left(\frac{n}{(n-p)a(n)} + \frac{a(n)p}{n} + \frac{n}{a(n)p}\right) + \right.$$

$$\left. + \int_{a(n)}^{\infty} \left(\psi(n) - \psi\!\left(n + \frac{n}{t}\right)\right) t^{-1}\,dt + \int_{1/a(n)}^{\infty} \frac{\psi(nv + n - p)}{v}\,dv \right], \tag{9}$$

где $\omega(t)$ — *произвольный фиксированный модуль непрерывности.*

Доказательство. Функцию $\tau(v)$ в рассматриваемом случае определим следующим образом:

$$\tau_n(v) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le \dfrac{n-p}{n}; \\ \dfrac{\varphi_n(nv)\psi(nv)}{\varphi_n(n)} h_n(v), & \dfrac{n-p}{n} \le x \le 1; \\ \psi(nv), & 1 \le x. \end{cases}$$

Нетрудно показать, что ее преобразование Фурье $\hat{\tau}(t)$ суммируемо на всей оси. Тогда согласно соотношению (5) имеем

$$\left| V_{n,p}^{\varphi,h}(f,x) - f(x) \right| = \pi^{-1} \int\limits_{|t|<a(n)} \delta(x;t/n) \int\limits_0^\infty \tau_n(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv dt +$$

$$+ \pi^{-1} \int\limits_{|t|>a(n)} \delta(x;t/n) \int\limits_0^\infty \tau_n(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv dt \overset{\text{def}}{=} I_1 + I_2. \tag{10}$$

Используя рассуждения, предложенные в работе [2, с. 102], а также учитывая монотонность и выпуклость функции $g_n(x)$, представление функции $h_n(x)$, можно показать, что для любой функции $f \in C_\beta^\psi H_\omega$ и для любого $x \in R$ справедливы соотношения

$$|I_1(x)| \le \mathcal{K} \omega\left(\frac{1}{n-p}\right) \left\{ \psi(n)\left(1 + \frac{n}{pa(n)}\right) + \frac{\psi(n)n}{(n-p)a(n)} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{a(n)}^\infty (\psi(n) - \psi(nt - n + p)) \frac{dt}{t} \right\}, \tag{11}$$

$$|I_2| \le \mathcal{K} \omega\left(\frac{1}{n-p}\right) \left\{ \psi(n-p) \left(1 + \frac{pa(n)}{n} + \int\limits_{1/a(n)}^\infty \frac{\psi(nt+n-p)}{t} dt \right) \right\}. \tag{12}$$

Очевидно, что

$$\varepsilon\left(C_\beta^\psi H_\omega; V_{n,p}^{\varphi,h}\right) \le \sup_{f \in C_\beta^\psi H_\omega} |I_1| + \sup_{f \in C_\beta^\psi H_\omega} |I_2|. \tag{13}$$

Объединяя соотношения (10) – (13), получаем оценку (9).

В качестве следствия из теоремы 1 получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть*

$$0 \le \xi < 1, \ \psi \in \mathfrak{M}_C \cup \mathfrak{M}_\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\mu(n)p}{n} = \alpha, \quad 0 < \alpha < \infty$$

и для функций $g_n(x)$, $h_n(x)$ *выполнены условия теоремы* 1.

Тогда существует постоянная $\mathcal{K}$ *такая, что при всех* $n \in N$ *справедлива оценка*

$$\varepsilon\left(C_\beta^\psi H_\omega; V_{n,p}^{\varphi,h}\right) \le \mathcal{K}\psi(n)\omega(1/n). \tag{14}$$

Доказательство. В работе [9] для $\psi \in \mathfrak{M}_C \cup \mathfrak{M}_\infty$ установлено существование константы $\mathcal{K}$ такой, что

$$\psi(2n - \eta(n)) \le \mathcal{K}\psi(n), \quad n \in N.$$

Используя последнее неравенство, а также соотношение (7.66′) из работы [4, с. 121], при $a(n) = \mu(n)$ на основании соотношения (9) получаем требуемую оценку (14).

Следствие. *Пусть* $0 < \xi < 1$, $\psi \in \mathfrak{M}_C$, *функции* $g_n(x)$ *возрастают и выпуклы вверх при* $x \ge n - p$, *функции* $h_n(x)$ *представимы в виде* (8).

Тогда существует постоянная $\mathcal{K}$ *такая, что при всех* $n \in N$ *справедливо соотношение*

$$\varepsilon\left(C_\beta^\psi H_\omega; V_{n,p}^{\varphi,h}\right) \le \mathcal{K}\psi(n)\omega(1/n). \tag{15}$$

1. *Степанец А. И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье. – Киев, 1983. – 57 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.10).
2. *Степанец А. И.* Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1986. – **50,** № 1. – С. 101–136.
3. *Степанец А. И.* Скорость сходимости рядов Фурье в пространствах L_β^ψ. – Киев, 1986. – С. 3–48. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.66).
4. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
5. *Степанец А. И.* Приближение целыми функциями в равномерной метрике. – Киев, 1988. – С. 3–41 – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88.27).
6. *Степанец А. И.* Приближение операторами Фурье функций, заданных на действительной оси // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, №2. – С. 198–209.
7. *Степанец А. И.* Классы функций, заданные на действительной оси и их приближения целыми функциями. I // Там же. – 1990. – **42**, № 1. – С. 102–112.
8. *Степанец А. И.* Классы функций, заданные на действительной оси и их приближения целыми функциями. II // Там же. – № 2. – С. 210–222.
9. *Степанец А. И.* Приближение в пространствах локально интегрируемых функций // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, №5. – С. 597–625.
10. *Рукасов В. И.* Приближение периодических функций линейными средними их рядов Фурье. – Киев, 1983. – 55 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.62).
11. *Харкевич Ю. И.* О приближении функций классов $C_\beta^\psi H_\omega$ линейными средними их рядов Фурье – Киев, 1991. – 59 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 91.8).
12. *Рукасов В. И.* Приближение операторами Валле Пуссена функций, заданных на действительной оси // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, №5. – С. 682–690.
13. *Новиков О. А., Рукасов В. И.* Приближение классов непрерывных периодических функций аналогами сумм Валле Пуссена // Ряды Фурье: теория и приложения (Сб. научн. тр.). — Киев: Ин-т математики, 1992. – С. 57–63.
14. *Никольский С. М.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1945. – **15.** С. 1–76.
15. *Никольский С. М.* Ряд Фурье функций с данным модулем непрерывности // Докл. АН СССР. – 1946. – **52.** – С. 191–193.
16. *Ефимов А. В.* Линейные методы приближения некоторых классов непрерывных периодических функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1961. – **62.** – С. 3–47.
17. *Ефимов А. В.* О приближении периодических функций суммами Валле Пуссена. I // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1959. – **23,** №5. – С. 737–770.
18. *Ефимов А. В.* О приближении периодических функций суммами Валле Пуссена. II // Там же. – 1960. – **24,** №3. – С. 431–468.
19. *Гаврилюк В. Т., Степанец А. И.* Приближение дифференцируемых функций полиномами Рогозинского // Укр. мат. журн. – 1973. – **25,** № 1. – С. 3–13.
20. *Степанец А. И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 340 с.

Получено 11.05.95