УДК 512.546

Е. Г. Зеленюк (Киев. ун-т)

ТОПОЛОГИЧЕСКИ СВОБОДНЫЕ ПОДМНОЖЕСТВА УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР

We prove that every infinite Abelian algebra and every countable field contain infinite topologically free subsets.

Доведено, що кожна нескінченна абелева група та кожне зліченне поле містять нескінченні топологічно вільні підмножини.

1. Введение. В 1941 г. А. А. Марков доказал [1, 2], что для произвольного вполне регулярного пространства X существует и единственна топологическая группа F такая, что:

1) X — замкнутое подпространство F;

2) алгебраически F — это свободная группа с базой X;

3) каждое непрерывное отображение пространства X в топологическую группу G продолжается до непрерывного гомоморфизма F в G.

В дальнейшем теорема Маркова была обобщена на универсальные алгебры следующим образом [3, 4]. Пусть $\mathfrak{M}$— класс универсальных алгебр, содержащий неодноэлементные алгебры и замкнутый относительно декартовых произведений и подалгебр, $\mathfrak{M}^*$ — класс всех хаусдорфовых топологических алгебр, алгебраические копии которых принадлежат $\mathfrak{M}$. Тогда для произвольного вполне регулярного пространства X существует и единственна топологическая алгебра $F \in \mathfrak{M}^*$ такая, что:

1) X — замкнутое подпространство F;

2) алгебраически F — это свободная алгебра из $\mathfrak{M}$ с базой X;

3) каждое непрерывное отображение пространства X в топологическую алгебру $G \in \mathfrak{M}^*$ продолжается до непрерывного гомоморфизма F в G.

Пусть теперь A — произвольная универсальная алгебра, операции которой определены не обязательно всюду. Подмножество $B \subseteq A$ будем называть топологически свободным, если для любой вполне регулярной топологии τ на B существует хаусдорфова топология $\overline{\tau}$ на A такая, что $\overline{\tau}|_B = \tau$, каждая операция алгебры A непрерывна в $\overline{\tau}$ и B — замкнутое подпространство в $(A, \overline{\tau})$. В этих терминах теорема Маркова звучит так: *база произвольной относительно свободной алгебры есть топологически свободное подмножество.* Под относительно свободной алгеброй понимается алгебра, свободная в некотором классе, замкнутом относительно декартовых произведений и подалгебр. Естественно возникает вопрос: существует ли бесконечное топологически свободное подмножество в алгебре, которая не является относительно свободной алгеброй бесконечного ранга? Например, в группе целых чисел $\mathbb{Z}$ или, скажем, в поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$? Решению подобных вопросов и посвящена данная работа.

В п. 1 данной статьи изложен метод фильтров задания топологий на счетных алгебрах, идейно восходящий к [5]. Этот метод позволяет, в частности, для произвольной топологии τ на подмножестве B счетной алгебры A „конструктивно" описать наибольшую топологию $\langle\tau\rangle$ на A такую, что $\langle\tau\rangle|_B \subseteq \tau$ и каждая операция алгебры A непрерывна в $\langle\tau\rangle$. В п. 2 с помощью такого „конструктивного" описания получена алгебраическая характеризация топологически свободных подмножеств в счетных алгебрах, играющая решающую роль в последующих пунктах. В п. 3 доказано, что каждая бесконечная абелева группа содержит равномощное ей топологически свободное подмножество. Доказано также, что каждая счетная абелева группа содержит бесконечное топологически свободное подмножество, алгебраически порождающее в ней подгруппу конечного индекса. Для несчетных абелевых групп это не так. В п. 4 доказано, что каждое счетное поле содержит бесконечное топологически свободное подмножество. Несчетных топологически свободных подмножеств в полях не существует. Доказано также, что каждое счетное поле содержит топологически свободное подмножество, которое и аддитивно, и мультипликативно порождает все поле. В работе сформулировано также несколько нерешенных вопросов.

В первых двух пунктах через A обозначается произвольная бесконечная универсальная алгебра, а через Ω — множество ее операций. Операции предполагаются определенными не обязательно всюду. Через Ω^* обозначается множество операций, получающихся из основных операций, т. е. операций из Ω, с помощью суперпозиции, а через Ω' — множество операций, получающихся из основных операций с помощью суперпозиции и подстановки вместо некоторых аргументов элементов из A. Для произвольного множества X через $\Omega(X)$ обозначается множество термов сигнатуры Ω от элементов множества X. Аналогичный смысл имеют обозначения $\Omega^*(X)$, $\Omega'(X)$. Под счетной алгеброй понимается счетная универсальная алгебра с не более чем счетным множеством операций. Без объяснений используется тот факт, что для счетных пространств вполне регулярность совпадает с регулярностью.

2. Метод фильтров. Пусть $\varphi = \{\varphi_a\colon a \in A\}$ — система фильтров на алгебре A. Из всех топологий на A, в которых каждая операция из Ω непрерывна и каждый фильтр φ_a сходится к точке a, имеется наибольшая топология $\langle\varphi\rangle$. Пусть до конца пункта алгебра A счетна. Дадим в этом случае „конструктивное" описание топологии $\langle\varphi\rangle$.

Прежде всего обозначим через $\mathcal{F}$ множество всех отображений ε из A в совокупность подмножеств A таких, что $a \in \varepsilon(a) \in \varphi_a$ для каждого $a \in A$, и все термы из $\Omega(A)$ пронумеруем в последовательность. Возьмем произвольный элемент $a \in A$, произвольную бесконечную последовательность отображений $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots$ из $\mathcal{F}$ и определим множество $[\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots](a) \subseteq A$.

Пусть x — переменная. Положим $X_0 = \{x_0\}$, $\Omega_{x_0} = \Omega(A)$, $T^0_{x_0} = \{x_0\}$, $\bar{x}_0 = \varepsilon_0(A)$ и пометим во множестве Ω_{x_0} терм a.

Предположим, что уже выделено конечное множество переменных X_n и для каждой переменной $x \in X_n$ определены множество термов $\Omega_x = \Omega(A)$, некоторые термы которого помечены, конечное множество термов $T^n_x \subset \Omega^*(X_n)$ и множество $\bar{x} \subseteq A$.

Вначале для каждой переменной $x \in X_n$ проделаем следующую процедуру. По каждому терму $t \in T^n_x$, скажем $f(y_1, \ldots, y_k)$, образуем множество $\bar{t} = f(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_k) \subseteq A$. Затем образуем множество $\overline{T^n_x} = \bigcup\{\bar{t}\colon t \in T^x_n\}$. Далее во множестве Ω_x найдем первый непомеченный терм, например $\omega(a_1, \ldots, a_m)$, такой, что $\omega(a_1, \ldots, a_m) \in \overline{T^n_x}$, пометим его, выберем новые различные переменные $x_1, \ldots, x_m$ и обозначим через θ^n_x терм $\omega(x_1, \ldots, x_m)$. Для каждой переменной x_i положим $\Omega_{x_i} = \Omega(A)$, $T^{n+1}_{x_i} = \{x_i\}$, $\bar{x}_i = \varepsilon_{n+1}(A)$ и пометим во множестве Ω_{x_i} терм a_i.

После этого через X_{n+1} обозначим множество переменных, которые либо принадлежат X_n, либо содержатся в термах θ^n_x, где $x \in X_n$. И наконец, для каждой переменной $x \in X_n$ через T^{n+1}_x обозначим множество термов из $\Omega^*(X_{n+1})$, которые либо принадлежит T^n_x, либо получаются из таковых заменой некоторых переменных y на термы θ^n_y.

Затем переходим к следующему шагу и т. д.

Завершив описанный процесс, положим

$$[\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n](a) = \overline{T^n_{x_0}},$$

$$[\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots](a) = \bigcup_n [\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n](a).$$

Теорема 1. *Для каждого* $a \in A$ *множества вида* $[\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots](a)$, *где* $\varepsilon_n \in \in \mathcal{F}$, *образуют базу открытых окрестностей точки* a *в топологии* $\langle\varphi\rangle$.

Доказательство. Вначале покажем, что множества указанного выше вида образуют базу фильтра.

Пусть Y — множество переменных, с помощью которых строится множество $[\varepsilon'_0, \varepsilon'_1, \ldots](a)$, Z — множество переменных, с помощью которых строится множество $[\varepsilon''_0, \varepsilon''_1, \ldots](a)$, y_0, z_0 — начальные переменные во множествах X, Y соответственно. Отображение $\varepsilon_0 \in \mathcal{F}$ выберем из условия $\varepsilon_0(a) \subseteq \varepsilon'_0(a) \cap \cap \varepsilon''_0(a)$. Далее, пусть t — первый непомеченный терм во множестве Ω_{x_0}, скажем $\omega(a_1, \ldots, a_m)$, такой, что $\bar{t} = \omega(a_1, \ldots, a_m) \in \overline{T^0_{x_0}} = \varepsilon_0(a)$, $x_1, \ldots, x_m$ — соответствующие вводимые переменные, n_1 — номер шага, на котором во множестве Ω_{y_0} помечается терм t (такой шаг существует), $y_1, \ldots, y_m$ — соответствующие вводимые переменные, m_1 — номер шага, на котором во множестве Ω_{z_0} помечается терм t, $z_1, \ldots, z_m$ — соответствующие вводимые переменные. Отображение $\varepsilon_1 \in \mathcal{F}$ выберем из условий $\varepsilon_1(a_i) \subseteq \varepsilon'_{n_1}(a_i) \cap \varepsilon''_{m_1}(a_i)$. Далее, пусть x — произвольная переменная из X_1, y — соответствующая ей переменная из Y, z — соответствующая переменная из Z, t_x — первый непомеченный терм в Ω_x такой, что $\bar{t}_x \in \overline{T^1_x}$, $n_2(x)$ — номер шага, на котором во множестве Ω_y помечается терм t_x, $m_2(x)$ — номер шага, на котором во множестве Ω_z помечается терм t_x. Отображение $\varepsilon_2 \in \mathcal{F}$ выберем из условий $\varepsilon_2(b) \subseteq \subseteq \varepsilon'_{n_2(x)}(b) \cap \varepsilon''_{m_2(x)}(b)$, где b пробегает элементы A, содержащиеся в терме t_x, а x пробегает X_1. Аналогичным образом построим последовательность отображений $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots$ из $\mathcal{F}$ такую, что

$$[\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots](a) \subseteq [\varepsilon'_0, \varepsilon'_1, \ldots](a) \cap [\varepsilon''_0, \varepsilon''_1, \ldots](a).$$

Покажем теперь, что для любого терма из $\Omega(A)$, например $\omega(a_1, \ldots, a_m)$ такого, что $\omega(a_1, \ldots, a_m) \in [\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots](a)$, найдется такая последовательность отображений $\varepsilon'_0, \varepsilon'_1, \ldots$ из $\mathcal{F}$, что

$$(\omega[\varepsilon'_0, \varepsilon'_1, \ldots](a_1), \ldots, [\varepsilon'_0, \varepsilon'_1, \ldots](a_m)) \subseteq [\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots](a).$$

Действительно, пусть n — номер шага, на котором во множестве Ω_{x_0} помечается данный терм. Тогда последовательность отображений $\varepsilon'_0 = \varepsilon_n$, $\varepsilon'_1 = = \varepsilon_{n+1}, \ldots$ из $\mathcal{F}$ будет требуемой.

Следовательно, на алгебре A существует топология, в которой каждая операция из Ω непрерывна и для каждого $a \in A$ множества вида $[\varepsilon_0,$

$\varepsilon_1, \dots](a)$ образуют базу открытых окрестностей точки a. Ясно, что эта топология и есть $\langle\varphi\rangle$.

3. Алгебраическая характеризация топологически свободных подмножеств в счетных алгебрах. Подмножество B алгебры A называется топологически свободным, если для любой вполне регулярной топологии τ на B существует хаусдорфова топология $\overline{\tau}$ на A такая, что $\overline{\tau}|_B = \tau$, каждая операция из Ω непрерывна в $\overline{\tau}$ и B — замкнутое подпространство в $(A, \overline{\tau})$.

Для произвольной топологии τ на подмножестве B алгебры A через $\langle\tau\rangle$ обозначим наибольшую топологию на A такую, что $\langle\tau\rangle|_B \subseteq \tau$ и каждая операция из Ω непрерывна в $\langle\tau\rangle$. Очевидно, подмножество $B \subseteq A$ топологически свободно тогда и только тогда, когда для любой вполне регулярной топологии τ на B топология $\langle\tau\rangle$ на A хаусдорфова, $\langle\tau\rangle|_B = \tau$ и B — замкнутое подпространство в $(A, \langle\tau\rangle)$.

Уравнением ($*$-уравнением) над A называется формула вида

$$f(y_1, \dots, y_m) = g(z_1, \dots, z_n),$$

где $f, g \in \Omega'$ ($f, g \in \Omega^*$), а y_i, z_j — переменные, причем не обязательно различные. Такую формулу иногда удобно записывать в виде $u(x_1, \dots, x_n)$, подчеркивая этим, что $x_1, \dots, x_n$ — это различные переменные, встречающиеся в ней. Решением уравнения $u(x_1, \dots, x_n)$ называется каждая n-ка $(a_1, \dots, a_n)$ элементов A такая, что формула $u(a_1, \dots, a_n)$ либо определена и истинна, либо не определена. Решение, все элементы которого различны, называется главным.

Подмножество B алгебры A называется независимым, если каждое отображение $B \to \langle B\rangle$ продолжается до гомоморфизма $\langle B\rangle \to \langle B\rangle$, где $\langle B\rangle$ — подалгебра из A, алгебраически порожденная B. В терминах уравнений это означает, что каждое уравнение над A либо является тождеством на $\langle B\rangle$, либо не имеет в B главных решений. Подмножество B алгебры A будем называть почти независимым, если каждое уравнение над A является тождеством на B, либо для него во множестве B найдется конечное подмножество K такое, что во множестве $B\backslash K$ оно не имеет главных решений. Если $\langle B\rangle = A$, то из независимости B следует его почти независимость, однако в общем случае это не так.

Лемма 1. *Пусть B — почти независимое подмножество алгебры A, снабженное регулярной топологией, $u(x_1, \dots, x_n)$ — уравнение над A, R — множество его решений. Если в пространстве B существуют точка b и замкнутые подмножества $F_1, \dots, F_n$ такие, что $(\{b\} \times F_1 \times \dots \times F_n) \cap R = \varnothing$, то в B существует и окрестность V точки b такая, что $(V \times F_1 \times \dots \times F_n) \cap R = \varnothing$.*

Доказательство. Предположим противное и выберем окрестность U точки b такую, что если $b \notin F_k$, то $U \cap F_k = \varnothing$. Тогда найдутся бесконечная последовательность $\{b(i)\}$ различных элементов из U и бесконечные последовательности $\{b_1(i)\}$ из $F_1, \dots, \{b_n(i)\}$ из F_n такие, что $r(i) = (b(i), b_1(i), \dots, b_n(i)) \in R$ для каждого i. Можно считать, что в каждой из последовательностей $\{b_1(i)\}, \dots, \{b_n(i)\}$ либо все элементы равны, либо все различны. Также можно считать, что если в каком-то решении $r(i_0)$ некоторые из координат равны, то соответствующие координаты равны и в каждом другом решении $r(i)$. Таким образом, множество $\{0, 1, \dots, n\}$ номеров координат разбивается на классы: класс K_0 стационарных координат $(0 \notin K_0)$ и классы $K_1, \ldots, K_m$ равных координат. Рассматривая в общем-то уже другое уравнение от m различных переменных и используя почти независимость B, заключаем, что каждый вектор $r = (r_0, r_1, \ldots, r_n) \in B^{n+1}$, координаты которого с номерами из K_0 совпадают с соответствующими координатами решения $r(i)$, а с номерами из K_j, $j = 1, \ldots, m$, равны, будет решением уравнения $u(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Выберем класс K_j, для которого $0 \in K_j$, а затем возьмем любое решение $r(i)$ и заменим в нем координаты с номерами из K_j на b. Получим некоторый вектор r^*. С одной стороны, $r^* \in R$, а с другой — $r^* \in \{b\} \times F_1 \times \ldots \times F_n$. Противоречие.

Теорема 2. *Подмножество B счетной алгебры A топологически свободно тогда и только тогда, когда B почти независимо.*

Доказательство. Необходимость. Предположим противное. Тогда существуют уравнение $u(x_1, \ldots, x_n)$ над A, бесконечная последовательность векторов — его решений $r(i) = (r_1(i), \ldots, r_n(i)) \in B^n$ таких, что все $r_j(i)$ различны, и вектор $r = (r_1, \ldots, r_n) \in B$, не являющийся его решением. Пусть τ — регулярная топология на B, в которой $r_1(i) \to r_1, \ldots, r_n(i) \to r_n$. Так как B топологически свободно, топология $\langle\tau\rangle$ на хаусдорфова. Но тогда в $(A, \langle\tau\rangle)$ по непрерывности решением уравнения $u(x_1, \ldots, x_n)$ будет также и вектор r. Противоречие.

Достаточность. Пусть τ — произвольная регулярная топология на B. Для каждого $a \in A$ через φ_a обозначим фильтр на A такой, что если $a \notin B$, то φ_a — главный фильтр над точкой a, если же $a \in B$, то $B \in \varphi_a$ и $\varphi_a|_B$ — фильтр окрестностей точки a в (B, τ). Тогда $\langle\tau\rangle = \langle\varphi\rangle$, где $\varphi = \{\varphi_a\colon a \in A\}$. Докажем, что $\langle\varphi\rangle|_B = \tau$, B — замкнутое подпространство в $(A, \langle\varphi\rangle)$ и $\langle\varphi\rangle$ — хаусдорфова топология. Пусть $\mathscr{F}_0$ — множество всех таких $\varepsilon \in \mathscr{F}$, что $\varepsilon(a) = \{a\}$, если $a \notin B$, и $\varepsilon(a)$ — замкнутая окрестность точки a в (B, τ), если $a \in B$.

Вначале докажем, что $\langle\varphi\rangle|_B = \tau$. Возьмем в (B, τ) произвольную точку a и ее произвольную открытую окрестность U. Согласно теореме 1 достаточно построить последовательность отображений $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots$ из $\mathscr{F}_0$ такую, что $[\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots](a) \cap B \subseteq U$. Предположим, что мы уже построили отображения $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n \in \mathscr{F}_0$ такие, что $[\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n](a) \cap B \subseteq U$, однако $[\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}](a) \cap B \not\subseteq U$ для любого $\varepsilon_{n+1} \in \mathscr{F}_0$ или, что то же, $\varepsilon_{n+1} \in \mathscr{F}$. Тогда для некоторых операций $f \in \Omega'$, точек $a_j \in B$ и замкнутых множеств U_k из (B, τ)

$$f(\ldots, a_j, \ldots; \ldots, U_k, \ldots) \cap B \subseteq U,$$

$$f(\ldots, U_j, \ldots; \ldots, U_k, \ldots) \cap B \not\subseteq U$$

для любых окрестностей U_j точек a_j из (B, τ). Но это означает, что

$$(\ldots \times \{a_j\} \times \ldots \times \ldots \times U_k \times \ldots \times (B \setminus U)) \cap R = \varnothing,$$

где R — множество решений уравнения $f(\ldots, x_j, \ldots; \ldots, x_k \ldots) = x$, однако

$$(\ldots \times U_j \times \ldots \times \ldots \times U_k \times \ldots \times (B \setminus U)) \cap R \neq \varnothing$$

— противоречие с леммой 1.

Докажем, что B — замкнутое подпространство в $(A, \langle\varphi\rangle)$. Возьмем произвольную точку $a \in A \setminus B$ и предположим, что мы уже построили отображения $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n \in \mathcal{F}_0$ такие, что $[\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n](a) \cap B = \varnothing$, однако $[\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}](a) \cap B \neq \varnothing$ для любого $\varepsilon_{n+1} \in \mathcal{F}_0$. Тогда для некоторых операций $f \in \Omega'$, точек $a_j \in B$ и замкнутых множеств U_k из (B, τ) $f(\ldots, a_j, \ldots; \ldots, U_k, \ldots) \cap B = \varnothing$ и $f(\ldots, U_j, \ldots; \ldots, U_k, \ldots) \cap B \neq \varnothing$ для любых окрестностей U_j точек a_j из (B, τ). Но это означает, что

$$(\ldots \times \{a_j\} \times \ldots \times \ldots \times U_k \times \ldots \times B) \cap R = \varnothing,$$

где R — множество решений уравнения $f(\ldots, x_i, \ldots; \ldots, x_j, \ldots) = x$, однако

$$(\ldots \times U_j \times \ldots \times \ldots \times U_k \times \ldots \times B) \cap R \neq \varnothing$$

— противоречие с леммой 1.

И наконец, докажем, что $\langle\varphi\rangle$ — хаусдорфова топология. Возьмем произвольные различные элементы $a, b \in A$ и предположим, что мы уже построили отображения $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n \in \mathcal{F}_0$ такие, что $[\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n](a) \cap [\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n](b) = \varnothing$, однако $[\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}](a) \cap [\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}](b) \neq \varnothing$ для любого $\varepsilon_{n+1} \in \mathcal{F}_0$. Тогда для некоторых операций $f, g \in \Omega'$, точек $a_j, a_l \in B$ и замкнутых множеств U_k, U_s из (B, τ)

$$f(\ldots, a_j, \ldots; \ldots, U_k, \ldots) \cap g(\ldots, a_l, \ldots; \ldots, U_s, \ldots) = \varnothing,$$

однако

$$f(\ldots, U_j, \ldots; \ldots, U_k, \ldots) \cap g(\ldots, U_l, \ldots; \ldots, U_s, \ldots) \neq \varnothing$$

для любых окрестностей U_j, U_l точек a_j, a_l соответственно из (B, τ). Но это означает, что

$$(\ldots \times \{a_j\} \times \ldots \times \ldots \times U_k \times \ldots \times \ldots \times \{a_l\} \times \ldots \times \ldots \times U_s \times \ldots) \cap R = \varnothing,$$

где R — множество решений уравнения

$$f(\ldots, x_j, \ldots; \ldots, x_k, \ldots) = g(\ldots, x_l, \ldots; \ldots, x_s, \ldots)$$

и

$$(\ldots \times U_j \times \ldots \times \ldots \times U_k \times \ldots \times \ldots \times U_l \times \ldots \times \ldots \times U_s \times \ldots) \cap R \neq \varnothing$$

— снова противоречие с леммой 1.

В связи с доказанной теоремой сформулируем следующий вопрос.

***Вопрос* 1.** Верно ли, что каждое почти независимое подмножество в произвольной несчетной абелевой группе топологически свободно?

4. Топологически свободные подмножества в абелевых группах. Пусть A — произвольная бесконечная абелева группа. Бесконечное подмножество $B \subset A$ будем называть почти независимыми 1-го рода, если для любых ненулевых целых $z_1, \ldots, z_n$ найдется конечное подмножество $K \subset B$ такое, что уравнение $z_1 x_1 + \ldots + z_n x_n = 0$ во множестве $B \setminus K$ не имеет главных решений. Бесконечное подмножество $B \subset A$ будем называть почти независимым 2-го рода, если существует натуральное m такое, что:

1) mb для каждого $b \in B$;

2) для ненулевых целых $z_1, \ldots, z_n$, по модулю меньших m, найдется конечное подмножество $K \subset B$ такое, что уравнение $z_1 x_1 + \ldots + z_n x_n = 0$ во множестве $B \setminus K$ не имеет главных решений.

Лемма 2. *Бесконечное подмножество $B \subset A$ почти независимо тогда и только тогда, когда оно либо почти независимо 1-го рода, либо имеется сдвиг почти независимого подмножества 2-го рода, причем эти две возможности взаимоисключающиеся.*

Доказательство. Пусть B почти независимо. Тогда имеет место одна из двух возможностей:

1) для любых ненулевых целых $z_1, \ldots, z_n$ и элемента $a \in A$ найдется конечное подмножество $K \subset B$ такое, что уравнение $z_1 x_1 + \ldots + z_n x_n = 0$ во множестве $B \setminus K$ не имеет главных решений;

2) существуют ненулевые целые $z_1, \ldots, z_n$ и элемент $a \in A$ такие, что уравнение $z_1 x_1 + \ldots + z_n x_n = 0$ является тождеством на B.

В 1-м случае B почти независимо 1-го рода. Предположим, что имеет место 2-й случай. Зафиксируем произвольные $b_2, \ldots, b_n \in B$. Тогда $z_1 b = a - z_2 b_2 - \ldots - z_n b_n$ для каждого $b \in B$. Пусть m — наименьшее натуральное число со свойством: существует элемент $a_m \in A$ такой, что $mb = a_m$ для каждого $b \in B$. Возьмем произвольный элемент $b_0 \in B$ и рассмотрим множество $B_0 = B - b_0$. Ясно, что $mc = 0$ для каждого $c \in B_0$. Покажем, что для любых ненулевых целых $z_1', \ldots, z_n'$, по модулю меньших m, найдется подмножество $K \subset B_0$ такое, что уравнение $z_1' x_1 + \ldots + z_n' x_n = 0$ во множестве $B_0 \setminus K$ не имеет главных решений. Действительно, так как B почти независимо, почти независимым будет и B_0. Следовательно, если такого конечного подмножества K не существует, то уравнение $z_1' x_1 + \ldots + z_n' x_n = 0$ является тождеством на B_0. Зафиксируем произвольные $b_2', \ldots, b_n' \in B_0$. Тогда $z_1' b = z_1' b_0 - z_2' b_2' - \ldots - z_n' b_n'$ для каждого $b \in B$ вопреки минимальности m. Следовательно, множество $B_0 = B - b_0$ почти независимо 2-го рода.

Обратно, пусть множество B почти независимо 1-го рода. Рассмотрим произвольное уравнение над A: $z_1 x_1 + \ldots + z_n x_n = a$, где $a \in A$, z_i — ненулевые целые. Покажем, что существует конечное подмножество $K \subset B$ такое, что рассматриваемое уравнение во множестве $B \setminus K$ не имеет главных решений. Действительно, если бы это было не так, то для любого конечного подмножества $K \subset B$ уравнение

$$z_1 x_1 + \ldots + z_n x_n - z_1 y_1 - \ldots - z_n y_n = 0$$

во множестве $B \setminus K$ имело бы главные решения вопреки почти независимости 1-го рода множества B.

Пусть $B = B_0 + b_0$, где B_0 — почти независимое множество 2-го рода, почти все элементы имеют порядок m (а порядки остальных элементов делят m), $z_1 x_1 + \ldots + z_n x_n = a$ — произвольное уравнение над A, z_i' — остатки от деления z_i на m. Тогда

$$z_1(b_1 + b_0) + \ldots + z_n(b_n + b_0) = (z_1' b_1 + \ldots + z_n' b_n) + (z_1 + \ldots + z_n) b_0$$

для любых $b_1, \ldots, b_n \in B_0$. Предположим, что для любого конечного подмножества $K \subset B$ уравнение $z_1 x_1 + \ldots + z_n x_n = a$ во множестве $B \setminus K$ имеет главные решения. Тогда для любого конечного подмножества $K \subset B_0$ уравнение

$$z_1'x_1 + \ldots + z_n'x_n - z_1'y_1 - \ldots - z_n'y_n = 0$$

во множестве $B_0 \backslash K$ имеет главные решения. Но тогда все $z_1' = 0$ и, следовательно, уравнение $z_1 x_1 + \ldots + z_n x_n = a$ будет тождеством на B.

Теорема 3. *Каждая бесконечная абелева группа содержит равномощное ей топологически свободное подмножество.*

Доказательство. Если бесконечная абелева группа A несчетна, то она содержит равномощное независимое подмножество B, которое по теореме Маркова будет топологически свободным в подгруппе $\langle B \rangle$, а следовательно, и в A. Рассмотрим случай, когда A счетна. Так как каждая бесконечная абелева группа содержит в качестве подгруппы либо $\mathbb{Z}$, либо $\mathbb{C}_{p^\infty}$, либо $\underset{p \in P}{\otimes} \mathbb{C}_p$, либо $\underset{\aleph_0}{\otimes} \mathbb{C}_p$, где p — простое число, $\mathbb{C}_p$ — циклическая группа порядка p, $\mathbb{C}_{p^\infty}$ — квазициклическая p-группа, P — бесконечное множество простых чисел, то достаточно найти бесконечное топологически свободное подмножество B в каждой из перечисленных групп. С учетом теоремы 2 и леммы 2 в качестве B для $\mathbb{Z}$ можно взять, например, бесконечное множество натуральных чисел a_n таких, что $a_{n+1}/a_n \to \infty$. Для $\mathbb{C}_{p^\infty}$ в качестве B можно взять бесконечное множество элементов порядков p^{a_n} таких, что $a_{n+1}/a_n \to \infty$. Для групп $\underset{p \in P}{\otimes} \mathbb{C}_p$ и $\underset{\aleph_0}{\otimes} \mathbb{C}_p$ в качестве B можно взять бесконечное множество последовательностей $e_n = (e_{n1}, e_{n2}, \ldots)$ таких, что

$$e_{ni} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = n, \\ 0, & \text{если } i \neq n. \end{cases}$$

Возникает вопрос, можно ли усилить теорему 3?

Вопрос 2. Пусть B — бесконечное топологически свободное подмножество из $\mathbb{Z}$. Верно ли, что для произвольной регулярной топологии τ на B группа $(\mathbb{Z}, \langle \tau \rangle)$ непрерывно и изоморфно вкладывается в тор $\mathbb{T}$?

Теорема 4. *Счетная абелева группа A содержит бесконечное топологически свободное подмножество, алгебраически порождающее ее, тогда и только тогда, когда имеет место по крайней мере одна из двух возможностей:*

1) *порядки элементов A неограничены в совокупности;*

2) *A имеет ограниченный период, и каждая примарная компонента A либо бесконечна, либо конечна и циклична.*

Доказательство. Рассмотрим вначале случай, когда порядки элементов A неограничены в совокупности. Пусть $g_1, g_2, \ldots$ — пересчет ненулевых элементов A, $k_1, k_2, \ldots$ — пересчет всех конечных упорядоченных последовательностей $k = (z_1, \ldots, z_m)$ ненулевых целых чисел. Нам нужно построить в A почти независимое подмножество $B = \{a_1, a_2, \ldots\}$ (1-го рода), которое алгебраически порождает A.

Рассмотрим конечную последовательность $k = (z_1, \ldots, z_m)$. Если $m > 2$, то различные элементы $a_1, \ldots, a_{m-2}$ выбираем произвольно. Элементы же a_{m-1}, a_m будем выбирать так, чтобы удовлетворяли условиям $z_1 a_{i_1} + \ldots + z_m a_{i_m} \neq 0$, где m-ка $(i_1, \ldots, i_m)$ пробегает все перестановки чисел $1, \ldots, m$, причем подгруппа, порожденная a_{m-1}, a_m, должна содержать g_1. Для последнего достаточно, чтобы a_{m-1}, a_m имели вид a, $g_1 + ra$, где $a \in A$, $r \in \mathbb{Z}$. Выберем в роли r достаточно большое число. Тогда далее необходимо найти a как решение конечной системы неравенств над A вида $zx \neq g$, где z — ненулевое целое, $g \in A$. Так как A имеет элементы как угодно большого порядка, такая система разрешима. Если $m \leq 2$, то сразу начинаем с нужного нам выбора элементов a_1, a_2.

Далее мы выбираем a_{m+1}, a_{m+2} с учетом выбора элемента k_1 и т. д.

Рассмотрим теперь случай, когда A имеет ограниченный период. При этом каждое бесконечное почти независимое подмножество A — сдвиг почти независимого подмножества 2-го рода. Заметим, что каждое почти независимое подмножество 2-го рода алгебраически порождает подгруппу вида $\underset{\aleph_0}{\otimes} \mathbb{C}_m$. Следовательно, каждое бесконечное почти независимое подмножество A алгебраически порождает подгруппу вида либо $\underset{\aleph_0}{\oplus} \mathbb{C}_m$, либо $\mathbb{C}_n \oplus \underset{\aleph_0}{\oplus} \mathbb{C}_m$, где числа m, n взаимно просты. С другой стороны, каждая из таких групп содержит почти независимое подмножество, которое ее алгебраически порождает. В первом случае можно взять просто базис, а во втором — сдвиг базиса второго слагаемого на образующий первого. Осталось заметить, что группы указанного вида — это в точности счетные абелевы группы ограниченного периода, каждая примарная компонента которых либо бесконечна, либо конечна и циклична.

Следствие. *Каждая счетная абелева группа содержит бесконечное топологически свободное подмножество, алгебраически порождающее в ней подгруппу конечного индекса.*

Замечание. На несчетные абелевы группы данное следствие не распространяется. В группе $\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} \underset{\aleph_1}{\oplus} \mathbb{C}_n$ каждое почти независимое подмножество алгебраически порождает подгруппу индекса $\aleph_1$. Но из доказательства теоремы 2 видно, что почти независимым будет каждое топологически свободное подмножество произвольной (не обязательно счетной) алгебры.

5. Топологически свободные подмножества в полях. Пусть A — произвольное бесконечное поле.

Лемма 3. *Бесконечное подмножество $B \subset A$ почти независимо тогда и только тогда, когда для любого ненулевого многочлена $f(x_1, \ldots, x_n)$ над A найдется конечное подмножество $K \subset B$ такое, что уравнение $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ во множестве $B \setminus K$ не имеет главных решений.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольный ненулевой многочлен над A. Так как он ненулевой, существует конечное подмножество $K_1 \subset A$ такое, что для любого $a \in A \setminus K_1$ многочлен $\tilde{f}(x_2, \ldots, x_n) = f(a, x_2, \ldots, x_n)$ будет ненулевым. Возьмем любое $a_1 \in B \setminus K_1$ и рассмотрим многочлен $f_1(x_2, \ldots, x_n) = f(a_1, x_2, \ldots, x_n)$. Поскольку он ненулевой, существует конечное подмножество $K_2 \subset A$ такое, что для любого $a \in A \setminus K_2$ многочлен $\tilde{f}_1(x_3, \ldots, x_n) = f_1(a, x_3, \ldots, x_n)$ будет ненулевым. Аналогично найдем n-ку $(a_1, \ldots, a_n)$ элементов из B, которая не является решением уравнения $f(x_1, \ldots \ldots, x_n)$. Следовательно, так как B почти независимо, найдется конечное подмножество $K \subset B$ такое, что уравнение $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ во множестве $B \setminus K$ не имеет главных решений.

Достаточность. Рассмотрим произвольное нетривиальное решение над A. Оно имеет вид

$$\frac{f(x_1,\ldots,x_n)}{g(y_1,\ldots,y_m)} = 0 \tag{1}$$

(не исключено, что некоторое x_i равно некоторому y_j). Пусть K_1 — конечное подмножество из B такое, что уравнение $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ во множестве $B \setminus K_1$ не имеет главных решений, K_2 — аналогичное подмножество для уравнения $g(y_1, \ldots, y_m) = 0$, $K = K_1 \cup K_2$. Тогда уравнение (1) во множестве $B \setminus K$ не имеет главных решений. Следовательно, B почти независимо.

Теорема 5. *Каждое счетное поле содержит бесконечное топологически свободное подмножество. Несчетных топологически свободных подмножеств в полях не существует.*

Доказательство. Отсутствие несчетных топологически свободных подмножеств в полях следует из того, что в топологическом поле каждое компактное подпространство метризуемо [6]. Докажем, что в произвольном счетном поле A существует бесконечное топологически свободное подмножество. Для этого согласно теореме 2 и лемме 3 достаточно построить такое бесконечное подмножество $B \subset A$, что для любого ненулевого многочлена $f(x_1, \ldots, x_n)$ над A найдется конечное подмножество $K \subset B$ такое, что уравнение $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ во множестве $B \setminus K$ не имеет главных решений.

Пусть f_1, f_2 — пересчет всех ненулевых многочленов над A. Рассмотрим многочлен $f_1 = f(x_1, \ldots, x_n)$. Существует конечное подмножество $K_1 \subset A$ такое, что для любого $a \in A \setminus K_1$ каждый многочлен, получающийся из $f(x_1, \ldots, x_n)$ заменой какой-либо одной переменной на a, будет ненулевым. Возьмем любое $a_1 \in A \setminus K_1$. Далее, существует конечное подмножество $K_2 \subset A$ такое, что для любого $a \in A \setminus K_2$ каждый многочлен, получающийся из $f(x_1, \ldots, x_n)$ заменой какой-либо одной переменной на a_1 и какой-либо другой переменной на a, будет ненулевым.

Возьмем произвольное $a_2 \in A \setminus K_2$, отличное от a_1, и т. д. В результате мы построим n-ку $(a_1, \ldots, a_n)$ различных элементов из A, любая перестановка которой не является решением уравнения $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Далее аналогично выбираются $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$, но уже с постепенным учетом и остальных многочленов $f_2, f_3, \ldots$.

Возникает вопрос о возможностях уточнения теоремы 5.

***Вопрос* 3.** Верно ли, что каждое счетное кольцо содержит бесконечное топологически свободное подмножество?

Теорема 6. *Каждое счетное поле A содержит бесконечное топологически свободное подмножество B, которое и аддитивно, и мультипликативно порождает A, т. е. $\langle B : +\rangle = \langle B : *\rangle = A$.*

Доказательство. Пусть $g_1, g_2, \ldots$ — пересчет всех ненулевых элементов A, $f_1, f_2, \ldots$ — пересчет ненулевых многочленов над A. Достаточно построить последовательность $a_1, a_2, \ldots$ различных элементов A и последовательность номеров $1 = n_1 < n_2 < \ldots$ таких, что:

1) каждый многочлен f_i не имеет главных корней во множестве $\{a_{n_i}, \ldots, a_{n_i+1}, \ldots\}$;

2) $g_i \in \langle a_1, \ldots, a_{n_{i+1}-1} : +\rangle \cap \langle a_1, \ldots, a_{n_{i+1}-1} : *\rangle$.

Предположим, что уже построены последовательность $a_1, \ldots, a_n$ различных элементов A и последовательность номеров $1 = n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n$ такие, что каждый многочлен f_i, $i = 1 \ldots, k$, не имеет главных корней во множестве $\{a_{n_i}, a_{n_i+1}, \ldots, a_n\}$. Выберем новые различные элементы $a_{n+1}, \ldots$ $\ldots, a_{n+m} \in A$ такие, что $a_{n+j} \notin \langle a_1, \ldots, a_{n+j-1} : +\rangle$ и каждый многочлен f_i, $i = 1 \ldots, k$, не имеет главных корней во множестве $\{a_{n_i}, \ldots, a_{n_i+1}, \ldots, a_{n+m}\}$. Пусть K_m — множестве всех корней многочленов от одной переменной, получающихся из многочленов f_i заменой всех переменных за исключением одной на различные элементы из множества $\{a_{n_i}, \ldots, a_{n_i+1}, \ldots, a_{n+m}\}$. Тогда

$$|K_m| \le \sum_{i=1}^{k} \binom{n+m-n_i+1}{t_i-1}(t_i-1)!s_i,$$

где t_i — количество переменных в f_i, s_i — степень f_i,

$$|\langle a_1, \ldots, a_{n+m} : +\rangle| \ge |\langle a_1, \ldots, a_n : +\rangle| 2^m.$$

Следовательно, для достаточно большого m в подгруппе $\langle a_1, \ldots, a_{n+m} : +\rangle$ существует элемент a такой, что

$$a + g_k \notin K_m \cup \{a_1, \ldots, a_{n+m}\}.$$

Положим $a_{n+m+1} = a + g_k$. Тогда каждый многочлен f_i не будет иметь главных корней во множестве $\{a_{n_i}, a_{n_i+1}, \ldots, a_{n+m+1}\}$ и $g_k \in \langle a_1, \ldots, a_{n+m+1} : +\rangle$. Далее аналогично выбираем новые различные элементы $a_{n+m+2}, \ldots, a_r$ такие, что каждый многочлен f_i не имеет главных корней во множестве $\{a_{n_i}, a_{n_i+1}, \ldots, a_r\}$ и $g_k \in \langle a_1, \ldots, a_r : *\rangle$. Затем вводим в рассмотрение многочлен f_{k+1} и выбираем новые различные элементы $a_{r+1} = a_{n_{k+1}}, a_{r+2}, \ldots$ и т. д.

1. *Марков А. А.* О свободных топологических группах // Докл. АН СССР. – 1941. – **31**, № 4. – С. 299–301.
2. *Марков А. А.* О свободных топологических группах // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1945. – № 9. – С. 3–64.
3. *Мальцев А. И.* Свободные топологические группы // Там же. – 1957. – № 2. – С. 171–198.
4. *Чобан М. М., Думитрашку С. С.* Об универсальных алгебрах с непрерывной сигнатурой // Успехи мат. наук. – 1981. – **36**, № 5. – С. 201–202.
5. *Зеленюк Е. Г., Протасов И. В.* Топологии на абелевых группах // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1990. – № 5. – С. 1090–1107.
6. *Шахматов Д. Б.* Вложения в топологические поля и построение поля, пространство которого не нормально // Comment. Math. Univ. Carolinae. – 1983. – **24**, № 3. – P. 525–540.

Получено 24.01.96