УДК 519. 41/97

Ф. Н. Лиман (Сум. пед. ин-т)

О БЕСКОНЕЧНЫХ ГРУППАХ, НЕЦИКЛИЧЕСКАЯ НОРМА КОТОРЫХ ИМЕЕТ КОНЕЧНЫЙ ИНДЕКС

We study groups in which the intersection of normalizers of all noncyclic subgroups (noncyclic norm) has a finite index. We prove that if the noncyclic norm of an infinite noncyclic group is locally graded and has a finite index in the group, then this group is central-by-finite and its noncyclic norm is a Dedekind group.

Вивчаються групи, в яких перетин нормалізаторів всіх нециклічних підгруп (нециклічна норма) має скінченний індекс. Доведено, що нескінченна нециклічна группа скінченна над центром, а її нециклічна норма — дедекіндова група, якщо ця норма локально ступінчаста і має в групі скінченний індекс.

1. Пусть G — группа, H — ее подгруппа, Σ — некоторая непустая система подгрупп группы G. Если подгруппа H содержится в нормализаторе каждой подгруппы системы Σ, то будем говорить, что H нормализует систему подгрупп Σ.

Максимальной среди подгрупп, нормализующих данную систему подгрупп Σ, является пересечение $N(\Sigma)$ нормализаторов всех подгрупп системы Σ. Подгруппу $N(\Sigma)$ назовем Σ-нормой группы G. В случае, когда Σ состоит из всех подгрупп группы, Σ-норму кратко будем называть нормой группы.

Понятие нормы группы введено Р. Бэром [1]. Норма изучалась различными авторами и обобщена В. Каппе [2] на случай A-нормы группы, когда систему подгрупп Σ составляют все максимальные абелевы подгруппы группы [3, с. 443].

В [4] введено еще одно обобщение понятия нормы — понятие нециклической нормы. Так будем называть Σ-норму группы при условии, что система подгрупп Σ состоит из всех нециклических подгрупп группы. Очевидно, что понятие нециклической нормы является содержательным для нециклических групп.

Определенные ограничения на нециклическую норму существенно влияют на свойства как этой нормы, так и всей группы. В данной статье изучаются такие бесконечные нециклические группы, в которых нециклическая норма локально ступенчата и имеет конечный индекс в группе. Первое из указанных ограничений объясняется существованием бесконечных групп, у которых каждая нетривиальная подгруппа имеет простой порядок [5].

Нециклическую норму группы G будем обозначать через N_G. Очевидно, что подгруппа N_G характеристическая в группе G и каждая нециклическая подгруппа из N_G нормальна в N_G.

Если $N_G = G$, то в группе G нормальны все нециклические подгруппы. Такие группы изучались автором в [6, 7] и названы $\overline{H}$-группами. Изучим более общую ситуацию, когда подгруппа N_G, нормализующая любую нециклическую подгруппу группы G, имеет в G конечный индекс. К этому классу групп принадлежат нециклические группы, являющиеся конечными расширениями своих центров. Оказывается, что такими расширениями исчерпываются все группы, нециклическая норма которых локально ступенчата и имеет конечный индекс в группе.

Докажем сначала, что в этом случае нециклическая норма будет разрешимой группой. Это утверждение является прямым следствием следующей теоремы.

Теорема 1. *Локально ступенчатая $\overline{H}$-группа G разрешима.*

Доказательство. Пусть H — произвольная нетривиальная конечно порожденная подгруппа группы G. Поскольку группа G локально ступенчатая, то подгруппа H содержит собственную подгруппу конечного индекса и, далее, по теореме Пуанкаре — собственную нормальную подгруппу M конечного индекса. Если при этом фактор-группа H/M дедекиндова, то $H \neq H'$. Если же фактор-группа H/M недедекиндова, то подгруппа M циклическая, а H/M — конечная $\overline{H}$-группа, которая разрешима [6]. Следовательно, подгруппа H разрешима и $H \neq H'$. Таким образом, доказано, что произвольная нетривиальная конечно порожденная подгруппа группы G отлична от своего коммутанта. Тогда по следствию из теоремы 1 работы [8] группа G является RN-группой, т. е. имеет нормальную систему с абелевыми факторами.

Пусть $[G_\alpha]$ — такая система группы G. Рассмотрим два возможных случая.

1) Любая нетривиальная подгруппа G_α нециклическая. Тогда $G_\alpha \lhd G$ и G/G_α — дедекиндова группа. Известно, что фактор-группа по пересечению нормальных подгрупп изоморфно вкладывается в полное прямое произведение фактор-групп по каждому члену пересечения. Таким образом,

$$G/\bigcap_\alpha G_\alpha \to \prod_\alpha (G/G_\alpha),$$

где $\bigcap\limits_\alpha G_\alpha$ — пересечение всех отличных от единицы членов нормальной системы $[G_\alpha]$.

Если $\bigcap\limits_\alpha G_\alpha = E$, то $G/\bigcap\limits_\alpha G_\alpha \simeq G$, и потому группа G разрешима. Если $\bigcap\limits_\alpha G_\alpha = G_\beta \neq E$, то по условию подгруппа G_β нециклическая и с единичной подгруппой E составляет скачок в нормальной системе $[G_\alpha]$. Поэтому G_β — абелева нециклическая подгруппа, G/G_β — дедекиндова группа и группа G разрешима.

2) Среди нетривиальных подгрупп системы $[G_\alpha]$ есть циклические подгруппы. Пусть G_{β_1} — одна из них. Обозначим через G_β объединение возрастающей последовательности циклических подгрупп G_{β_i} из нормальной системы $[G_\alpha]$, содержащих G_{β_1}. Если подгруппа G_β нециклическая, то $G_\beta \lhd G$, G/G_β — дедекиндова группа и группа G разрешима. Если подгруппа G_β циклическая, то

$$G_\beta \subseteq G_{\gamma_0} = \bigcap_{\gamma > \beta} G_\gamma,$$

где каждая подгруппа G_γ нециклическая.

Если $G_\beta \neq G_{\gamma_0}$, то подгруппы G_β и G_{γ_0} составляют скачок в системе $[G_\alpha]$. Тогда G_{γ_0}/G_β — абелева группа и G_{γ_0} — разрешимая нециклическая подгруппа. Так как $G_{\gamma_0} \lhd G$ и фактор-группа G/G_{γ_0} дедекиндова, то группа G разрешима.

Пусть $G_\beta = G_{\gamma_0}$. Тогда разрешимость группы G следует из вложимости

$$G/G_{\gamma_0} \to \prod_{\gamma > \beta} (G/G_\gamma),$$

так как в этом случае подгруппа G_{γ_0} циклическая, а фактор-группы G/G_γ дедекиндовы для всех $\gamma > \beta$. Теорема доказана.

Теорема 2. *В группе G нециклическая норма локально ступенчата и имеет конечный индекс тогда и только тогда, когда группа G нециклическая и конечна над центром.*

Доказательство. Достаточность условий теоремы очевидна. Докажем их необходимость. Пусть группа G бесконечна, ее циклическая норма N_G локально ступенчата и имеет в группе G конечный индекс. Тогда по теореме 1 подгруппа N_G разрешима и в соответствии с описанием $\overline{H}$-групп в [6, 7] конечна над центром $A = Z(N_G)$. Таким образом, $[G:A] < \infty$ и $G = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle A$.

Если $N_G = G$, то теорема доказана. Поэтому предположим, что $N_G \neq G$ и рассмотрим сначала случай, когда $G = \langle g \rangle A$. Так как $A \subseteq N_G$, то в G нормальна любая нециклическая подгруппа, содержащая элемент g. Пусть H — нормальное замыкание подгруппы $\langle g \rangle$, а B — произвольная конечно порожденная нециклическая подгруппа, содержащая элемент g. Тогда $H \lhd G$, $B \lhd G$, $H \subseteq B$. Так как

$$[B : A \cap B] \leq [G : A] < \infty,$$

то $A \cap B = B_1$ — конечно порожденная абелева подгруппа конечного индекса в B. Так как $A \cap H = H_1 \subseteq B_1$, то H_1 — тоже конечно порожденная абелева подгруппа и $H = \langle g \rangle H_1$.

Пусть подгруппа H_1 конечна. Тогда конечно порожденная группа H содержит циклическую центральную подгруппу конечного индекса. Известно, что группа автоморфизмов такой группы конечна (см. [9] или [3, с. 441]). Следовательно,

$$[G : C_G(H)] < \infty, \quad C_G(H) \cap A \subseteq Z(G), \quad [G : Z(G)] < \infty.$$

Пусть теперь подгруппа H_1 бесконечна. Если для любого натурального числа n подгруппа $\langle g \rangle H_1^n$ нециклическая, то $\langle g, H_1^n \rangle \lhd G$,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \langle g \rangle H_1^n = \langle g \rangle \lhd G.$$

Поэтому $H = \langle g \rangle$, что невозможно. Следовательно, существует такое натуральное число m, для которого $\langle g \rangle H_1^m$ — бесконечная циклическая подгруппа. Тогда конечно порожденная подгруппа H имеет в центре циклическую подгруппу конечного индекса. Поэтому ее группа автоморфизмов конечна, и снова получаем $[G : Z(G)] < \infty$. Таким образом, в случае, когда $G = \langle g \rangle A$, теорема доказана.

Пусть теперь $G = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle A$ и $n > 1$. Обозначив $G_i = \langle g_i \rangle A$, $i = 1, \ldots, n$, получим

$$[G : G_i] < \infty, \quad [G_i : Z(G_i)] < \infty, \quad [G : Z(G_i)] < \infty$$

и поэтому $[G : Z(G)] < \infty$, так как $\bigcap_{i=1}^{n} Z(G_i) \subseteq Z(G)$. Теорема доказана.

В [10] доказано, что группами, конечными над центром, исчерпываются все группы, в которых каждая подгруппа почти нормальна. Поэтому справедливо также следствие.

***Следствие* 1.** *В нециклической группе G нециклическая норма локально ступенчата и имеет конечный индекс тогда и только тогда, когда каждая подгруппа группы G почти нормальна.*

В группе, конечной над центром, любая Σ-норма имеет конечный индекс. Поэтому справедливо следующее следствие.

***Следствие* 2.** *Если в локально ступенчатой группе нециклическая норма имеет конечный индекс, то и любая ее Σ-норма имеет конечный индекс.*

2. Рассмотрим теперь некоторые вопросы, связанные со свойствами самой нециклической нормы группы при условии конечности ее индекса в группе.

***Пример* 1.** Рассмотрим группу $G = (\langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle) \times C$, где $|a| = p^2$, $|b| = p$, C — бесконечная элементарная абелева p-группа $[a, b] = a^p$, $p \neq 2$.

В этой группе $Z(G) = \langle a^p \rangle \times C$, $N_G = Z(G) \times \langle b \rangle$.

Кроме того, нециклическая норма совпадает с нормой группы G, так как элемент b перестановочный с любым элементом порядка p, а любая подгруппа, содержащая элемент порядка p^2, нормальна в G.

***Пример* 2.** *Рассмотрим группу* $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle c \rangle$, *где* $|a| = |b| = 2$, $|c| = \infty$, $c^{-1}ac = b$, $c^{-1}bc = ab$.

В этой группе $Z(G) = \langle c^3 \rangle$, $N_G = \langle a, b, c^3 \rangle$, а норма группы совпадает с $Z(G)$.

***Пример* 3.** Рассмотрим группу $G = (S \curlyvee D) \times C$, где S — группа кватернионов, D — группа диэдра порядка 8, $S \curlyvee D$ — склеивание S и D по подгруппе центра порядка 2, C — бесконечная периодическая абелева группа без элементов порядка 4.

В этой группе $N_G = S \times C$ — гамильтонова группа. Действительно, так как $|G'| = 2$ и G' содержится в любой циклической подгруппе, порядок которой кратный 4, то в G нормальны все неабелевы подгруппы, все циклические подгруппы порядка k и $4k$, где $(k, 2) = 1$. Кроме того, подгруппа S содержится в централизаторе любой инволюции. Нецентральные инволюции из D не содержатся в N_G. Значит, $N_G = S \times C$.

В примерах 1–3 нециклическая норма группы абелева или гамильтонова. Покажем, что она не может быть нетривиальной $\overline{H}$-группой в группах из рассматриваемого класса.

Теорема 3. *Нециклическая норма N_G бесконечной локально конечной группы G абелева или гамильтонова, если $1 < |G/N_G| < \infty$.*

Доказательство. Пусть G — локально конечная группа, удовлетворяющая условию $1 < |G/N_G| < \infty$. Предположим, что N_G является $\overline{H}$-группой. Тогда из описания $\overline{H}$-групп [6, 7] следует, что N_G — группа одного из следующих типов:

1) $N_G = ((A \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle c \rangle) \times \langle d \rangle$, где A — квазициклическая p-группа, $|b| = |c| = p$, $|d| = n$, $(n, p) = 1$, $[b, c] = a \in A$, $|a| = p$;

2) $N_G = A \times S \times \langle d \rangle$, где A — квазициклическая 2-группа, S — группа кватернионов и $(|d|, 2) = 1$.

Возьмем произвольный элемент $x \in G \backslash N_G$ и рассмотрим подгруппу $G_1 = \langle x \rangle N_G$. Так как группа G локально конечна, то существует конечная нециклическая нормальная в G_1 подгруппа F, содержащая элемент x. Тогда $A \subset C_{G_1}(F)$ и потому $A \subseteq Z(G)$.

Предположим сначала, что G является p-группой. Выделим два возможных случая.

а) N_G — $\overline{H}$-группа первого типа. Если $x \in G \backslash N_G$ и $|x| = p$, то для $a \in A$ и $|a| = p$ подгруппа $\langle a, x \rangle \lhd G_1$ и $[G_1 : C_{G_1}\langle a, x \rangle] \leq p$. Тогда существует элемент $h \in N_G \backslash \langle a \rangle$ порядка p и перестановочный с x. Поэтому $\langle x, h \rangle \cap \langle a, b,$

$c\rangle = \langle h \rangle \lhd G_1$, что невозможно. Значит, N_G содержит все элементы порядка p группы G.

Предполагая, что N_G содержит все элементы порядка p^{n-1}, докажем, что это утверждение верно для всех элементов группы G порядка p^n. Пусть $x \in G \backslash N_G$, $|x| = p^n$, $n > 1$. Так как $[A, x] = E$, то $\langle A, x \rangle = A \times \langle x_1 \rangle$, причем $x_1 \notin N_G$. Значит, $|x_1| \neq p$, $\langle a, x_1 \rangle \lhd G_1$ и потому $\langle x_1^p \rangle \lhd G_1$ и $x_1^p \in N_G$ по предположению. Тогда $Z(N_G)$ содержит нециклическую подгруппу порядка p^2, что невозможно. Следовательно, N_G не может быть $\overline{H}$-группой первого типа.

б) N_G — $\overline{H}$-группа второго типа. Пусть инволюция $x \in G \backslash N_G$, инволюция $a \in A$. Тогда

$$\langle a, x \rangle \lhd G_1 = \langle x \rangle N_G, \quad [G_1 : C_{G_1}\langle a, x \rangle] \leq 2.$$

Поэтому существует элемент $s \in S$ порядка 4 и перестановочный с x. Значит, для $a_2 \in A$, $|a_2| = 4$, имеем $\langle a_2 s, x \rangle \lhd G_1$. Но $S \not\subset N_{G_1}\langle a_2 s, x \rangle$. Следовательно, нециклическая норма N_G содержит все инволюции группы G. Поэтому группа G имеет только три инволюции. По теореме 2 из [11] любая бесконечная неабелева 2-группа с бесконечным центром и тремя инволюциями является прямым произведением $G = A \times Q$, где A — квазициклическая 2-группа, а Q — конечная или бесконечная кватернионная 2-группа. Поскольку согласно теореме 2 группа G является конечным расширением центра, то подгруппа Q конечна.

Пусть $Q = \langle q_1, q_2 \rangle$, где $|q_1| = 2^n$, $n > 2$, $|q_2| = 4$, $q_1^{2^{n-1}} = q_2^2$, $q_2^{-1} q_1 q_2 = q_1^{-1}$. Очевидно, $G = \langle q_1 \rangle N_G$. Возьмем $a_n \in A$ и $|a_n| = 2^n$. Тогда $\langle a_n, q_1, a \rangle \lhd G_1$. Но $[a_n q_1, q_2] = q_1^{-2} \notin \langle a_n q_1, q_2 \rangle$. Значит, $|Q| = 8$ и G является $\overline{H}$-группой, что противоречит условию теоремы.

Пусть теперь G не является p-группой. Обозначим через $G_{p'}$ силовскую p'-подгруппу группы G, а через $(N_G)_p$ — силовскую p-подгруппу ее нециклической нормы N_G. Пусть, далее, y — произвольный элемент порядка p из N_G в случае, когда N_G является $\overline{H}$-группой первого типа, и $y = a_2 s$, где $|a_2| = |s| = 4$, $a_2 \in A$, $s \in S$, в случае, когда N_G является $\overline{H}$-группой второго типа. Для любого p'-элемента $x \in G$ из условия $[A, x] = E$ следует $\langle x \rangle \lhd \langle x \rangle N_G$. Поэтому $[G_{p'}, (N_G)_p] = E$. Если $G_{p'}$ нециклическая, то $\langle y, G_{p'} \rangle \lhd (G_{p'} \times (N_G)_p)$ и поэтому $\langle y \rangle \lhd (N_G)_p$, что невозможно. Значит, $G_{p'}$ — циклическая подгруппа и G является $\overline{H}$-группой, что противоречит условию теоремы. Теорема доказана.

Теорема 4. *Нециклическая норма N_G почти локально разрешимой непериодической группы G абелева, если $1 < |G/N_G| < \infty$.*

Доказательство. Пусть группа G удовлетворяет условию теоремы, но ее нециклическая норма N_G является $\overline{H}$-группой. Тогда из описания непериодических $\overline{H}$-групп [6] следует, что N_G — группа одного из типов: 1) $N_G = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$, где $|a| = p^n$ ($n > 1$ при $p = 2$), $|b| = \infty$, $[a, b] = a_1$, $|a_1| = p$; 2) $N_G = S \times \langle b \rangle$, где S — группа кватернионов, $|b| = \infty$; 3) $N_G = S \times B$, где S — группа кватернионов, B — группа, изоморфная аддитивной группе 2-ичных дробей.

Так как $|G/Z(G)| < \infty$ и $Z(G) \subset N_G$, то G является конечным расширением подгруппы Z_1 центра $Z(G)$, причем Z_1 — циклическая в случаях 1 и 2 и изоморфная аддитивной группе 2-ичных дробей в случае 3. Тогда коммутант группы G конечен, ее периодическая часть $T(G)$ является конечной подгруппой и $G/T(G)$ локально циклическая группа.

Покажем, что $T(G)$ имеет единственную подгруппу простого порядка. Пусть $c \in T(G)$, $|c| = q$, — простое число и $c \notin N_G$. Рассмотрим подгруппу $G_1 = \langle c \rangle N_G$. Для любого натурального числа k имеем $\left\langle c, Z_1^{3^k} \right\rangle \lhd G_1$. Поэтому $\bigcap_{k=1}^{\infty} \left\langle c, Z_1^{3^k} \right\rangle = \langle c \rangle \lhd G_1$.

Так как периодическая часть $T(N_G)$ подгруппы N_G нормальна в G, то $\langle c \rangle \times T(N_G) = T(G_1)$.

Возьмем теперь произвольную подгруппу F из G_1, содержащую элемент c. Если она циклическая, то $F \lhd G_1$ по доказанному с учетом строения $T(G_1)$. Если F — нециклическая подгруппа, то $F \lhd G_1$ по определяющему условию нециклической нормы N_G.

Значит, в группе $G_1/\langle c \rangle$ нормальны все подгруппы и потому она абелева, что невозможно. Этим доказано, что $T(G)$ имеет единственную подгруппу простого порядка и потому является либо циклической p-группой, либо кватернионной 2-группой.

Пусть $T(G)$ — кватернионная 2-группа:

$$T(G) = \langle h_1, h_2 \rangle, \quad |h_1| = 2^m, \quad |h_2| = 4, \quad h_1^{2^{m-1}} = h_2^2, \quad h_2^{-1} h_1 h_2 = h_1^{-1}.$$

Легко показать (см. выше рассуждения для элемента c), что

$$\langle h_1 \rangle \lhd \langle h_1 \rangle N_G, \quad \langle h_1 h_2 \rangle \lhd \langle h_1 h_2 \rangle N_G = \langle h_1 \rangle N_G.$$

Поэтому $h_1^{-1}(h_1 h_2) h_1 = (h_1 h_2)^{-1}$.

С другой стороны, $h_1^{-1}(h_1 h_2) h_1 = h_2 h_1$. Поэтому $(h_1 h_2)^{-1} = h_2 h_1'$, $h_2^{-2} = h_1^2$, $h_1^4 = 1$. Следовательно, $T(G)$ — группа кватернионов, если она кватернионная 2-группа.

Далее рассмотрим каждый из трех случаев:

а) Нециклическая норма N_G является $\overline{H}$-группой первого типа. Тогда $G = T(G) \leftthreetimes \langle x \rangle$, $|x| = \infty$.

Пусть $T(G) = \langle g \rangle \neq \langle a \rangle$, $|g| = p^t > |a|$. Возьмем $z \in Z(G)$ и $|z| = \infty$. Тогда

$$[b, gz] = [b, g] \in \left(\left\langle g^{p^{t-1}}, gz \right\rangle \cap \langle g \rangle \right) = \left\langle g^{p^{t-1}} \right\rangle.$$

Поэтому $[b, g^p] = 1$ и, далее, $[b, a] = 1$, что невозможно по условию. Значит, $\langle g \rangle = \langle a \rangle$. Так как

$$[a, x] \in \left(\langle a \rangle \cap \left\langle a^{p^{n-1}}, x \right\rangle \right) = \left\langle a^{p^{n-1}} \right\rangle,$$

то коммутант группы G имеет порядок p и в G нормальны все нециклические подгруппы, что невозможно по условию теоремы.

Предположим теперь, что $T(G)$ — группа кватернионов. Тогда $|a| = 4$ и a можно считать одним из образующих элементов подгруппы $T(G)$.

Пусть $T(G) = \langle a, h \rangle$. Так как $\langle a \rangle \lhd G$, то либо $[a, x] = 1$, либо $[a, xh] = 1$. Обозначим через x_1 тот из элементов x или xh, который перестановочен с элементом a. Тогда $G = \langle a, h \rangle \leftthreetimes \langle x_1 \rangle$, $[x_1, a] = 1$. Следовательно, образующий элемент $b \in N_G$ может быть записан через образующие элементы группы G в общем виде $b = x_1^k a^l h^m$, причем $m \not\equiv o(\mathrm{mod}\,2)$, так как $[a, b^2] = a^2$.

Возьмем подгруппу $\langle a^2, x_1 \rangle$. Тогда

$$[b, x_1] = \left[x_1^k a^l h^m, x_1\right] = [h^m, x_1] \in \left(\langle a^2, x_1 \rangle \cap \langle a, h \rangle\right) = \langle a^2 \rangle.$$

Значит, $[h, x_1] \in \langle a^2 \rangle$. Поэтому коммутант группы G имеет порядок 2 и в G нормальны все нециклические подгруппы, что невозможно по условию теоремы. Следовательно, N_G не может быть $\overline{H}$-группой первого типа.

б) Пусть N_G является $\overline{H}$-группой второго типа. Тогда $G = S \leftthreetimes \langle x \rangle$, где $S \subset N_G$, и является группой кватернионов. Так как $[S, x] \subseteq \left(S \cap \left(S^2 \times \langle x \rangle\right)\right) = S^2$, то коммутант группы G имеет порядок 2 и в G нормальны все нециклические подгруппы, что невозможно по условию теоремы. Следовательно, N_G не может быть $\overline{H}$-группой второго типа.

в) Пусть N_G является $\overline{H}$-группой типа 3. Так как фактор-группа G/N_G конечна, а G/S — локально циклическая группа и $G/N_G \simeq G/S/N_G/S$, то G/N_G — циклическая группа. Тогда $G = \langle g \rangle N_G$ для некоторого элемента $g \in G$.

Покажем, что $B \subset Z(G)$. Предположим, что $[b, g] \neq 1$ для некоторого элемента $b \in B$. При этом $\langle g \rangle \cap B = E$. В самом деле, в противном случае $g^k = b^m$ для некоторых целых отличных от нуля чисел k и m. Тогда $g^{-1} b g = b_1 \neq b$ и $g^{-1} b^m g = b^m = b_1^m$. Отсюда $b_1 = b$, что невозможно. Так как $\langle B^{p^n}, g \rangle \lhd \langle g \rangle N_G$ для простого числа $p \neq 2$ и любого натурального числа n, то

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \langle B^{p^n}, g \rangle = \langle g \rangle \lhd \langle g \rangle N_G.$$

Отсюда $[b, g] \in (B \cap \langle g \rangle) = E$, что противоречит выбору элементов b и g. Таким образом, $B \subset Z(G)$ и $B\langle g \rangle$ — абелева группа, периодическая часть которой либо равна единице, либо имеет нециклическое дополнение B_1. Так как $S \subset N_G$ и $S \lhd G$, то $[S, B] = E$ и $G = S \times B_1$. Поскольку B_1/B — конечная циклическая группа, то B_1 имеет тот же тип, что и подгруппа B, и потому B и B_1 изоморфны. Это означает, что G является $\overline{H}$-группой, что противоречит условию теоремы. Значит, нециклическая норма N_G не может быть $\overline{H}$-группой типа 3. Теорема доказана.

1. *Baer R.* Der Kern, eine charakteristische Unter-gruppe // Comp. Math. – 1934. – **1.** – S. 254–283.
2. *Kappe W.* Die *A*-norm einer gruppe // Ill. J. Math. – 1961. – **5**, No. 2. – S. 187–197.
3. *Курош А. Г.* Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
4. *Лиман Ф. Н.* О бесконечных группах, нециклическая норма которых имеет конечный индекс // III Междунар. конф. по алгебре (Памяти М. И. Каргаполова): Тез. докл. – Красноярск, 1993. – С. 207.
5. *Ольшанский А. Ю.* Бесконечная группа с подгруппами простых порядков // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1980. – **44**, № 2. – С. 309–321.
6. *Лиман Ф. М.* Групи з інваріантними нециклічними підгрупами // Допов. АН УРСР. – 1967. – № 12. – С. 1073–1075.
7. *Лиман Ф. Н.* 2-группы с инвариантными нециклическими подгруппами // Мат. заметки. – 1968. – **4**, № 1. – С. 75–83.
8. *Бродский С. Д.* О некоторых классах Куроша–Черникова // XVI Всесоюз. алгебраич. конференция. Тез. сообщ. – Ленинград, 1981. – Ч. 2. – С. 19.
9. *Alperin J. L.* Groups with finitely many automorphisms // Pasif. J. Math. – 1962. – **12.** – P. 1–5.
10. *Newman B. H.* Groups with finite classes of conjugate subgroups // Math. Z. – 1955. – **63**, No. 1. – P. 76–96.
11. *Лиман Ф. Н.* Бесконечные *p*-группы, содержащие точно p^2 решений уравнения $x^p = 1$ // Мат. заметки. – 1976. – **20**, № 1. – С. 11–18.

Получено 19.06.95