УДК 517.9

Р. І. Петришин, О. М. Похила (Чернівец. ун-т)

ОЦІНКА ПОХИБКИ МЕТОДУ УСЕРЕДНЕННЯ НА ПІВОСІ ДЛЯ БАГАТОЧАСТОТНОЇ РЕЗОНАНСНОЇ СИСТЕМИ

In this paper, we justify the averaging method for a multifrequency resonance system on a semiaxis under the assumption that the normal fundamental matrix of the variational system of averaged equations for slow variables exponentially tends to zero. We also study the quantitative dependence of the estimates on the magnitude of a small parameter.

Обгрунтовано метод усереднення для багаточастотної резонансної системи на півосі в припущенні, що нормальна фундаментальна матриця системи в варіаціях усереднених рівнянь для повільних змінних експоненціально прямує до нуля. Вивчено також кількісну залежність оцінок від величини малого параметра.

Метод усереднення виявився одним із найбільш плідних методів дослідження властивостей розв'язків диференціальних рівнянь як на скінченному, так і на нескінченному часових інтервалах [1–3]. Суть цього методу полягає в заміні досліджуваних рівнянь простішими, які називаються усередненими. При цьому природним чином виникає задача одержання ефективних оцінок норми різниці розв'язків вихідних і усереднених рівнянь і вивчення залежності оцінок від величини малого параметра [2, 4–7].

Нехай задана багаточастотна нелінійна система звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= a(x, \tau, \varepsilon) + \varepsilon A(x, \varphi, \tau, \varepsilon), \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{\omega(x, \tau, \varepsilon)}{\varepsilon} + B(x, \varphi, \tau, \varepsilon), \end{aligned} \tag{1}$$

права частина якої визначена при $(x, \varphi, \tau, \varepsilon) \in D \times R^m \times [0, \infty) \times (0, \varepsilon_0] \equiv G$, де $D \subset R^n$ — обмежена область, ε_0 — мале додатне число, R^j при $j = n,\ m$ — j-вимірний дійсний евклідовий простір, $m \geq 2$. До рівнянь вигляду (1) приводять багаточисельні задачі класичної і небесної механіки, радіоелектроніки та ін. [1, 2], яким властиве явище резонансу.

Будемо вважати, що a, A, ω і B $p \geq m$ разів неперервно диференційовні відносно (x, φ, τ) при кожному фіксованому $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ і всі їх частинні похідні рівномірно обмежені сталою c_1, незалежною від ε. Припустимо також, що A і B належать класу майже періодичних за кожною із змінних φ_ν, $\nu = 1, \ldots, m$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, функцій

$$A(x, \varphi, \tau, \varepsilon) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu(x, \tau, \varepsilon) e^{i(\lambda_\nu, \varphi)},$$

$$B(x, \varphi, \tau, \varepsilon) = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x, \tau, \varepsilon) e^{i(\lambda_\nu, \varphi)},$$

$\lambda_0 = 0$, $\lambda_\nu = \left(\lambda_\nu^{(1)}, \ldots, \lambda_\nu^{(m)}\right) \neq 0$ при $\nu \geq 1$, $i = \sqrt{-1}$, для яких виконується нерівність

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\|\lambda_\nu\|}\right) \sup_{G_1} \| C_\nu \| + \frac{1}{\|\lambda_\nu\|} \left(\sup_{G_1} \left\| \frac{\partial C_\nu}{\partial \tau} \right\| + \sup_{G_1} \left\| \frac{\partial C_\nu}{\partial x} \right\| \right) \right] \leq c_2 = \text{const}, \tag{2}$$

$$C_\nu = [A_\nu(x, \tau, \varepsilon); B_\nu(x, \tau, \varepsilon)],$$

$$G_1 = D \times [0, \infty) \times (0, \varepsilon_0], \qquad (\lambda_\nu, \varphi) = \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\nu^{(\mu)} \varphi_\mu$$

— скалярний добуток векторів. Під нормою матриці будемо розуміти суму модулів її елементів.

Поряд із (1) розглянемо усереднену систему

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = a(\bar{x}, \tau, \varepsilon) + \varepsilon A_0(\bar{x}, \tau, \varepsilon), \tag{3.1}$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon}\,\omega(\bar{x}, \tau, \varepsilon) + B_0(\bar{x}, \tau, \varepsilon), \tag{3.2}$$

де

$$[A_0, B_0] = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T^m} \int_0^T \ldots \int_0^T [A(\bar{x}, \varphi, \tau, \varepsilon); B(\bar{x}, \varphi, \tau, \varepsilon)]\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_m.$$

Відносно частот $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ будемо припускати, що

$$\left\| \left(W_p^*(x, \tau, \varepsilon) W_p(x, \tau, \varepsilon) \right)^{-1} W_p^*(x, \tau, \varepsilon) \right\| \le c_2 \quad \forall (x, \tau, \varepsilon) \in G_1, \tag{4}$$

де через $W_p(x, \tau, \varepsilon)$ і $W_p^*(x, \tau, \varepsilon)$ позначено відповідно матрицю

$$\left(\frac{d^{j-1}}{d\tau^{j-1}} \omega_\nu(x, \tau, \varepsilon) \right)_{\nu, j=1}^{m, p}$$

і транспоновану до неї, а повні похідні відносно τ від функцій $\omega_\nu(x, \tau, \varepsilon)$ обчислюються з рівнянь $\dfrac{dx}{d\tau} = a(x, \tau, \varepsilon)$. Умова (4) достатня [5] для швидкого проходження системи (1) через малий окіл резонансу і дозволяє отримати оцінку похибки методу усереднення на скінченному часовому відрізку вигляду

$$\| x_t(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \bar{x}_t(\tau, y, \varepsilon) \| + \varepsilon \| \varphi_t(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \bar{\varphi}_t(\tau, y, \psi, \varepsilon) \| \le \sigma \varepsilon^{1 + 1/p} \tag{5}$$

$$\forall \tau \in [t, L + t], \quad y \in D_1 \subset D, \quad \psi \in R^m, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0],$$

де σ — стала, незалежна від ε; $(x_t(\tau, y, \psi, \varepsilon); \varphi_t(\tau, y, \psi, \varepsilon))$; і $(\bar{x}_t(\tau, y, \varepsilon);$ $\bar{\varphi}_t(\tau, y, \psi, \varepsilon))$ — розв'язки рівнянь відповідно (1) і (3.1), (3.2), які при $\tau = t$ набувають значень (y, ψ), а крива $\bar{x} = \bar{x}_t(\tau, y, \varepsilon)$ лежить в D разом із деяким своїм околом для всіх $(\tau, y, \varepsilon) \in [t, L + t] \times D_1 \times (0, \varepsilon_0]$.

Задача полягає в тому, щоб обгрунтувати метод усереднення на півосі $\tau \in$ $\in [0, \infty)$. Припустимо, що існує розв'язок $\bar{x} = \xi(\tau, \varepsilon)$ усереднених рівнянь (3.1) для повільних змінних, який визначений і лежить в D разом зі своїм ρ-околом для всіх $(\tau, \varepsilon) \in (0, \infty] \times (0, \varepsilon_0]$, причому нормальна фундаментальна матриця $Q(\tau, t, \varepsilon)$ розв'язків рівняння в варіаціях

$$\frac{dz}{d\tau} = H(\tau, \varepsilon) z,$$

$$H(\tau, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x}[a(\xi(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) + \varepsilon A_0(\xi(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon)],$$

задовольняє оцінку

$$\| Q(\tau, t, \varepsilon)\| \leq \frac{K}{\varepsilon^{r_1}} e^{-\gamma\varepsilon^{r_2}(\tau - t)} \quad \forall \tau \geq t \geq 0, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \tag{6}$$

з деякими сталими $K > 0$, $\gamma > 0$, $r_1 \geq 0$ і $r_2 \geq 0$, незалежними від ε.

Зазначимо, що при $r_1 = r_2 = 0$ ефективну оцінку похибки методу усереднення для повільних змінних на всій осі встановлено в [5] за допомогою розв'язності крайових задач. У даній роботі при $r = r_1 + r_2 > 0$ обгрунтовано метод усереднення на півосі за допомогою оцінок осциляційних інтегралів.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (2), (4), (6) *при* $r < 1/2 + 1/2p$. *Тоді можна вказати такі додатні сталі* c_3 *і* $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, *що розв'язок* $(x_0(\tau, \xi(0, \varepsilon), \psi, \varepsilon); \varphi_0(\tau, \xi(0, \varepsilon), \psi, \varepsilon))$ *системи* (1) *визначений для всіх* $\tau \in [0, \infty)$, $\psi \in R^m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ *і задовольняє оцінки*

$$\| x_0(\tau, \xi(0, \varepsilon), \psi, \varepsilon) - \xi(\tau, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{1+1/p-r}, \tag{7.1}$$

$$\| \varphi_0(\tau, \xi(0, \varepsilon), \psi, \varepsilon) - \overline{\varphi}_0(\tau, \xi(0, \varepsilon), \psi, \varepsilon)\| \leq c(1+\tau)\varepsilon^{1/p-r}. \tag{7.2}$$

Доведення. У змінних (y, φ), $y = x - \xi(\tau, \varepsilon)$ систему (1) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= H(\tau, \varepsilon)y + F(y, \tau, \varepsilon) + \varepsilon\tilde{A}(y + \xi(\tau, \varepsilon), \varphi, \tau, \varepsilon), \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{1}{\varepsilon}\omega(y + \xi(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) + B(y + \xi(\tau, \varepsilon), \varphi, \tau, \varepsilon), \end{aligned} \tag{8}$$

де

$$\tilde{A}(x, \varphi, \tau, \varepsilon) = A(x, \varphi, \tau, \varepsilon) - A_0(x, \tau, \varepsilon),$$

$$F(y, \tau, \varepsilon) = a(y + \xi(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) + \varepsilon A_0(y + \xi(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) -$$

$$- a(\xi(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) - \varepsilon A_0(\xi(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) - H(\tau, \varepsilon)y,$$

$$\| F(y, \tau, \varepsilon)\| \leq \frac{1}{2} n^2 c_1 \| y\|^2.$$

Позначимо через $[0, T)$ максимальний півінтервал $(T = T(\psi, \varepsilon))$, для якого функція $y(\tau, \psi, \varepsilon) = x_0(\tau, \xi(0, \varepsilon), \psi, \varepsilon) - \xi(\tau, \varepsilon)$ справджує нерівність

$$\| y(\tau, \psi, \varepsilon)\| < \varepsilon^{\beta}, \quad \beta = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{p}\right), \tag{9}$$

для всіх $\tau \in [0, T)$, $\psi \in R^m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. З (8) знаходимо оцінку

$$\sup_{[0,T)} \| y(\tau, \psi, \varepsilon)\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\gamma} n^2 c_1 K \varepsilon^{-r} \sup_{[0,T)} \| y(\tau, \psi, \varepsilon)\|^2 + \varepsilon \sup_{[0,T)} \left\| \int_0^{\tau} Q(\tau, t, \varepsilon)\tilde{A}(x, \varphi, t, \varepsilon)\, dt \right\|,$$

звідки з урахуванням (9) при $\varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon}_1]$, $\overline{\varepsilon}_1 = \min\left\{\varepsilon_0; (n^2 c_1 K)^{1/(r-\beta)}/\gamma\right\}$, одержуємо нерівність

$$\sup_{[0,T)} \| y(\tau, \psi, \varepsilon)\| \leq 2\varepsilon \sup_{[0,T)} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^{s-1} \left\| \int_l^{l+1} Q(\tau, t, \varepsilon) A_{\nu}(x, t, \varepsilon) e^{i(\lambda_{\nu}, \varphi)}\, dt \right\| + \right.$$

$$+ \left\| \int_s^\tau Q(\tau, t, \varepsilon) A_\nu(x, t, \varepsilon) e^{i(\lambda_\nu, \varphi)} dt \right\| \Bigg]. \tag{10}$$

Тут s — ціла частина числа $\tau > 0$, $x = x_0(t, \xi(0, \varepsilon), \psi, \varepsilon)$, $\varphi = \varphi_0(t, \xi(0, \varepsilon), \psi, \varepsilon)$.

Для $t \in [l, l+1]$ позначимо

$$\theta = \varphi - \frac{1}{\varepsilon} \int_l^t \omega(x, t, \varepsilon) dt$$

і, враховуючи рівність $x_0(t, \xi(0, \varepsilon), \psi, \varepsilon) = x_l(t, \tilde{x}, \tilde{\psi}, \varepsilon)$, в якій $\tilde{x} = x_0(l, \xi(0, \varepsilon), \psi, \varepsilon)$, $\tilde{\psi} = \varphi_0(l, \xi(0, \varepsilon), \psi, \varepsilon)$, маємо зображення

$$\int_l^{l+1} Q(\tau, t, \varepsilon) A_\nu(x, t, \varepsilon) \exp\{i(\lambda_\nu, \varphi)\} dt =$$

$$= \int_l^{l+1} Q(\tau, t, \varepsilon) A_\nu(x, t, \varepsilon) \exp\{i(\lambda_\nu, \theta)\} \times$$

$$\times \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \left(\lambda_\nu, \int_l^t [\omega(x_l(t, \tilde{x}, \tilde{\psi}, \varepsilon), t, \varepsilon) - \omega(\bar{x}_l(t, \tilde{x}, \varepsilon), t, \varepsilon)] dt \right) \right\} \times$$

$$\times \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \left(\lambda_\nu, \int_l^t \omega(\bar{x}_l(t, \tilde{x}, \varepsilon), t, \varepsilon) dt \right) \right\} dt \equiv \Delta_l.$$

Враховуючи точну за порядком відносно ε оцінку осциляційного інтегралу [4, 6]

$$\left\| \int_l^{l+1} f(t, \varepsilon) \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \left(\lambda_\nu, \int_l^t \omega(\bar{x}_l(t, \tilde{x}, \varepsilon), t, \varepsilon) dt \right) \right\} dt \right\| \le$$

$$\le c_0 \varepsilon^{1/p} \left[\left(1 + \frac{1}{\|\lambda_\nu\|} \right) \max_{t \in [l, l+1]} \|f(t, \varepsilon)\| + \frac{1}{\|\lambda_\nu\|} \max_{t \in [l, l+1]} \left\| \frac{d}{dt} f(t, \varepsilon) \right\| \right] \tag{11}$$

зі сталою c_0, незалежною від ε і λ_ν, і нерівності (5), (6), одержуємо нерівність

$$\|\Delta_l\| \le c_0 K (1 + n c_1 (1 + \sigma)) e^{-\gamma \varepsilon^{r_2} (\tau - l - 1)} \varepsilon^{1/p - r_2} \left[\left(1 + \frac{1}{\|\lambda_\nu\|} \right) \sup_{G_1} \|A_\nu(x, \tau, \varepsilon)\| + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\|\lambda_\nu\|} \left(\sup_{G_1} \left\| \frac{\partial}{\partial \tau} A_\nu(x, \tau, \varepsilon) \right\| + \sup_{G_1} \left\| \frac{\partial}{\partial x} A_\nu(x, \tau, \varepsilon) \right\| \right) \right].$$

Таку ж нерівність задовольняє останній з доданків у квадратних дужках у правій частині (10), тільки замість $e^{-\gamma \varepsilon^{r(\tau - l - 1)}}$ потрібно покласти 1. Тоді, враховуючи умову (2) і нерівності

$$\sum_{l=0}^{s-1} e^{-\gamma \varepsilon^{r_2} (\tau - l - 1)} + 1 < \frac{e^{\gamma \varepsilon^{r_2}}}{\gamma \varepsilon^{r_2}} + 1 \le \frac{e + 1}{\gamma \varepsilon^{r_2}}$$

при $\varepsilon \in (0, \underline{\varepsilon}_1]$, $\underline{\varepsilon}_1 = \min\left\{\overline{\varepsilon}_1; \gamma^{-1/r_2}\right\}$, з (10) знаходимо

$$\sup_{[0,T)} \| y(\tau, \psi, \varepsilon) \| \leq M \varepsilon^{1+1/p-r} \qquad \forall \psi \in R^m, \quad \varepsilon \in (0, \underline{\varepsilon}_1], \tag{12}$$

$$M = \frac{2}{\gamma} c_0 K (1 + n c_1 (1 + \sigma)) c_2 (e + 1).$$

Звідси випливає, що при $(1/p + 1)/2 - r > 0$, $\psi \in R^m$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1^*]$, $\varepsilon_1^* = \min\left\{\varepsilon_1; (2M)^{2/(2r-1-1/p)}\right\}$, виконується нерівність

$$\sup_{[0,T)} \| y(\tau, \psi, \varepsilon) \| \leq \frac{1}{2} \varepsilon^{\beta}.$$

Тому як T можна взяти ∞. Із оцінки (12) одержуємо нерівності (7.1) для всіх $\tau \in [0, \infty)$, $\psi \in R^m$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$, де $\varepsilon_1 = \min\left\{\varepsilon_1^*; (\rho/2M)^{1/(1+1/p-r)}\right\}$. При цьому ε_1 вибирається з умови, що крива $x = x_0(\tau, \xi(0, \varepsilon), \psi, \varepsilon)$ лежить в D разом зі своїм $(\rho/2)$-околом.

Встановимо тепер (7.2). Скориставшись нерівністю (12), з (1) і (3.2) знаходимо

$$\| \Delta\varphi \| \equiv \| \varphi_0(\tau, \xi(0, \varepsilon), \psi, \varepsilon) - \overline{\varphi}_0(\tau, \xi(0, \varepsilon), \psi, \varepsilon) \| \leq$$

$$\leq 2 n c_1 M \varepsilon^{1/p-r} \tau + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^{s-1} \left\| \int_l^{l+1} B_\nu(x, t, \varepsilon) e^{i(\lambda_\nu, \varphi)} dt \right\| + \right.$$

$$\left. + \left\| \int_s^{\tau} B_\nu(x, t, \varepsilon) e^{i(\lambda_\nu, \varphi)} dt \right\| \right].$$

Оцінюючи кожний із інтегралів у правій частині останньої нерівності за допомогою оцінки вигляду (11) і враховуючи умову (2), маємо

$$\| \Delta\varphi \| \leq 2 n c_1 M \varepsilon^{1/p-r} \tau + c_0 (1 + n c_1 (1 + \sigma)) c_2 \varepsilon^{1/p} (1 + \tau)$$

для всіх $\tau \in [0, \infty)$, $\psi \in R^m$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$. Звідси випливає нерівність (7.2). Теорему доведено.

Аналогічне теоремі 1 твердження справедливе для багаточастотної системи

$$\frac{dx}{d\tau} = A(x, \varphi, \tau, \varepsilon), \qquad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau, \varepsilon)}{\varepsilon} + B(x, \varphi, \tau, \varepsilon), \tag{13}$$

яка породжує усереднені рівняння

$$\frac{d\overline{x}}{d\tau} = A_0(\overline{x}, \tau, \varepsilon), \tag{14.1}$$

$$\frac{d\overline{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau, \varepsilon)}{\varepsilon} + B_0(\overline{x}, \tau, \varepsilon). \tag{14.2}$$

Теорема 2. *Нехай:*

1) *при кожному* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *майже періодичні відносно* φ_ν, $\nu = 1, \ldots, m$, *функції* A, B *мають неперервні і обмежені незалежною від* ε *сталою* c_1 *частинні похідні відносно* x, φ, τ *до другого порядку включно і задовольняють нерівність* (2);

2) *для всіх* $\nu = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, p$, $p \geq m$, *функції* $\dfrac{d^{j-1}\omega_\nu(\tau, \varepsilon)}{d\tau^{j-1}}$ *рівномірно неперервні на множині* $[0, \infty) \times (0, \varepsilon_0]$;

3) *матриця*

$$W_p(x, \tau, \varepsilon) \equiv W_p(\tau, \varepsilon) = \left(\frac{d^{j-1}\omega_\nu(\tau, \varepsilon)}{d\tau^{j-1}} \right)_{\nu, j=1}^{m, p}$$

задовольняє умову (4);

4) *існує розв'язок* $\bar{x} = \xi(\tau, \varepsilon)$ *рівнянь* (14.1), *який визначений для всіх* $(\tau, \varepsilon) \in [0, \infty) \times (0, \varepsilon_0]$ *і лежить в* D *разом зі своїм* ρ-*околом, причому нормальна фундаментальна матриця* $Q(\tau, t, \varepsilon)$ *системи*

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial x} A_0(\xi(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) z$$

задовольняє нерівність (6). *Тоді при* $1/p > r = r_1 + r_2$ *для всіх* $\tau \in [0, \infty)$, $\psi \in R^m$ *і* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ ($\varepsilon_0 > 0$ *досить мале) виконуються оцінки*

$$\| x_0(\tau, \xi(0, \varepsilon), \psi, \varepsilon) - \xi(\tau, \varepsilon) \| \leq \tilde{c}\, \varepsilon^{1/p - r},$$

$$\| \varphi_0(\tau, \xi(0, \varepsilon), \psi, \varepsilon) - \overline{\varphi}_0(\tau, \xi(0, \varepsilon), \psi, \varepsilon) \| \leq \tilde{c}\, \varepsilon^{1/p - r}(1 + \tau)$$

зі сталою $\tilde{c}$, *незалежною від* τ, ψ, ε.

Доведення цієї теореми по суті повторює доведення теореми 1.

1. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1971. – 440 с.
2. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. – М.: Наука, 1974. – 432 с.
3. *Плотников В. А.* Метод усреднения в задачах управления. – Киев–Одесса: Лыбидь, 1992. – 188 с.
4. *Самойленко А. М.* К вопросу обоснования метода усреднения для многочастотных колебательных систем // Дифференц. уравнения. – 1987. – **23**, № 2. – С. 267–278.
5. *Самойленко А. М., Петришин Р. И.* Метод усреднения в некоторых краевых задачах // Там же. – 1989. – **25**, № 6. – С. 956–964.
6. *Самойленко А. М., Петришин Р. И.* Метод усреднения в многочастотных системах с медленно меняющимися параметрами // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 4. – С. 493–501.
7. *Самойленко А. М., Петришин Р. И.* Об интегральных многообразиях многочастотных колебательных систем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1990. – **54**, № 2. – С. 378–395.

Одержано 15.01.96