УДК 519.948;517.944

Я. Й. Бігун (Чернівец. ун-т)

ІСНУВАННЯ, ЄДИНІСТЬ І НЕПЕРЕРВНА ЗАЛЕЖНІСТЬ ВІД ПАРАМЕТРА РОЗВ'ЯЗКУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗВИЧАЙНИМИ І ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

For a system of quasilinear hyperbolic equations with a system of differential equations with lag, we prove theorems on the existence and uniqueness of a solution of the Cauchy problem and its continuous dependence on the initial conditions.

Для системи квазілінійних гіперболічних рівнянь, до якої приєднано систему диференціальних рівнянь з запізненням, доведено теореми про існування та єдиність розв'язку задачі Коші і неперервну залежність від початкових умов.

1. Метод усереднення і асимптотичні методи для гіперболічних систем із запізненням розглядалися в роботах [1–4] та ін. У деяких задачах, наприклад, врахування запізнення в підсилювачі для струнного генератора [5], потребує розгляду систем із змішаними похідними. Такого типу задачі досліджувалися в [5]. У даній роботі методом послідовних наближень доведено існування і єдиність розв'язку зв'язаних систем із частинними та звичайними похідними. Для систем стандартного вигляду доведено теорему про неперервну залежність від параметра ε і обгрунтовано метод усереднення на відрізку $[0, \varepsilon^{-1}]$. Робота узагальнює результати [6].

2. Розглядається система вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + D(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x, u, u_h, v, v_\Delta), \tag{1}$$

$$\frac{dv}{dt} = g\big(t, (G_1 u)(t), (G_2 u_h)(t), v(t), v(t-\Delta)\big). \tag{2}$$

Тут $u=(u_1, \dots, u_n)$, $n \ge 2$, $v = (v_1, \dots, v_m)$, $u_h(t,x) = u(t-h, x)$, h і Δ — додатні сталі; G_1 і G_2 — функціонали для кожного $t \ge 0$. Матриця $D(t,x)$ діагональна, елементи її на діагоналі — дійсні різні функції. Тобто система (1) є гіперболічною [7].

Нехай G_T — область, обмежена характеристиками L_1 і L_n, які виходять із точок $(a, 0)$ і $(b, 0)$ і перетинаються в деякій точці з $t=T$, та відрізком $[a, b]$ осі Ox. Всі інші характеристики знаходяться всередині $\overline{G}_T$.

Початкові умови для системи (1), (2) мають вигляд

$$u(t,x) = \varphi(t,x), \quad (t,x) \in [-h, 0]\times[a_1, b_1] = E_0, \quad v(t) = \psi(t), \quad t \in [-\Delta, 0], \tag{3}$$

де

$$a_1 = \min_{0 \le s \le \Delta,\, x \in L_1} \xi_1(s; t, x), \qquad b_1 = \min_{0 \le s \le \Delta,\, x \in L_n} \xi_n(s; t, x), \qquad \xi_i = \xi_i(s; t, x)$$

— розв'язок рівняння характеристик

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \lambda_i(t, \xi_i), \qquad \xi_i(t; t, x) = x, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{4}$$

Зведемо задачу (1)–(3) до інтегральної задачі, інтегруючи i-те рівняння (1) вздовж характеристики l_i від точки $(0, x_i)$ до $(t,x) \in \overline{G}_T$. Одержуємо

$$u_i(t,x) = \varphi_i[0; \xi_i(0; t, x)] + \int_0^t f_i(s; \xi_i(s; t, x), \tag{5}$$

$$u(s;\xi_i(s;t,x)),\, u(s-h,\xi_i(s;t,x)),\, v(s),\, v(s-\Delta))\,ds, \qquad i=1,\ldots,n,$$

$$v(t) = \psi(0) + \int_0^t g(s,(G_1u)(s),(G_2u_h)(s),v(s),v(s-\Delta))\,ds. \tag{6}$$

Під розв'язком вихідної задачі будемо розуміти неперервний розв'язок інтегральної задачі (5), (6), (3).

Зробимо деякі припущення відносно (1)–(3). Позначимо

$$u_i^{(0)}(t,x) = \varphi_i[0;\xi_i(0;t,x)], \qquad v^{(0)} = \psi(0),$$

$$w_1^{(0)}(t) = (G_1u^{(0)})(t), \qquad w_2^{(0)}(t) = (G_2u_h^{(0)})(t).$$

Нехай виконуються наступні умови:

а) функції $f(t,x,y_1,y_2,z_1,z_2)$, $g(t,w_1,w_2,z_1,z_2)$ визначені в області

$$(t,x)\in\overline{G}_T, \quad \|y_i-y_i^{(0)}\|<\infty, \quad \|z_i-z_i^{(0)}\|<\infty, \quad \|w_i-w_i^{(0)}\|<\infty, \quad i=1,2,$$

і задовольняють умову Ліпшіца відносно змінних y_1, y_2, z_1, z_2 і w_1, w_2, z_1, z_2 зі сталими $M>0$ і $K>0$ відповідно;

б) функціонали G_1 і G_2 задовольняють умову Ліпшіца зі сталою $K_1>0$;

в) початкові функції $\varphi(s,x)$ і $\psi(s)$ є неперервними в областях визначення.

Для задачі (5), (6), (3) будуємо послідовні наближення

$$u_i^{(k+1)}(t,x) = u_i^{(0)}(t,x) + \int_0^t f_i(s,\xi_i(s;t,x), u^{(k)}(s,\xi_i(s;t,x)),$$

$$u_h^{(k)}(s,\xi_i(s;t,x)),\, v^{(k)}(s),\, v_\Delta^{(k)}(s))\,ds, \qquad i=1,\ldots,n, \tag{7}$$

$$v^{(k+1)}(t) = v^{(0)} + \int_0^t g(s,(G_1u^{(k)})(s),(G_2u_h^{(k)})(s),v^{(k)}(s),v_\Delta^{(k)}(s))\,ds,$$

$$u^{(k)}(t,x) = \varphi(t,x), \quad (t,x)\in E_0; \quad v^{(k)}(t) = \psi(t), \quad t\in[-\Delta,0], \quad k=0,1,\ldots.$$

Оцінимо норми різниць $\|u^{(k+1)}-u^{(k)}\|$, $\|v^{(k+1)}-v^{(k)}\|$.

Для $k=0$ внаслідок неперервності функцій f та g маємо

$$\|u_i^{(t)}-u_i^{(0)}\| \le \int_0^t \max_i \left\| f\left(s,\xi_i(s,t,x),u^{(0)},u_h^{(0)},v^{(0)},v_\Delta^{(0)}\right)\right\| ds =$$

$$= \int_0^t \|f_0(s;t,x)\|\,ds \le c_1 t, \qquad c_1>0,$$

$$\|v^{(1)}-v^{(0)}\| \le \int_0^t \|g(s,(G_1u^{(0)})(s),(G_2u_h^{(0)})(s),v^{(0)},v_\Delta^{(0)})\|\,ds =$$

$$= \int_0^t \|g_0(s)\|\,ds \le c_2 t, \qquad c_2>0.$$

Методом математичної індукції умов з а)–в) одержимо

$$\|u^{(k+1)}-u^{(k)}\| + \|v^{(k+1)}-v^{(k)}\| \le c_3(KK_1+N)^{k+1}\frac{(2t)^{k+1}}{(k+1)!},$$

$$c_3 = 0{,}5(c_1+c_2)/(KK_1+N). \tag{8}$$

Оцінка (8) дозволяє довести рівномірну збіжність ряду

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\| u^{(k+1)} - u^{(k)} \| + \| v^{(k+1)} - v^{(k)} \|) \le c_3 \sum_{k=0}^{\infty} (KK_1 + N)^k \frac{(2t)^k}{k!} \le$$

$$\le c_3 \exp[2T(KK_1 + N)], \quad (x, t) \in \overline{G}_T.$$

Для доведення єдиності неперервного в $\overline{G}_T$ розв'язку припустимо, що існують два розв'язки (u, v) і $(\overline{u}, \overline{v})$. Тоді для $K_2 = \max(1, K_1)$ маємо

$$\| u - \overline{u} \|_1 + \| v - \overline{v} \| \le 2(K + NK_2) \int_0^t (\| u - \overline{u} \|_1 + \| v - \overline{v} \|)\, ds,$$

де

$$\| u \|_1 = \max_{i, x, s \le t} \| u(s, \xi_i(s; t, x)) \|.$$

Звідси і з нерівності Гронуолла випливає, що $u \equiv \overline{u}$, $v \equiv \overline{v}$.

Для доведення неперервної залежності від початкових функцій покладемо

$$\max_{E_0} \| \varphi_1 - \varphi_2 \| = \varepsilon_1, \quad \max_{[-\Delta, 0]} \| \psi_1 - \psi_2 \| = \varepsilon_2, \quad y = u_{\psi_1} - u_{\psi_2}, \; z = v_{\varphi_1} - v_{\varphi_2},$$

де $\varphi_i(x, t)$, $\psi_i(t)$, $i = 1, 2$, — неперервні початкові вектор-функції, u_{φ_i}, v_{ψ_i} — відповідні їм розв'язки системи (1), (2).

Маємо

$$\| y \|_1 + \| z \| = \varepsilon_1(1 + hK + hK_1 N) + \varepsilon_2(1 + \Delta(K + N)) +$$

$$+ 2(K + K_2 N) \int_0^t (\| y \|_1 + \| z \|)\, ds.$$

Доведення завершується застосуванням нерівності Гронуолла.

Таким чином, доведено таку теорему.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови а)–в) і розв'язок задач Коші* (4) *можна продовжити в сторону зменшення t до перетину графіків розв'язків з віссю Ox. Тоді задача* (1)–(3) *має єдиний в $\overline{G}_T$ неперервний розв'язок.*

3. Розглянемо задачу про неперервну залежність від параметра λ розв'язку системи рівнянь вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + D(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x, u, u_h, v, v_\Delta, \lambda),$$
$$\frac{dv}{dt} = g(t, (G_1 u)(t), (G_2 u_h)(t), v, v_\Delta, \lambda) \tag{9}$$

з початковими функціями $\varphi(s, x, \lambda)$ і $\psi(s, \lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, де Λ — множина значень параметра λ, яка має λ_0 граничною точкою.

Позначимо $y = u(t, x, \lambda) - u(t, x, \lambda_0)$, $z = v(t, \lambda) - v(t, \lambda_0)$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови:*

1) *функції $f(t, x, u_1, u_2, v_1, v_2)$, $g(t, w_1, w_2, v_1, v_2)$ визначені при $(t, x) \in \in \overline{G}_T$, $(u_1, u_2) \in S_1$, $(v_1, v_2) \in S_2$, $(w_1, w_2) \in S_3$, S_i — компакти, неперервні відносно t, x і задовольняють умову Ліпшиця відносно u_i, v_i, w_i, як і в теоремі* 1;

2) *відносно λ функції f і g інтегрально неперервні* [8] *в точці $\lambda_0 \in \Lambda$ при всіх $t \in [0, T]$ і фіксованих значеннях інших аргументів;*

3) *початкові функції* $\varphi(t, x, \lambda)$ *і* $\psi(t, \lambda)$ *визначені на* $E_0 \times \Lambda$ *і* $[-\Delta, 0] \times \times \Lambda$ *відповідно, неперервні в областях визначення відносно* t, x *і*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \varphi(t, x, \lambda) = \varphi(t, x, \lambda_0),$$

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \psi(t, \lambda) = \psi(t, \lambda_0)$$

рівномірно відносно t, x;

4) *існує єдиний розв'язок системи* (9) *при* $\lambda = \lambda_0$, *визначений для* $(x, t) \in \in \overline{G}_T$, *компоненти* u *і* v *якого лежать з* ρ*-околом в* S_1 *і* S_2 *відповідно.*

Тоді для кожного $\eta > 0$ *існує окіл* $\delta(\lambda_0)$ *точки* λ_0 *такий, що для кожного* $\lambda \in \delta(\lambda_0)$ *розв'язок* $u(t, x, \lambda)$, $v(t, \lambda)$ *системи* (9) *існує, єдиний і задовольняє нерівність* $\| y(t, x, \lambda) \|_1 + \| z(t, \lambda) \| < \eta$, $(x, t) \in \overline{G}_T$.

Доведення. Покладемо $\eta_1 = \eta c_4^{-1}$, де

$$c_4(T) = c_3 \exp[-2(K + NK_2)T],$$

$$c_3 = 4 + h(K + NK_1) + \Delta(K + N).$$

Для кожного $\lambda \in \Lambda$ як випливає з теореми 1, існує єдиний розв'язок (9) на проміжку $[0, t_2]$, $0 < t_2 \le T$. Нехай $\delta_1(\lambda_0)$ — окіл точки λ_0, в якому

$$\max_{s, x} \| \varphi(s, \lambda) - \varphi(s, \lambda_0) \| < \eta_1,$$
$$\max_{s} \| \psi(s, \lambda) - \psi(s, \lambda_0) \| < \eta_1, \tag{10}$$

$$\max_i \left| \int_0^t [f_i(s, \xi_i, u, u_h, v, v_\Delta, \lambda) - f_i(s, \xi_i, u, u_h, v, v_\Delta, \lambda_0)] ds \right| < \eta_1.$$

З інтегрального представлення розв'язку системи (9), умови 1) і (10) для $t \in \in [0, t_2]$ маємо

$$\| y(t, x, \lambda) \|_1 \le \eta_1 (2 + K(h + \Delta)) + 2K \int_0^t [\| y \|_1 + \| z \|] ds,$$

$$\| z(t, \lambda) \| \le \eta_1 (2 + N(K_1 h + \Delta)) + 2N \int_0^t [\| y \|_1 + \| z \|] ds.$$

Звідси одержуємо оцінку

$$\| y(t, x, \lambda) \|_1 + \| z(t, \lambda) \| < \eta, \quad (x, t) \in \overline{G}_{t_2}. \tag{11}$$

Покладемо, що $t_2 = T$. При $\eta \le 0{,}5\rho$ із (11) випливає, що $u(t, x, \lambda)$ і $v(t, \lambda)$ лежать у відповідних областях разом з $0{,}5\rho$-околом. Тому $t_2 = \varepsilon^{-1}$ і нерівність (11) має місце для всіх $(x, t) \in \overline{G}_T$. Теорему доведено.

Як наслідок із теореми 2 одержується обгрунтування методу усереднення на проміжку $[0, \varepsilon^{-1}]$, ε — малий параметр, для системи вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon D(\tau, x) \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon f(t, x, u, u_h, v, v_\Delta),$$
$$\frac{dv}{dt} = \varepsilon g(t, (G_1 u)(t), (G_2 u_h)(t), v_1 v_\Delta), \quad \tau = \varepsilon t. \tag{12}$$

Розглянемо відповідну (12) усереднену відносно t систему

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} + D(\tau, x)\frac{\partial w}{\partial x} = f_0(x, w, \xi),$$
$$\frac{d\xi}{d\tau} = g_0(G_1 w, G_2 w, \xi), \tag{13}$$

де

$$[f_0, g_0] = \lim_{l \to \infty} \frac{1}{l}\int_0^l [f(t, x, w, w, \xi, \xi), g(t, G_1 w, G_2 w, \xi, \xi)]\, dt.$$

Позначимо $w(\tau, x) = w(\tau, x, \varphi_0, \psi_0)$, $\xi(\tau) = \xi(\tau, \varphi_0, \psi_0)$ розв'язок системи (13), який набуває при $\tau = 0$ значень $\varphi_0 = \varphi_0(x)$, $x \in [a, b]$, $\psi_0 = \psi(0)$. Дослідимо поведінку величини

$$\chi(\tau, \varepsilon) = \| u(t, x, \varepsilon) - w(\tau, x) \|_1 + \| v(t, \varepsilon) - \xi(\tau) \|, \quad \tau \in [0, 1],$$

при $\varepsilon \to 0$.

Для цього виконаємо в системі (12) заміну $\tau = \varepsilon t$ і покажемо, що функції $f(\tau/\varepsilon, x, u, u, v, v)$, $g(\tau/\varepsilon, z_1, z_2, v, v)$ інтегрально неперервні відносно ε при $\varepsilon = 0$. Для $\varepsilon = 0$ покладемо $f = f_0$, $g = g_0$. Дійсно,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^\tau f(\tau/\varepsilon, x, u, u, v, v)\, d\tau = \tau \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{\tau} \int_0^{\tau/\varepsilon} f(\tau, x, u, u, v, v)\, d\tau =$$
$$= \int_0^\tau f_0(x, u, v)\, d\tau,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^\tau g(\tau/\varepsilon, z_1, z_2, v, v)\, d\tau = \int_0^\tau g_0(z_1, z_2, v)\, d\tau.$$

Щодо оцінки відхилення розв'язку системи (12) і розв'язку цієї ж системи при $h = \Delta = 0$, які співпадають при $t = 0$, за схемою, вже використаною в п. 2, нескладно показати, що норма їх відхилення прямує до нуля при $\varepsilon \to 0$. Таким чином, $\lim_{\varepsilon \to 0} \chi(\tau, \varepsilon) = 0$ для $\tau \in [0, 1]$.

1. *Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И.* Асимптотические решения уравнений с частными производными. – Киев: Вища шк., 1976. – 592 с.
2. *Рабинович М. И., Розенблюм А. А.* К обоснованию асимптотических методов в теории колебаний нелинейных распределенных систем // Докл. АН СССР. – 1971. – **199**, № 3. – С. 575–578.
3. *Домбровский В. А., Хома Г. П.* Теоремы об усреднении для гиперболических систем первого порядка с запаздывающим аргументом // Мат. физика. – 1971. – Вып. 10. – С. 134–141.
4. *Хома Г. П.* Усреднение в гиперболических системах стандартного вида с запаздывающим аргументом // Укр. мат. журн. – 1978. – **30**, № 9. – С. 133–135.
5. *Рубаник В. П.* Колебания сложных квазилинейных систем с запаздыванием. – Минск: Университетское, 1985. – 143 с.
6. *Бігун Я. Й.* Про коректність і метод усереднення в системі гіперболічних рівнянь і диференціальних рівнянь з запізненням // Системи еволюційних рівнянь з післядією. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1994. – С. 4–17.
7. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: Физматгиз, 1961. – 400 с.
8. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1971. – 440 с.

Одержано 14.12.95