УДК 517.925.51

И. Е. Витриченко (Одес. ун–т)

КРИТИЧЕСКИЕ СЛУЧАИ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО НЕАВТОНОМНОГО СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ n-ГО ПОРЯДКА

We establish sufficient conditions of the Lyapunov stability of the trivial solution of a nonautonomous ordinary differential equation of the nth order in the case where its characteristic equaiton has a multiple zero root. The stability is determined by nonlinear terms.

Одержано достатні умови стійкості за Ляпуновим тривіального розв'язку неавтономного звичайного диференціального рівняння n-го порядку у випадку, коли його граничне характеристичне рівняння має кратний пульовий корінь. Стійкість визначається нелінійними доданками.

1. Постановка задачи. Исследуется устойчивость по Ляпунову [1] при $t \uparrow \omega$ нулевого решения дифференциального уравнения (д. у.) вида

$$y^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} p_k(t) y^{(n-k)} + p_n(t) y = F(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{1}$$

где

$$t \in \Delta \equiv [a_0, \omega[, \quad -\infty < a_0 < \omega \le +\infty, \quad p_s\colon \Delta \Rightarrow R, \quad R \equiv]-\infty, +\infty[,$$

$$p_s \equiv \pi^s \cdot a_s, \quad \pi\colon \Delta \Rightarrow R_+, \quad R_+ \equiv]0, +\infty[, \quad a_s \equiv a_{s0} + o(1),$$

$$a_s^{(l)} = o(1), \quad t \uparrow \omega, \quad a_{s0} \in R, \quad I \in \{\overline{1, h}\}, \quad h \in N, \quad N \equiv \{1, 2, \ldots\}, \quad s = \overline{1, n},$$

и выполняются условия:

1) уравнение

$$P_n(\lambda) \equiv \lambda^n + \sum_{s=1}^{n} a_{s0} \lambda^{n-s} = 0$$

имеет n_0, $2 \le n_0 \le n$, корней λ_0 с условием $\operatorname{Re} \lambda_0 = 0$, а остальные корни λ этого уравнения имеют свойство $\operatorname{Re} \lambda < 0$;

2)

$$F(t, X) = \sum_{\|Q\|=2}^{m} F_Q(t) X^Q + R_m(t, X), \quad X \equiv (x_1, \ldots, x_n), \quad F\colon \Delta \times S(X, r) \Rightarrow R,$$

$$S(X, r) \equiv \{X\colon \|X\| \le r\}, \quad r \in R_+, \quad Q \equiv (q_1, \ldots, q_n), \quad \|Q\| \equiv \sum_{k=1}^{n} q_k,$$

$$q_k \in \{0, N\}, \quad k = \overline{1, n}, \quad X^Q \equiv \prod_{k=1}^{n} x_k^{q_k}, \quad F_Q \in C_\Delta^h, \quad \|Q\| = \overline{2, m}, \quad m \in N \backslash 1,$$

$$|R_m| \le L \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k| \right)^{m+\alpha}, \quad L\colon \Delta \Rightarrow [0, +\infty[, \quad L \in C_\Delta, \quad \alpha \in R_+.$$

Далее приняты следующие определения и обозначения.

***Определение* 1.** *Д. у.* (1) *имеет свойство* St *при* $t \uparrow \omega$, *если для любого* $\varepsilon \in R_+$ *существуют* $\delta_\varepsilon \in]0, \varepsilon]$, $T_\varepsilon \in \Delta$ *такие, что любое решение* $y = y(t)$ *д. у.* (1) *с условием*

$$|y(T_\varepsilon)| < \delta_\varepsilon \pi(T_\varepsilon), \quad |y^{(s-1)}(T_\varepsilon)| < \delta_\varepsilon \pi^s(T_\varepsilon), \quad s = \overline{2, n},$$

имеет свойство $|y(t)| < \varepsilon\pi$, $|y^{(s-1)}(t)| < \varepsilon\pi^s$ *для всех* $t \in]T_\varepsilon, \omega]$ *и всех* $s = \overline{2, n}$.

При $\omega < +\infty$ свойство St д. у. (1) понимается как обычное перефразирование этого свойства при $\omega = +\infty$.

Определение 2. *Д. у. (1) имеет свойство* $AsSt$ *при* $t \uparrow \omega$, *если выполняется определение* 1 *и* $\pi^{-1}y(t) = o(1)$, $\pi^{-s}y^{(s-1)} = o(1)$, $t \uparrow \omega$, $s = \overline{2, n}$.

Определение 1′. *Дифференциальная система (д. с.) вида*

$$Y' = f(t, Y), \quad Y = \operatorname{col}(y_1, \ldots, y_n), \quad f(t, \overline{0}) \equiv \overline{0}, \quad \overline{0} \equiv \operatorname{col}(0, \ldots, 0), \quad (2)$$

имеет свойство St *при* $t \uparrow \omega$, *если для любого* $\varepsilon \in R_+$ *существуют* $\delta_\varepsilon \in]0, \varepsilon]$, $T_\varepsilon \in \Delta$ *такие, что любое решение* $Y = Y(t)$ *д. с. (2) с условием* $\|Y(T_\varepsilon)\| < \delta_\varepsilon$ *имеет свойство* $\|Y(t)\| < \varepsilon$ *для всех* $t \in [T_\varepsilon, \omega[$.

Определение 2′. *Д. с. (2) имеет свойство* $AsSt$ *при* $t \uparrow \omega$, *если выполняется определение* 1′ *и* $\|Y(t)\| = o(1)$, $t \uparrow \omega$; E_k, H_k — *соответственно матрицы единичная и сдвига размера* $k \times k$; Y_k — *вектор-столбец размерности* k;

$$Y^{-1} \equiv \operatorname{col}\left(y_1^{-1}, \ldots, y_n^{-1}\right), \quad Z = \operatorname{col}(z_1, \ldots, z_n) = \operatorname{col}(Z_{n_1}, \ldots, Z_{n_k}),$$

$$YZ \equiv \operatorname{col}(y_1 z_1, \ldots, y_n z_n), \quad \langle YZ \rangle \equiv \sum_{k=1}^{n} y_k z_k,$$

$$\operatorname{grad} V(t, Y) \equiv \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial y_n}\right), \quad \|Y\|^2 \equiv \sum_{k=1}^{n} y_k^2.$$

В дальнейшем Z рассматривается и как точка n-мерного вещественного эвклидового пространства,

$$E_k^T \equiv \left(0, \ldots, 0, \underset{k}{1}, 0, \ldots, 0\right), \quad L_\Delta \equiv \left\{f \colon \Delta \Rightarrow R, \int^{\omega} |f| dt < +\infty\right\};$$

$$\Lambda \equiv \max i\{f_s \colon \Delta \Rightarrow R, \ s = \overline{1, n}\},$$

если

$$\Lambda \colon \Delta \Rightarrow R_+, \quad \Lambda^{-1} f_s = c_s + o_s(1), \quad t \uparrow \omega, \quad c_s \in R, \quad s = \overline{1, n}, \quad \sum_{s=1}^{n} |c_s| > 0.$$

Результаты статьи эффективно применяются к д. у. (1), у которых коэффициенты — медленно изменяющиеся функции, т. е. функции, производные которых малы при $t \uparrow \omega$ в сравнении с самими функциями. Например, t^a, $(\ln t)^b$, $\sin t^c$, $a, b \in R$, $c \in]0, 1[$, $\omega = +\infty$ и др.

2. Основные результаты.

Лемма. *Если* $\pi' \pi^{-2} = o(1)$, $t \uparrow \omega$, *то преобразование*

$$y = \pi y_1, \quad y^{(s)} = \pi^{s+1} y_{s+1}, \quad s = \overline{1, n-1},$$

приводит д. у. (1) к д. с. вида

$$Y' = \pi P Y + G, \tag{3}$$

где

$$P = \|p_{sk}\|, \quad s, k = \overline{1, n}, \quad p_{ss} \equiv -s\pi'\pi^{-2}, \quad s = \overline{1, n-1},$$

$$p_{nn} \equiv -a_1 - n\pi'\pi^{-2}, \quad p_{s,s+1} \equiv 1, \quad s = \overline{1, n-1}, \quad p_{sk} \equiv 0, \quad s = \overline{1, n-2},$$

$$k = \overline{s+2, n}, \quad p_{sk} \equiv 0, \quad s = \overline{2, n-1}, \quad k = \overline{s-1, n-2},$$

$$p_{nk} \equiv -a_{n-k+1}, \quad k = \overline{1, n-1},$$

$$\det[P(\omega) - \lambda E_n] \equiv P_n(\lambda), \quad G = \operatorname{col}(0, \ldots, 0, G_n),$$

$$G_n \equiv \sum_{\|Q\|=2}^{m} g_Q Y^Q + R_m, \quad g_Q \equiv f_Q \pi^{-n+\sum_{s=1}^{n} s q_s},$$

$$Y^Q \equiv \prod_{k=1}^{n} y_k^{q_k}, \quad \|Q\| = \overline{2, m},$$

$$|R_m| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \pi^k\right)^{m+\alpha} \pi^{-n} L \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|\right)^{m+\alpha}.$$

Доказательство леммы очевидно.

Предположим сначала, что методом обобщенных „срезающих" преобразований задача типа (А) [2] решена полностью. Тогда при помощи методов „замороженных" [3], К. П. Персидского [4] преобразований можно построить невырожденную замену

$$y_s = h_s(t, Z), \quad h_s(t, \overline{0}) \equiv 0, \quad s = \overline{1, n},$$

приводящую д. с. (3) к д. с. специального вида

$$Z'_{n_s} = \pi_s(\mu_s E_{n_s} + \Omega_{n_s}) Z_{n_s} + \Phi_{n_s}, \quad s = \overline{1, s_0}, \quad \pi_{s_0} \equiv \pi, \quad \sum_{s=1}^{s_0} n_s \leq n, \tag{4}$$

где $\pi_s \colon \Delta \Rightarrow R_+$, $\mu_s \in R \backslash 0$ — известные величины, $\|\Omega_{n_s}\| = o(1)$, $t \uparrow \omega$, $\Phi_{n_s}\colon \Delta \times (Z, r) \Rightarrow R$ малы в некотором смысле, $s = \overline{1, s_0}$.

Теорема 1. *Пусть д. у.* (1) *таково, что:*

1) $\pi'\pi^{-2} = o(1)$, $t \uparrow \omega$, *и преобразование* $y = \pi h_1(t, Z)$, $y^{(s)} = \pi^{s+1} h_{s+1}(t, Z)$, $s = \overline{1, n-1}$, *приводит д. у.* (1) *к д. с.* (4), *у которой* $\pi_1 \pi_s^{-1} = o(1)$, $t \uparrow \omega$, $s = \overline{2, s_0}$;

2) $\displaystyle\int^{\omega} \pi_1\, dt = +\infty (\pi_1 \in L_\Delta)$, $\mu_s < 0$, $s = \overline{1, s_0}$ $\left(s = \overline{2, s_0}\right)$;

3) *существует* $\mu \in\,]0, -\mu_1[$ *такое, что для всех* $Z \in S(Z, r)$

$$\exp\left[\int_T^t (\pi_s \mu_s + \pi_1 \mu)\, d\tau\right] \int_T^t \left\| \Phi_{n_s}\left[\tau, \exp\left(-\mu \int_T^t \pi_1\, dt\right) Z\right] \right\| \times$$

$$\times \exp\left[-\int_T^t (\mu_s \pi_s + \pi_1 \mu)\, dt\right] d\tau = o(1), \quad t \uparrow \omega,$$

$$\pi^k \cdot h_k\left[t, \exp\left(-\mu\int_T^t \pi_1\, dt\right)Z\right] = o(1), \quad t\uparrow\omega,$$

$$\|\Phi_{n_s}(t,Z)\| \in L_\Delta, \quad \pi^k\cdot h_k(t,Z) = o(1),\, t\uparrow\omega, \quad s=\overline{1,s_0}, \quad k=\overline{1,n}.$$

Тогда д. у. (1) *имеет свойство* $AsSt$ *при* $t\uparrow\omega$.

Доказательство. Рассматривая д. с. (4) как квазилинейную, выполним замену

$$Z = \exp\left(-\mu\int_T^t \pi_1\, d\tau\right)Y$$

и к д. с. относительно Y применим результаты [5].

Пусть теперь методом обобщенных „срезающих" преобразований задача (А) [2] не решается окончательно. Тогда с помощью метода „замороженных" преобразований можно построить невырожденную нелинейную замену

$$y_s = f_s(t,Z) \equiv \sum_{\|Q\|=2}^{m} f_{sQ}Z^Q, \quad s=\overline{1,n},$$

приводящую д. с. (3) к д. с. специального вида

$$\begin{cases} Z'_{n_1} = \pi_1 P_{n_1} Z_{n_1} + \sum\limits_{\|Q_{n_1}\|=2}^{m} H_{Q_{n_1}} Z_{n_1}^{Q_{n_1}} + \Theta_{n_1}, \quad n_1\le n_0, \\ Z'_{n_s} = \pi_s(\mu_s E_{n_s} + H_{n_s})Z_{n_s} + Z_{n_s}\sum\limits_{\|Q_{n_1}\|=1}^{m-1} h_{n_s Q_{n_1 s}} Z_{n_1}^{Q_{n_1}} + \Theta_{n_s}, \\ \qquad\qquad s=\overline{2,s_0},\ \pi_{s_0}\equiv\pi,\ \sum\limits_{s=1}^{s_0} n_s \le n, \end{cases} \tag{5}$$

где $\pi_s\colon \Delta\Rightarrow R_+$, $s=\overline{1,s_0}$, $P_{n_1}\equiv\|0\|$ или $P_{n_1}\equiv H_{n_1}+\Omega_{n_1}$, $\|\Omega_{n_1}\|=o(1)$, $t\uparrow\omega$; $H_{Q_{n_1}}$, $\|Q_{n_1}\|=\overline{2,m}$, $h_{n_s Q_{n_1}}$, $s=\overline{2,s_0}$, $\|Q_{n_1}\|=\overline{1,m-1}$, — известные функции t, Θ_{n_s}, $s=\overline{1,s_0}$, малы в некотором смысле.

Выделим из д. с. (5) д. с. вида

$$Z'_{n_1} = \pi_1 P_{n_1} Z_{n_1} + \sum_{\|Q_{n_1}\|=2}^{m} H_{Q_{n_1}} Z_{n_1}^{Q_{n_1}}. \tag{6}$$

Предположим, что д. с. (6) можно заменить эквивалентным ей д. у. n_1-го порядка относительно одной из компонент вектор-столбца Z_{n_1}. Тогда методом [6] можно получить асимптотические представления всех так называемых правильных решений полученного д. у. Обозначим через $\Psi_{n_1}=\Psi_{n_1}(t)$ вектор-столбец асимптотического представления одного из правильных решений д. с. (6).

Теорема 2. *Пусть д. у.* (1) *таково, что:*

1) $\pi'\pi^{-2}=o(1)$, $t\uparrow\omega$, *и преобразование* $y=\pi f_1(t,Z)$, $y^{(s)}=\pi^{s+1}f_{s+1}(t,Z)$, $s=\overline{1,n-1}$, *приводит д. у.* (1) *к д. с.* (5), *у которой* $\mu_s<0$, $s=\overline{2,s_0}$;

2) *существует вектор-столбец асимптотического представления одного из правильных решений д. с.* (6) $\Psi_{n_1} = \Psi_{n_1}(t)$ *такой, что* $\|\Psi_{n_1}(t)\| = o(1), \quad t \uparrow \omega$;

3) *существует положительно определенная функция Ляпунова* $V = V(Z_{n_1})$ *такая, что для всех* $t \in \Delta$ *и всех* $(Z_{n_1}, \overline{0}) \in S(Z, r)$

$$\left\langle \operatorname{grad} V(Z_{n_1}), (\pi_1 P_{n_1} - \Psi'_{n_1}\Psi_{n_1}^{-1}E_{n_1})Z_{n_1} + \sum_{\|Q_{n_1}\|=2}^{m} H_{Q_{n_1}} \Psi_{n_1}^{Q_{n_1} - E_{n_1}^T} Z_{n_1}^{Q_{n_1}} \right\rangle \equiv$$

$$\equiv \Lambda\left[W_0(Z_{n_1}) + W_1(t, Z_{n_1})\right],$$

$$\Lambda \equiv \max i\left\{\left\|\pi_1 P_{n_1} - \Psi'_{n_1}\Psi_{n_1}^{-1}E_{n_1}\right\|, \ H_{n_1}\Psi_{n_1}^{Q_{n_1} - E_{n_1}^T}, \ \|Q_{n_1}\| = \overline{2, m}\right\},$$

$$W_0(\overline{0}) = 0, \quad W_0(Z_{n_1}) < 0, \quad Z_{n_1} \neq \overline{0},$$

$$W_1(t, Z_{n_1}) = o(1), \quad \Lambda^{-1} h_{n_s Q_{n_1}} \Psi_{n_1}^{Q_{n_1}} = o(1), \quad t \uparrow \omega,$$

$$s = \overline{2, s_0}, \quad \|Q_{n_1}\| = \overline{1, m-1};$$

4) *существуют* $\nu_s \in R_+$, $s = \overline{2, s_0}$, *такие, что для всех* $Z \in S(Z, r)$

$$\left[\Lambda W_0(Z_{n_1}) - \sum_{s=2}^{s_0} \pi_s \left\|Z_{n_s}\right\|^2\right]^{-1} \left[\left\|\Theta_{n_1}\left(t, \Psi_{n_1}Z_{n_1}, \left\|\Psi_{n_1}\right\|^{\nu_2} Z_{n_2}, \ldots, \left\|\Psi_{n_1}\right\|^{\nu_{s_0}} Z_{n_{s_0}}\right)\Psi_{n_1}^{-1}\right\| + \right.$$

$$\left. + \sum_{s=2}^{s_0} \left\|\Theta_{n_s}\left(t, \Psi_{n_1}Z_{n_1}, \left\|\Psi_{n_1}\right\|^{\nu_2} Z_{n_2}, \ldots, \left\|\Psi_{n_1}\right\|^{\nu_{s_0}} Z_{n_{s_0}}\right)\right\| \left\|\Psi_{n_1}\right\|^{-\nu_s}\right] = o(1), \quad t \uparrow \omega,$$

$$\pi^k \cdot f_k\left(t, \Psi_{n_1}Z_{n_1}, \left\|\Psi_{n_1}\right\|^{\nu_2} Z_{n_2}, \ldots, \left\|\Psi_{n_1}\right\|^{\nu_{s_0}} Z_{n_{s_0}}\right) = o(1), \quad t \uparrow \omega, \quad k = \overline{1, n}.$$

Тогда д. у. (1) *имеет свойство* $AsSt$ *при* $t \uparrow \omega$.

Доказательство. В д. с. (5) выполним замену $Z_{n_1} = \Psi_{n_1} Y_{n_1}$, $Z_{n_s} = \left\|\Psi_{n_1}\right\|^{\nu_s} Y_{n_s}$, $s = \overline{2, s_0}$, и к д. с. относительно Y_{n_s}, $s = \overline{1, s_0}$, применим аналог леммы [3] об устойчивости в кольцеобразной области, охватывающей начало координат.

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения и другие работы по теории устойчивости и теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во АН СССР, 1956. – 473 с.
2. *Витриченко И. Е., Никоненко В. В.* О сведении к почти блок-треугольному (диагональному) виду линейной неавтономной системы в случае кратного нулевого собственного значения предельной матрицы коэффициентов // Proceed. A. Razmadze Math. Inst. – 1994. – **110.** – P. 59–67.
3. *Костин А. В., Витриченко И. Е.* Обобщение теоремы Ляпунова об устойчивости в случае одного нулевого характеристического показателя для неавтономных систем // Докл. АН СССР. – 1982. – **264,** № 4. – С. 819–822.
4. *Персидский К. П.* О характеристических числах линейной системы дифференциальных уравнений // Изв. АН Каз.ССР. Сер. мат. и мех. – 1947. – № 42(1). – С. 5–47.
5. *Витриченко И. Е.* К устойчивости тривиального решения одного неавтономного квазилинейного уравнения *n*-го порядка в критическом случае кратного нулевого корня предельного характеристического уравнения // Укр. мат. журн. – 1995. – **47,** № 8. – С. 1138–1143.
6. *Костин А. В.* Асимптотика правильных решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1987. – **23,** № 3. – С. 522–526.

Получено 09.02.96