УДК 517.51

О. В. Гладківська (Ін-т кібернетики НАН України, Київ)

ПРИКЛАД ПОВНОЇ ОРТОНОРМОВАНОЇ СИСТЕМИ В ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

We construct a complete orthonormal system of generalized functions in a Hilbert space W^{-1}. We obtain an estimate of the error of approximation in W^{-1}, which is expressed in terms of of the integral modulus of continuity of a function from L_2.

Побудовано повну ортонормовану систему узагальнених функцій у гільбертовому просторі W^{-1}. Знайдено оцінку похибки апроксимації в W^{-1}, яка виражається через інтегральний модуль неперервності функції з L_2.

Розв'язок інтегральних рівнянь часто існує не в звичайних, класичних класах функцій, а в узагальнених. Щоб знайти наближення для таких узагальнених розв'язків, наприклад, методом найменших квадратів, треба мати приклади повних систем узагальнених функцій, які просто обчислюються. Ця робота присвячена саме побудові і обгрунтуванню одного з таких прикладів.

Наведемо необхідні визначення і позначення, додержуючись [1].

Нехай $C^1[0, T]$ — множина неперервно диференційовних на $[0, T]$ функцій $x(\tau)$, для яких

$$x(\tau)|_{\tau=T} = \left.\frac{dx}{d\tau}\right|_{\tau=0} = 0, \qquad (x, y)_1 = \int_0^T \left(\frac{dx}{d\tau}\frac{dy}{d\tau}\right) d\tau,$$

$$\|x\|_1 = \left(\int_0^T \left|\frac{dx}{d\tau}\right|^2 d\tau\right)^{1/2}, \tag{1}$$

а W^{+1} — поповнення множини $C^1[0, T]$ за нормою (1).

Нехай $x(\tau) \in L_2$, $y(\tau) \in W^{+1}$, $\tau \in [0, T]$. Позначимо через W^{-1} поповнення простору L_2 за нормою

$$\|x\|_{-1} = \sup_{y \neq 0,\ y \in W^{+1}} \frac{1}{\|y\|_1} \left|\int_0^T x(\tau)\, y(\tau)\, d\tau\right|.$$

Як вказано, наприклад, в [1], дельта-функцію δ можна розглядати як елемент простору W^{-1}, і для $x \in W^{-1}$ виконуються співвідношення

$$\|x\|_{-1} = \sup_{y \neq 0,\ y \in W^{+1}} \frac{|\langle x, y\rangle|}{\|y\|_1}, \qquad \langle x, y\rangle = \lim_{i \to \infty} \int_0^T x_i(\tau)\, y(\tau)\, d\tau,$$

де $x_i \in L_2$, причому $\|x_i - x\|_{-1} \to 0$, якщо $i \to \infty$.

Позначимо через D оператор диференціювання $\frac{d}{d\tau}$ (маємо на увазі похідну по Соболєву). Оператор D відображає простір W^{+1} на L_2, причому виконується рівність [1] $\|Dy\|_{L_2} = \|y\|_1$, а оператор диференціювання $D^* = -\frac{d}{d\tau}$ переводить простір L_2 на W^{-1} [1]:

$$\|D^* X\|_{-1} = \|X\|_{L_2}. \tag{2}$$

Розділимо інтервал $[0, T]$ на n підінтервалів довжиною $h_n = T/n$ і покладемо $\tau_k^{(n)} = kT/n = kh_n$, $k = \overline{0, n}$; $e_k^{(n)}(\tau) = \delta(\tau - \tau_k^{(n)})$, $\tau \in [0, T]$, $k = \overline{0, n-1}$.

Будемо використовувати інтегральний модуль неперервності функції з простору L_2 [2]:

$$\omega_2(X, h_n) = \sup_{0<\gamma\le h_n} \left(\int_0^T |X(u+\gamma) - X(u)|^2 du \right)^{1/2}, \quad X \in L_2, \quad 0 \le h_n \le T.$$

Доведемо наступне твердження.

Теорема. *Нехай* $x \in W^{-1}$, $X \in L_2$ *і* $D^*X = x$. *Існують такі числа* $\alpha_k^{(n)}$, *що*

$$\left\| x - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^{(n)} \delta(\tau - \tau_k^{(n)}) \right\|_{-1} \le \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \omega_2(X, h_n), \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{3}$$

Доведення. Використовуючи співвідношення (2) і той факт, що дельта-функція є узагальненою похідною функції Хевісайда θ, для $x \in W^{-1}$, $X \in L_2$ маємо

$$\Delta = \left\| x - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^{(n)} \delta(\tau - \tau_k^{(n)}) \right\|_{-1} =$$

$$= \left\| D^* \left(X - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^{(n)} \theta(\tau - \tau_k^{(n)}) \right) \right\|_{-1} =$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{n-1} \int_{jh_n}^{(j+1)h_n} \left| X(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^{(n)} \theta(\tau - kh_n) \right|^2 d\tau \right)^{1/2}.$$

Нехай

$$X_h(\tau) = \frac{1}{2h} \int_{\tau-h}^{\tau+h} X(u)\, du, \quad h > 0,$$

— функція Стеклова. Надалі будемо використовувати такі її властивості [2, с. 178]:

$$\|X - X_h\|_{L_2} \le \omega_2(X, h), \quad \|X_h'\|_{L_2} \le \frac{1}{h} \omega_2(X, h). \tag{4}$$

Знайдемо числа $\alpha_k^{(n)}$, $k = \overline{0, n-1}$, використовуючи функцію $X_h(\tau)$ (при $h = h_n$), з умови

$$\sum_{j=0}^{n-1} \int_{jh}^{(j+1)h} \left| X(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^{(n)} \theta(\tau - kh_n) \right|^2 d\tau =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{jh}^{(j+1)h} |X(\tau) - X_h(jh)|^2 d\tau .$$

Для $jh \le \tau \le (j+1)h$, $j = \overline{0, n-1}$, маємо

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^{(n)} \theta(\tau - kh) = X_h(jh), \qquad \sum_{k=0}^{j} \alpha_k^{(n)} = X_h(jh), \qquad j = \overline{0, n-1}.$$

Остаточно одержимо, що числа $\alpha_k^{(n)}$ мають вигляд

$$\alpha_k^{(n)} = X_h(kh) - X_h((k-1)h), \qquad k = \overline{1, n-1};$$

$$\alpha_0^{(n)} = X_h(0).$$

Оцінимо величину Δ:

$$\Delta = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \int_{jh}^{(j+1)h} |X(\tau) - X_h(jh)|^2 d\tau \right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\sum_{j=0}^{n-1} \int_{jh}^{(j+1)h} |X(\tau) - X_h(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} + \left(\sum_{j=0}^{n-1} \int_{jh}^{(j+1)h} |X_h(\tau) - X_h(jh)|^2 d\tau \right)^{1/2}$$

$$= \|X - X_h\|_{L_2} + \left(\sum_{j=0}^{n-1} \int_{jh}^{(j+1)h} |X_h(\tau) - X_h(jh)|^2 d\tau \right)^{1/2}.$$

Оскільки

$$|X_h(\tau) - X_h(jh)|^2 = \left| \int_{jh}^{\tau} X_h'(u) \cdot 1\, du \right|^2 \le$$

$$\le (\tau - jh) \int_{jh}^{\tau} |X_h'(u)|^2 du \le (\tau - jh) \int_{jh}^{(j+1)h} |X_h'(u)|^2 du,$$

$$\int_{jh}^{(j+1)h} |X_h(\tau) - X_h(jh)|^2 d\tau \le$$

$$\le \int_{jh}^{(j+1)h} \left[(\tau - jh) \int_{jh}^{(j+1)h} |X_h'(u)|^2 du \right] d\tau =$$

$$= \frac{(\tau - jh)^2}{2} \Bigg|_{jh}^{(j+1)h} \int_{jh}^{(j+1)h} |X_h'(u)|^2 du = \frac{h^2}{2} \int_{jh}^{(j+1)h} |X_h'(u)|^2 du,$$

то

$$\left(\sum_{j=0}^{n-1} \int_{jh}^{(j+1)h} |X_h(\tau) - X_h(jh)|^2 d\tau \right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{h^2}{2} \int_{jh}^{(j+1)h} |X_h'(u)|^2 du \right)^{1/2} = \frac{h}{\sqrt{2}} \left(\int_0^T |X'(u)_h|^2 du \right)^{1/2} = \frac{h}{\sqrt{2}} \|X'(u)_h\|$$

Використовуючи нерівності (4), одержуємо наступну оцінку:

$$\Delta = \left\| X - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^{(n)} \theta(\tau - kh) \right\|_{L_2} \le$$

$$\le \|X - X_h\|_{L_2} + \frac{h}{\sqrt{2}} \|X_h'\|_{L_2} \le \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \omega_2(X, h).$$

Теорему доведено.

За допомогою алгоритму Шмідта в просторі W^{-1} можна побудувати ортонормовану систему функцій $\left\{\tilde{e}_k^{(n)}(\tau)\right\}_{k=1}^n$, еквівалентну системі $\left\{e_k^{(n)}(\tau)\right\}_{k=1}^n$, де

$$\tilde{e}_1^{(n)}(\tau) = \frac{\delta(\tau - \tau_1^{(n)})}{\sqrt{T - \tau_1^{(n)}}};$$

$$\tilde{e}_k^{(n)}(\tau) = \frac{\sqrt{T - \tau_{k-1}^{(n)}}\, \delta(\tau - \tau_k^{(n)})}{\sqrt{(T - \tau_k^{(n)})(\tau_k^{(n)} - \tau_{k-1}^{(n)})}} - \frac{\sqrt{T - \tau_k^{(n)}}\, \delta(\tau - \tau_{k-1}^{(n)})}{\sqrt{(T - \tau_{k-1}^{(n)})(\tau_k^{(n)} - \tau_{k-1}^{(n)})}}; \tag{5}$$

$k = 2, 3, \ldots$; $n = 1, 2, \ldots$; k, n — взаємно прості числа.

Покажемо, що застосування системи (5) приводить до функцій, які просто обчислювати (при умові, що просто обчислюються задані функції). Нехай, наприклад, задано лінійний інтегральний оператор

$$K\varphi(t) = \int_0^T K(t, \tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau, \qquad K(t, \tau) \in L_2 \times C.$$

Тоді

$$K\tilde{e}_1^{(n)}(t) = \frac{1}{\sqrt{T - \tau_1^{(n)}}} K(t, \tau_1^{(n)}),$$

$$K\tilde{e}_k^{(n)}(t) = \frac{\sqrt{T - \tau_{k-1}^{(n)}}\, K(t, \tau_k^{(n)})}{\sqrt{(T - \tau_k^{(n)})(\tau_k^{(n)} - \tau_{k-1}^{(n)})}} - \frac{\sqrt{T - \tau_k^{(n)}}\, K(t, \tau_{k-1}^{(n)})}{\sqrt{(T - \tau_{k-1}^{(n)})(\tau_k^{(n)} - \tau_{k-1}^{(n)})}},$$

$\tau_k^{(n)}$, $\tau_{k-1}^{(n)} \in [0, T]$; $k = 2, 3, \ldots$; $n = 1, 2, \ldots$; k, n — взаємно прості числа.

Одержана оцінка (3) і система функцій (5) використані в роботі [3] при розв'язанні задачі ідентифікації для інтегральних динамічних моделей В. М. Глушкова.

1. *Диденко В. П., Ляшко И. И.* Динамические системы с разрывными характеристиками. – Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1977. – 82 с.
2. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
3. *Гладкивская О. В.* Исследование задач идентификации для одного класса динамических моделей: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1990. – 15 с.

Одержано 08.06.95