УДК 517.43+517.5

Г. В. Радзиевский (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ И О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО КОРНЕВЫМ ВЕКТОРАМ ОПЕРАТОРА*

We establish upper bounds of the best approximations of elements of a Banach space $\mathfrak{B}$ by root vectors of an operator A that acts in $\mathfrak{B}$. The corresponding estimates of the best approximations are expressed in terms of a K-functional associated with the operator A. For the operator of differentiation with periodic boundary conditions, these estimates coincide with the classical Jackson inequalities for the best approximations of functions by trigonometric polynomials. In terms of K-functionals, we also prove the abstract Dini–Lipschitz criterion of convergence of partial sums of the decomposition of f from $\mathfrak{B}$ in the root vectors of the operator A to f.

Отримано оцінки зверху найкращих наближень елементів банахового простору $\mathfrak{B}$ за допомогою кореневих векторів оператора A, що діє в $\mathfrak{B}$. Відповідні оцінки найкращих наближень знайдено у термінах K-функціонала, який побудовано за оператором A. Для оператора диференціювання з періодичною крайовою умовою ці оцінки збігаються з класичними нерівностями Джексона про оцінки найкращих наближень функції за допомогою тригонометричнів поліномів. У термінах K-функціоналів доведена також абстрактна ознака Діні – Ліпшіца про збіжність частинних сум розкладу f з $\mathfrak{B}$ за кореневими векторами оператора A до f.

1. Введение. Постановка задачи. Чтобы сформулировать постановку задачи, введем необходимые для этого обозначения и понятия. Пусть A — линейный, вообще говоря, неограниченный оператор, действующий в комплексном банаховом пространстве $\mathfrak{B}$. Условия, содержащиеся в основных утверждениях работы, обеспечивают замкнутость оператора A, однако всюду плотность области его определения не предполагается. Через $\mathfrak{D}(A)$ и $\mathfrak{R}(A)$ обозначим соответственно область определения и область значений этого оператора, а $\mathfrak{D}_\infty(A) = \bigcap_{j=0}^{\infty} \mathfrak{D}(A^j)$, причем $A^0 := I$, где I — тождественный в $\mathfrak{B}$ оператор. Вектор $g \in \mathfrak{D}_\infty(A)$ называется *вектором степени не выше* ζ *относительно оператора* A, если существует такая положительная постоянная $c(g)$, что $\|A^j g\| \le c(g)\zeta^j$, $j = 0, 1, \ldots$. Здесь и далее ζ или ζ_m — положительные числа, а символ $\|\cdot\|$ без индекса означает норму вектора из пространства $\mathfrak{B}$ или норму ограниченного оператора, действующего в $\mathfrak{B}$. Линейное многообразие векторов, имеющих степень не выше ζ относительно оператора A, обозначаем через $\mathfrak{G}_\zeta(A)$.

Далее $\rho(A)$ — резольвентное множество оператора A, а $R(\lambda; A) := (A - \lambda I)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$, — резольвента A. Пусть $\mathcal{T}(\zeta) = \{\lambda : |\lambda| = \zeta\}$ — окружность радиуса ζ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Требование $\operatorname{mes}\{\mathcal{T}(\zeta) \cap \rho(A)\} = 2\pi\zeta$ будет означать, что $R(\zeta e^{i\theta}; A)$ определена почти для всех $\theta \in [0, 2\pi]$.

Для произвольного элемента f из $\mathfrak{B}$ и числа ζ определим величину

$$E_\zeta(f, A) = \inf_{g \in \mathfrak{G}_\zeta} \|f - g\|,$$

т. е. наилучшее приближение элемента f посредством векторов степени не выше ζ относительно оператора A. Очевидно, что $E_\zeta(f, A)$ — полунорма относительно $f \in \mathfrak{B}$ и $E_\zeta(f, A) \le \|f\|$, $f \in \mathfrak{B}$.

*Выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий.

© Г. В. РАДЗИЕВСКИЙ, 1997

Считая r натуральным числом, введем специального вида K-функционалы, построенные по оператору A согласно правилу

$$K(\delta, f; \mathfrak{B}, \mathfrak{D}(A^r)) = \inf_{g \in \mathfrak{D}(A^r)} (\|f-g\| + \delta \|A^r g\|), \quad \delta \geq 0, \quad f \in \mathfrak{B}. \tag{1}$$

Одной из основных целей данной работы является получение оценок сверху величины $E_\zeta(f, A)$ через K-функционал (1). В работе показано, в частности, что *если* $\operatorname{mes}\{\mathcal{T}(\zeta) \cap \rho(A)\} = 2\pi\zeta$ *и*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+\left(\zeta \left\| R(\zeta e^{i\theta}; A)\right\|\right) d\theta = c(\zeta) < \infty \tag{2}$$

$(\ln^+ a = \max\{\ln a, 0\},\ a > 0)$, *то для всех* r *справедлива оценка*

$$E_\zeta(f, A) \leq (\exp(2r-1)c(\zeta))\, K(\zeta^{-r}, f; \mathfrak{B}, \mathfrak{D}(A^r)), \quad f \in \mathfrak{B}. \tag{3}$$

В условии (2) и в утверждении (3) число ζ фиксировано, однако в приложениях оценка (3) используется, если не при всех ζ, то, по крайней мере, при $\zeta = \zeta_m$, где последовательность $\zeta_m \nearrow \infty$ при $m \to \infty$.

Поясним оценку (3) на двух примерах. Рассмотрим вначале оператор дифференцирования $\tilde{\mathfrak{D}}$, действующий в пространстве непрерывных на отрезке $[0, 2\pi]$ функций, удовлетворяющих краевому условию $x(0) = x(2\pi)$. Несложно показать, что для оператора $\tilde{\mathfrak{D}}$ справедливы следующие свойства: 1) величина $E_\zeta(f, \tilde{\mathfrak{D}})$ совпадает с наилучшими приближениями функции f посредством тригонометрических полиномов степени не выше ζ; 2) в условии (2) постоянная $c(\zeta)$ равномерно ограничена по ζ; 3) K-функционал (1) с оператором $A = \tilde{\mathfrak{D}}$ допускает двусторонние оценки через модуль гладкости порядка r функции f, определенный по периодическому продолжению f на $\mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ — множество всех действительных чисел. Поэтому для оператора $A = \tilde{\mathfrak{D}}$ оценка (3) совпадает с классическим неравенством Джексона [1] (вернее с его уточнением, данным С. Б. Стечкиным [2], теорема 1) об оценках сверху наилучших приближений индивидуальной функции f посредством тригонометрических полиномов (подробности см. в п. 2).

Если же рассмотреть оператор дифференцирования $\mathfrak{D}$, действующий в пространстве непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций, то спектр его будет непрерывен и: 1) величина $E_\zeta(f, \mathfrak{D})$ совпадает с наилучшим приближением функции f посредством функций экспоненциального типа ζ; 2) в условии (2) постоянная $c(\zeta)$ равномерно ограничена по ζ; 3) K-функционал (1) с оператором $A = \mathfrak{D}$ допускает двусторонние оценки через модуль гладкости порядка r функции f. Поэтому из неравенства (3) следует известное неравенство Ахиезера [3] (п. 89) об оценках сверху наилучших приближений функций посредством целых функций конечного экспоненциального типа (подробности см. в п. 2).

Эти примеры показывают, что K-функционал (1) в неравенстве (3) и в других утверждениях данной работы играет ту же роль, что и модуль гладкости порядка r в аналогичных утверждениях теории функций.

Работа состоит из трех пунктов. В п. 2 сформулированы и пояснены с точки зрения теории функций основные результаты, доказательство которых имеется в п. 3. В данной статье не даны сколько-нибудь существенные приложения полученных результатов. Таким приложениям будут посвящены другие работы.

Некоторые из них сформулированы в [4, 5], где получены оценки наилучших приближений индивидуальной функции f по системе корневых функций оператора, порожденного регулярной краевой задачей для обыкновенного дифференциального уравнения.

2. Формулировка основных результатов. Вначале приведем теорему, являющуюся уточнением оценки (3). Отметим, что в этой теореме и далее, если не оговорено противное, постоянные, содержащиеся в утверждениях теорем, те же, что и в их условиях, а r — натуральное число.

Теорема 1. *Пусть существуют такое множество окружностей* $\mathcal{T}(\zeta_m)$ *и такая положительная функция* β, *определенная на* $(0, \infty)$, *что* $\operatorname{mes}\{\mathcal{T}(\zeta_m)\cap\rho(A)\}=2\pi\zeta_m$ *и*

$$\sup_m \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+\left(\frac{\zeta_m}{\beta(\zeta_m)}\left\| R(\zeta_m e^{i\theta}; A)\right\|\right)d\theta \;=\; c \;<\; \infty. \tag{4}$$

Тогда для всех m, r *и элементов* $f\in\mathfrak{B}$ *справедлива оценка*

$$E_{\zeta_m}(f, A) \le K\big((\exp(2r-1)c)\beta(\zeta_m)\zeta_m^{-r}, f; \mathfrak{B}, \mathfrak{D}(A^r)\big). \tag{5}$$

При $\beta(\zeta)\equiv 1$ условия (2) и (4) совпадают, поэтому оценка (3) следует из оценки (5) и очевидного неравенства $K(\mu\delta, f; \mathfrak{B}, \mathfrak{D}(A^r)) \le \mu K(\delta, f; \mathfrak{B}, \mathfrak{D}(A^r))$, где постоянная $\mu\ge 1$.

Дадим описание линейного многообразия $\mathfrak{G}_\zeta(A)$ в случае оператора A, имеющего мероморфную резольвенту. Требование мероморфности резольвенты $R(\lambda; A)$ означает, что весь спектр оператора A состоит лишь из изолированных собственных значений $\lambda_k(A)$, которые являются полюсами $R(\lambda; A)$. Тогда [6] (гл. III, §6, п. 5) в некоторой проколотой окрестности каждого собственного значения $\lambda_k(A)$ справедливо представление

$$R(\lambda; A) = -\frac{P_k}{\lambda-\lambda_k(A)} - \sum_{j=1}^{d_k}\frac{D_k^j}{(\lambda-\lambda_k(A))^{j+1}} + U_k(\lambda), \tag{6}$$

где P_k — проектор Ф. Рисса, D_k — такой нильпотентный оператор, что $D_k^{d_k}\ne 0$ и $D_k^{d_k+1}=0$, а $P_kD_k=D_kP_k=D_k$ и U_k — голоморфная в точке $\lambda_k(A)$ функция со значениями в множестве ограниченных операторов, действующих в $\mathfrak{B}$. При доказательстве леммы 1 в п. 3 будет показано, что P_k — проектор на линейную оболочку собственных и присоединенных (корневых) векторов оператора A, отвечающих собственному значению $\lambda_k(A)$. В (6) и далее суммы с верхним пределом суммирования, меньшим нижнего, считаются равными нулю. Поэтому если у собственных векторов, отвечающих собственному значению $\lambda_k(A)$, нет присоединенных элементов, то числа $d_k=0$, а значит, в этом случае сумма по j в правой части равенства (6) отсутствует. Достаточным условием того, что оператор A имеет мероморфную резольвенту, является требование ее компактности [6] (гл. III, §6, п. 8).

В п. 3 будет доказано следующее утверждение, описывающее все векторы степени не выше ζ относительно оператора A, имеющего мероморфную резольвенту.

Лемма 1. *Пусть оператор A имеет мероморфную резольвенту. Если* $\zeta<|\lambda_k(A)|$ *для всех* k, *то* $\mathfrak{G}_\zeta(A)=\{0\}$. *Если же* $\zeta\ge|\lambda_s(A)|$ *для некоторого* s, *то* $\mathfrak{G}_\zeta(A)$ *совпадает с линейной оболочкой всех собственных и присое-*

диненных векторов оператора A, *отвечающих собственным значениям* $\lambda_k(A)$ *с* $|\lambda_k(A)| < \zeta$, *и тех собственных векторов оператора* A, *модули собственных значений которых совпадают с* ζ.

Используя теперь лемму 1, выведем из частного случая теоремы 1 — оценки (3) — упомянутые неравенства Джексона и Ахиезера. Далее C — пространство непрерывных на отрезке $[0, 2\pi]$ функций x с нормой $\|x\|_C :=$ $:= \max_{0 \le t \le 2\pi} |x(t)|$, а BC — пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций x с $\|x\|_{BC} := \sup_{-\infty < t < \infty} |x(t)|$. Пусть $\tilde{C} = \{x \in C\colon x(0) = x(2\pi)\}$, величина

$$\mathscr{E}_m(f) = \inf_{\alpha_k \in \mathbb{C}} \left\| f(\cdot) - \sum_{k=-m}^{m} \alpha_k e^{ik(\cdot)} \right\|_C, \qquad m = 0, 1, \ldots, \ f \in \tilde{C},$$

а модуль гладкости

$$\tilde{\omega}^{[r]}(\delta, f; C) = \sup_{0 \le h \le \delta} \left\| \Delta_h^r \tilde{f} \right\|_{BC}, \qquad \delta \ge 0,$$

определен по периодическому продолжению $\tilde{f}$ функции $f \in \tilde{C}$, т. е.

$$\tilde{f}(t) := f(t + 2\pi k), \qquad -2\pi k < t \le -2\pi(k-1), \qquad k = 0, \pm 1, \ldots,$$

и

$$\left(\Delta_h^r \tilde{f}\right)(t) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} \tilde{f}(t - hj).$$

Обобщенное неравенство Джексона. *Для любого* r *существует такая положительная постоянная* c_r, *что*

$$\mathscr{E}_{m-1}(f) \le c_r \tilde{\omega}^{[r]}(m^{-1}, f; C), \qquad m = 1, 2, \ldots, \qquad f \in \tilde{C}. \tag{7}$$

Неравенство (7) в случае $r = 1$ установлено Д. Джексоном [1], для $r = 2$ — Н. И. Ахиезером [3] (п. 89), а для $r \ge 3$ — С. Б. Стечкиным [2] (теорема 1).

В формулировке неравенства Ахиезера содержится множество $\mathfrak{G}_\zeta$, состоящее из целых функций g, допускающих оценку $|g(z)| \le c(g) \exp(\zeta |z|)$, $z \in$ $\in \mathbb{C}$, с некоторой положительной постоянной $c(g)$ и сужение которых на $\mathbb{R}$ принадлежит пространству BC. По этому множеству $\mathfrak{G}_\zeta$ определим величину

$$\mathscr{B}_\zeta(f) = \inf_{g \in \mathfrak{G}_\zeta} \|f - g\|_{BC}, \qquad \zeta > 0, \qquad f \in BC,$$

и пусть

$$\omega^{[r]}(\delta, f; BC) = \sup_{0 \le h \le \delta} \left\| \Delta_h^r f \right\|_{BC}, \qquad \delta \ge 0, \qquad f \in BC.$$

Обобщенное неравенство Ахиезера. *Для любого* r *существует такая положительная постоянная* c_r, *что*

$$\mathscr{B}_\zeta(f) \le c_r \omega^{[r]}(\zeta^{-1}, f; BC), \qquad \zeta > 0, \qquad f \in BC. \tag{8}$$

Для $r = 1$ и 2 неравенство (8) доказано Н. И. Ахиезером [3] (п. 89), а для $r \ge$ ≥ 3 — А. Ф. Тиманом [7] (п. 5.1.3).

Вначале докажем неравенство (8), так как установленные в этом доказательстве оценки будут использованы при выводе неравенства (7).

***Вывод неравенства* (8).** Обозначим через BC^r пространство r раз непрерывно дифференцируемых функций x, заданных на $\mathbb{R}$, для которых $x^{(l-1)} \in BC$, $l = 1, \dots, r+1$. Пусть оператор $\mathfrak{D}$ действует в пространстве BC по правилу

$$\mathfrak{D}x = -ix', \qquad x \in \mathfrak{D}(\mathfrak{D}) := BC^1. \tag{9}$$

Резольвента оператора $\mathfrak{D}$ имеет вид

$$[R(\lambda; \mathfrak{D})f](t) = i\int_0^\infty e^{i\lambda\tau} f(t-\tau)\,d\tau, \qquad \operatorname{Im}\lambda > 0, \qquad f \in BC, \tag{10}$$

$$[R(\lambda; \mathfrak{D})f](t) = i\int_0^\infty e^{-i\lambda\tau} f(t+\tau)\,d\tau, \qquad \operatorname{Im}\lambda < 0, \qquad f \in BC. \tag{11}$$

Из этих представлений с использованием равенства $\| e^{-\eta(\cdot)} \|_{L_1[0,\infty)} = \eta^{-1}$, $\eta > 0$, получаем оценку

$$\| R(\lambda; \mathfrak{D}) \| \le |\operatorname{Im}\lambda|^{-1}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \qquad \operatorname{Im}\lambda \ne 0. \tag{12}$$

Тем самым показано, что оператор $\mathfrak{D}$ удовлетворяет условию (2) при всех $\zeta > 0$, а постоянная $c(\zeta) \le \ln 2$ (см., например, [8], формула 865.11). Пусть теперь g — вектор степени не выше ζ относительно оператора $\mathfrak{D}$. Это означает, что g — бесконечно дифференцируемая функция, $g^{(j)} \in BC$ и $\|g^{(j)}\|_{BC} \le c(g)\zeta^j$, $j = 0, 1, \dots$. Значит, g голоморфно продолжается на всю комплексную плоскость и $|g(z)| \le c(g)\exp(\zeta|z|)$. Тем самым доказано включение $\mathfrak{G}_\zeta(\mathfrak{D}) \subseteq \mathfrak{G}_\zeta$ и поэтому $\mathfrak{B}_\zeta(f) \le E_\zeta(f, \mathfrak{D})$, $\zeta > 0$, $f \in BC$.

Но так как $\mathfrak{D}^r x = (-i)^r x^{(r)}$, $x \in \mathfrak{D}(\mathfrak{D}^r) = BC^r$, то K-функционал (1) для оператора $A = \mathfrak{D}$ запишется в виде

$$K(\delta, f; BC, \mathfrak{D}(\mathfrak{D}^r)) = \inf_{g \in BC^r} (\|f - g\|_{BC} + \delta \| g^{(r)} \|_{BC}), \qquad f \in BC.$$

Для этого K-функционала справедлива оценка [9] (§6)

$$K(\delta^r, f; BC, \mathfrak{D}(\mathfrak{D}^r)) \le c_r' \omega^{[r]}(\delta, f; BC), \qquad \delta > 0, \qquad f \in BC, \tag{13}$$

подставляя которую в правую часть неравенства (3) и учитывая, что $\mathfrak{B}_\zeta(f) \le E_\zeta(f, \mathfrak{D})$, получаем (8).

***Замечание* 1.** Покажем, что на самом деле справедливо равенство $\mathfrak{G}_\zeta = \mathfrak{G}_\zeta(\mathfrak{D})$. Действительно, согласно известному неравенству Бернштейна (см., например, [3], п. 73) для любой функции $g \in \mathfrak{G}_\zeta$ выполнена оценка $\| g^{(j)} \|_{BC} \le \| g \|_{BC} \zeta^j$, $j = 0, 1, \dots$, поэтому $\mathfrak{G}_\zeta \subseteq \mathfrak{G}_\zeta(\mathfrak{D})$. Отсюда и из уже доказанного включения $\mathfrak{G}_\zeta(\mathfrak{D}) \subseteq \mathfrak{G}_\zeta$ получаем $\mathfrak{G}_\zeta = \mathfrak{G}_\zeta(\mathfrak{D})$. Следовательно, $\mathfrak{B}_\zeta(f) = E_\zeta(f, \mathfrak{D})$. Равенство $\mathfrak{G}_\zeta = \mathfrak{G}_\zeta(\mathfrak{D})$ содержит теорему 5 из [10] для случая $p = \infty$ (при $1 \le p < \infty$ доказательство не изменяется). Отметим, что векторы степени не выше ζ в работе [10] названы векторами экспоненциального типа не выше ζ. Однако и в случае оператора дифференцирования они образуют подмножество целых функций экспоненциального типа не выше ζ, поэтому здесь использован термин „степень", вполне согласующийся с аналогичным термином для тригонометрических полиномов, фигурирующих в обобщенном неравенстве Джексона. Понятие векторов g степени не выше ζ относительно оператора A тесно связано с понятием аналитического распространения $R(\lambda; A)g$ в область $|\lambda| > \zeta$, [11] (гл. XV, §2).

***Вывод неравенства* (7).** Пусть $\tilde{C}^r = \{ x \in C^r : x^{(l-1)} \in \tilde{C}, l = 1, \dots, r+1 \}$, а оператор $\tilde{\mathfrak{D}}$, действует в пространстве $\tilde{C}$ по правилу

$$\tilde{\mathfrak{D}}x = -ix', \quad x \in \mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{D}}) := \tilde{C}^1. \tag{14}$$

Заметим, что если $\tilde{f}$ — периодическое продолжение функции $f \in \tilde{C}$, то из равенств (10) и (11) получаем тождество $[R(\lambda; \mathfrak{D})\tilde{f}](t) = [R(\lambda; \tilde{\mathfrak{D}})f](t)$, $0 \leq$ $\leq t \leq 2\pi$, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. Поэтому согласно оценке (12)

$$\| R(\lambda; \tilde{\mathfrak{D}}) \| \leq |\operatorname{Im}\lambda|^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Im}\lambda \neq 0, \tag{15}$$

т. е. оператор $\tilde{\mathfrak{D}}$ удовлетворяет условию (2) при произвольном $\zeta > 0$, а постоянная $c(\zeta) \leq \ln 2$. Кроме того, из равенства

$$[R(\lambda; \tilde{\mathfrak{D}})f](t) = \frac{-i2e^{i\lambda t}}{\sin \pi\lambda} \int\limits_0^{2\pi} e^{i\lambda(\pi-\tau)} f(\tau)\, d\tau + i \int\limits_0^t e^{i\lambda(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau \tag{16}$$

следует, что оператор $\tilde{\mathfrak{D}}$ имеет мероморфную резольвенту.

Функции $e^{ik(\cdot)}$, $k = 0, \pm 1, \dots$, являются собственными функциями оператора $\tilde{\mathfrak{D}}$, отвечающими собственным значениям $\lambda_k(\tilde{\mathfrak{D}}) = k$, а присоединенных функций у этого оператора нет. Отсюда и из леммы 1 имеем

$$\mathscr{E}_{m-1}(f) = E_\zeta(f; \tilde{\mathfrak{D}}), \quad m-1 < \zeta < m, \quad m = 1, 2, \dots . \tag{17}$$

А так как $\tilde{\mathfrak{D}}^r x = (-i)^r x^{(r)}$, $x \in \mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{D}}^r) = \tilde{C}^r$, то K-функционал (1) для оператора $A = \tilde{\mathfrak{D}}$ запишется в виде

$$K(\delta, f; \tilde{C}, \mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{D}}^r)) = \inf_{g \in \tilde{C}^r} (\| f - g \|_C + \delta \| g^{(r)} \|_C), \quad f \in \tilde{C}.$$

Для этого K-функционала справедлива оценка [9] (§6)

$$K(\delta^r, f; \tilde{C}, \mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{D}}^r)) \leq c_r' \tilde{\omega}^{[r]}(\delta, f; C), \quad \delta > 0, \quad f \in \tilde{C}, \tag{18}$$

подставляя которую в правую часть неравенства (3), с учетом равенств (17) получаем (7).

Рассматривая оператор дифференцирования соответственно в пространствах $L_p[0, 2\pi]$, $L_p(-\infty, \infty)$, в весовых пространствах и в пространствах функций многих переменных из оценки (3), как это было сделано при выводе неравенств (7) и (8), выводим обобщенные неравенства Джексона и Ахиезера для соответствующих пространств (см., например, [3], п. 89, [7], п. 5.3, [12], §5.1–5.3, [13], гл. VI, §10). Рассмотрение таких приложений оценки (3) показывает, что в случае, когда спектр оператора состоит лишь из изолированных собственных значений, требование мероморфности его резольвенты предпочтительнее требования компактности (например, если оператор дифференцирования определен на конечном отрезке, но действует лишь по одной переменной в пространстве функций многих переменных, то резольвента его мероморфна, но не компактна).

***Замечание* 2.** Оценки (13) и (18) выполнены с постоянной $c_r' = (2r)^r$. Кроме того, справедливы неравенства

$$\omega^{[r]}(\delta, f; BC) \le 2^r K(\delta^r, f; BC, \mathfrak{D}(\mathfrak{D}^r)), \quad \delta > 0, \quad f \in BC,$$

$$\tilde{\omega}^{[r]}(\delta, f; C) \le 2^r K(\delta^r, f; \tilde{C}, \mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{D}}^r)), \quad \delta > 0, \quad f \in \tilde{C}.$$

В обзоре [9] (§6) эти неравенства вместе с оценками (13) и (18) названы формулами Лионса. Отметим, что в приведенном здесь случае формулы Лионса устанавливаются весьма просто (см., например, доказательство оценок (16) из утверждения 2 работы [14]).

Теорема 1 получена в п. 3 как следствие оценок норм оператора суммирования, построенного по оператору A и голоморфному ядру α (лемма 4). В этом же пункте, в частности, установлены оценки скорости сходимости средних в трех методах суммирования, которые в случае оператора $A = \tilde{\mathfrak{D}}$ (т. е. в случае тригонометрического ряда) совпадают со средними в методах суммирования Зигмунда, М. Рисса и с частными суммами ряда Фурье. Здесь приведем один частный случай теоремы 6.

Теорема 2. *Пусть оператор A имеет мероморфную резольвенту, удовлетворяющую условию: существуют такая последовательность окружностей $\mathcal{T}(\zeta_m)$ с $\zeta_m \nearrow \infty$ при $m \to \infty$ и такие положительные постоянные c и d, что*

$$\| R(\lambda; A) \| \le c \min\{ d, |\operatorname{Im} \lambda|^{-1} \}, \quad \lambda \in \mathcal{T}(\zeta_m), \quad m = 1, 2, \ldots .$$

Тогда для достаточно больших m $(\zeta_m \ge d^{-1})$, всех r и элементов $f \in \mathfrak{B}$ справедлива оценка

$$\left\| f - \sum_{k:\, |\lambda_k(A)| \le \zeta_m} P_k f \right\| \le$$

$$\le \frac{2c}{\pi} (\ln \zeta_m + \ln 2d + \pi) K(\zeta_m^{-r}, f; \mathfrak{B}, \mathfrak{D}(A^r)),$$

в которой P_k — проекторы Ф. Рисса из представления (6).

***Следствие* 1.** *Пусть оператор A удовлетворяет условию теоремы* 2, *а для вектора $f \in \mathfrak{B}$ при некотором r выполнено соотношение*

$$\lim_{\delta \searrow 0} K(\delta^r, f; \mathfrak{B}, \mathfrak{D}(A^r)) \ln \delta = 0. \tag{19}$$

Тогда

$$\lim_{m \to \infty} \left\| f - \sum_{k:\, |\lambda_k(A)| \le \zeta_m} P_k f \right\| = 0. \tag{20}$$

Из следствия 1 выводится признак Дини – Липшица о сходимости ряда Фурье по тригонометрической системе. Действительно, рассмотрим оператор $\tilde{\mathfrak{D}}$, заданный соотношениями (14). Из представления (16) его резольвенты следует, что существует такая постоянная $d\ (\ge 1)$, для которой

$$\| R(\lambda; \tilde{\mathfrak{D}}) \| \le d, \quad |\lambda| = m - 1/2, \quad |\operatorname{Im} \lambda| \le 1, \quad m = 1, 2, \ldots .$$

Эта оценка и оценка (15) показывают, что

$$\| R(\lambda; \tilde{\mathfrak{D}}) \| \le \min\{ d, |\operatorname{Im} \lambda|^{-1} \}, \quad \lambda \in \mathcal{T}(m - 1/2), \quad m = 1, 2, \ldots . \tag{21}$$

Тем самым оператор $\tilde{\mathfrak{D}}$ удовлетворяет условию теоремы 2 с последовательностью $\zeta_m = m - 1/2$. Очевидно также, что для оператора $\tilde{\mathfrak{D}}$ сумма

$$\sum_{k:\, |\lambda_k(\tilde{\mathfrak{D}})| \le m-1/2} P_k f$$

совпадает с частной суммой порядка $m-1$ ряда Фурье функции f по тригонометрической схеме. Если теперь функция $f(\in \tilde{C})$ удовлетворяет условию Дини – Липшица

$$\lim_{\delta \searrow 0} \tilde{\omega}^{[r]}(\delta, f; C) \ln \delta = 0, \tag{22}$$

то из оценки (18) следует, что для f выполнено соотношение (19) с оператором $A = \tilde{\mathfrak{D}}$. Поэтому на основании следствия 1 получаем признак Дини – Липшица: *если функция* $f \in \tilde{C}$ *удовлетворяет условию* (22), *то ее ряд Фурье равномерно сходится к* f *на отрезке* $[0, 2\pi]$. (Из свойств модулей гладкости и из неравенства Маршо [7] (п. 3.3.2) вытекает, что выполнение требования (22) при некотором r равносильно выполнению этого же требования при $r = 1$.)

Отметим еще, что как показал С. М. Никольский [15], признак Дини – Липшица в определенном смысле неулучшаем. Поэтому указанный в следствии 1 признак сходимости (19) неулучшаем на всем классе операторов, действующих в произвольном банаховом пространстве и удовлетворяющих условию теоремы 2.

3. Доказательство основных результатов. Далее все интегралы от векторнозначных функций и, в частности, от операторнозначных функций понимаются в смысле Бохнера (см., например, [16], гл. III, §1). Отметим одно часто используемое свойство таких интегралов (см. теоремы 3.7.4, 3.7.12 и 3.8.2 в [16]).

Предложение 1. *Пусть A — замкнутый оператор, действующий в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$, функция $\alpha \in L_1[0, 2\pi]$, а $R(\cdot)$ — такая функция, определенная почти всюду на отрезке $[0, 2\pi]$ и принимающая свои значения в множестве ограниченных операторов, действующих в $\mathfrak{B}$, что $\mathfrak{R}(R(\theta)) \subseteq \subseteq \mathfrak{D}(A)$ и функции $R(\cdot)$ и $AR(\cdot)$ непрерывны в смысле операторной нормы почти всюду на отрезке $[0, 2\pi]$. Предположим также, что $\alpha(\cdot)\|R(\cdot)\| \in \in L_1[0, 2\pi]$ и $\alpha(\cdot)\|AR(\cdot)\| \in L_1[0, 2\pi]$. Тогда справедливы соотношения*

$$\mathfrak{R}\left(\int_0^{2\pi} \alpha(\theta) R(\theta)\, d\theta\right) \subseteq \mathfrak{D}(A), \qquad A\int_0^{2\pi} \alpha(\theta) R(\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} \alpha(\theta) A R(\theta)\, d\theta$$

и оценка

$$\left\| A\int_0^{2\pi} \alpha(\theta) R(\theta)\, d\theta \right\| \le \int_0^{2\pi} |\alpha(\theta)| \, \| AR(\theta) \| \, d\theta.$$

Через H_1 обозначен класс Харди голоморфных в единичном круге функций α, для которых $\|\alpha(\zeta e^{i(\cdot)})\|_{L_1[0,2\pi]}$ равномерно ограничена по $\zeta < 1$. Если функция $\alpha \in H_1$ то для почти всех $\theta \in [0, 2\pi]$ существует радиальный предел $\alpha(e^{i\theta}) := \lim_{\zeta \nearrow 1} \alpha(\zeta e^{i\theta})$, называемый ее граничным значением, и $\alpha(e^{i(\cdot)}) \in L_1[0, 2\pi]$. Функция $\alpha \in H_1$ восстанавливается по своим граничным значениям с помощью интеграла Коши. Эти и другие свойства функций из класса Харди H_1, используемые далее, можно найти, например, в [17].

При интегрировании по окружности $\mathcal{T}(\zeta)$ предполагается, что $\mathcal{T}(\zeta)$ ориентирована против часовой стрелки.

Лемма 2. *Пусть функция* $\alpha \in H_1$, *число* ζ — *фиксировано,* $\operatorname{mes}\{\mathcal{T}(\zeta) \cap \cap \rho(A)\} = 2\pi\zeta$ *и функция* $\alpha(e^{i(\cdot)})\|R(\zeta e^{i(\cdot)}; A)\| \in L_1[0, 2\pi]$. *Тогда оператор*

$$S(\alpha, A; \zeta) = \frac{-1}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{T}(\zeta)} \alpha\left(\frac{\lambda}{\zeta}\right) R(\lambda; A)\, d\lambda \tag{23}$$

имеет следующие свойства: $\Re(S(\alpha, A; \zeta)) \subseteq \mathfrak{G}_\zeta(A)$ *и*

$$\| A^j S(\alpha, A; \zeta) \| \le c(\alpha, A; \zeta)\zeta^j, \quad j = 0, 1, \ldots, \tag{24}$$

с постоянной

$$c(\alpha, A; \zeta) = \frac{\zeta}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left|\alpha(e^{i\theta})\right| \left\| R(\zeta e^{i\theta}; A) \right\| d\theta. \tag{25}$$

Если, кроме того, $\alpha(\lambda) \ne 0$ *при* $|\lambda| \le \zeta_1/\zeta$, *где* ζ_1 — *фиксировано и* $\zeta_1 < < \zeta$, *то* $\mathfrak{G}_{\zeta_1}(A) \subseteq \Re(S(\alpha, A; \zeta))$.

Доказательство. Корректность определения оператора $S(\alpha, A; \zeta)$ вытекает из условий леммы, на основании которых функция $R(\zeta e^{i(\cdot)}; A)$ непрерывна по операторной норме почти всюду на отрезке $[0, 2\pi]$. При $j = 0$ оценка (24) следует из определения оператора $S(\alpha, A; \zeta)$. При произвольном натуральном значении j справедлива формула

$$A^j S(\alpha, A; \zeta) = \frac{-1}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{T}(\zeta)} \lambda^j \alpha\left(\frac{\lambda}{\zeta}\right) R(\lambda; A)\, d\lambda;$$

доказательство ее проводится по индукции с использованием тождества $AR(\lambda; A) = I + \lambda R(\lambda; A)$, $\lambda \in \rho(A)$, предположения о $\alpha \in H_1$ и предложения 1. Из этой формулы и предложения 1 выводится справедливость оценки (24) для всех j, а из нее, в свою очередь, следует включение $\Re(S(\alpha, A; \zeta)) \subseteq \mathfrak{G}_\zeta(A)$.

Установим теперь второе утверждение леммы. Пусть вектор $g \in \mathfrak{G}_{\zeta_1}(A)$. Тогда вектор-функция y, заданная рядом

$$y(\lambda) = -\frac{g}{\lambda} - \frac{Ag}{\lambda^2} - \frac{A^2 g}{\lambda^3} - \ldots, \tag{26}$$

будет голоморфной при $|\lambda| > \zeta_1$. В силу замкнутости оператора A значения $y(\lambda)$ лежат в $\mathfrak{D}_\infty(A)$ и справедливо очевидное тождество $(A - \lambda I)y(\lambda) = g$. Отсюда, учитывая вид (23) оператора $S(\alpha, A; \zeta)$ и предложение 1, получаем

$$S(\alpha, A; \zeta)g - \alpha(\lambda/\zeta)g =$$
$$= (A - \lambda I)(S(\alpha, A; \zeta)y(\lambda) - \alpha(\lambda/\zeta)y(\lambda)), \quad \zeta_1 < |\lambda| < \zeta. \tag{27}$$

Найдем теперь другое выражение векторнозначной функции, содержащейся в левой части этого равенства. Для этого, воспользовавшись формулой

$$R(z; A) - (\lambda - z)^{-1}I = -(\lambda - z)^{-1}(A - \lambda I)R(z; A), \quad z \in \rho(A), \quad \lambda \ne z,$$

теоремой 3.7.12 из [16] и предположением о $\alpha \in H_1$, будем иметь

$$S(\alpha, A; \zeta)g - \alpha(\lambda/\zeta)g = (A - \lambda I)x(\lambda), \quad |\lambda| < \zeta, \tag{28}$$

где голоморфная в круге $\{\lambda : |\lambda| < \zeta\}$ вектор-функция

$$x(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{T}(\zeta)} \frac{\alpha(z/\zeta)R(z;A)g}{\lambda - z} dz, \quad |\lambda| < \zeta.$$

Пусть $\lambda_0 \in \mathcal{T}(\zeta) \cap \rho(A)$. Тогда оператор $A - \lambda I$ обратим в некоторой окрестности точки λ_0. Отсюда, сравнивая равенства (27), (28) и используя теорему единственности для голоморфных функций, заключаем, что

$$x(\lambda) = S(\alpha, A; \zeta)y(\lambda) - \alpha(\lambda/\zeta)y(\lambda), \quad \zeta_1 < |\lambda| < \zeta.$$

По условию леммы найдется такое ζ_0 с $\zeta_1 < \zeta_0 < \zeta$, что $\alpha(\lambda) \neq 0$ при $|\lambda| \leq \leq \zeta_0/\zeta$. Интегрируя теперь по окружности $\mathcal{T}(\zeta_0)$ равенство

$$(\alpha(\lambda/\zeta))^{-1}x(\lambda) = (\alpha(\lambda/\zeta))^{-1}S(\alpha, A; \zeta)y(\lambda) - y(\lambda),$$

а также учитывая голоморфность в замкнутом круге $\{\lambda : |\lambda| \leq \zeta_0\}$ вектор-функции $(\alpha(\lambda/\zeta))^{-1}x(\lambda)$ и равенство (26), имеем

$$g = S(\alpha, A; \zeta)f, \quad f = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\mathcal{T}(\zeta_0)} (\alpha(\lambda/\zeta))^{-1} y(\lambda)\, d\lambda.$$

Так как по предположению g — произвольный вектор, принадлежащий $\mathfrak{G}_{\zeta_1}(A)$, то установлено включение $\mathfrak{G}_{\zeta_1}(A) \subseteq \mathfrak{R}(S(\alpha, A; \zeta))$, а значит, лемма 2 доказана.

Найдем выражение оператора $S(\alpha, A; \zeta)$ в случае мероморфной резольвенты оператора A и числа $\zeta \neq |\lambda_k(A)|$ при всех k. Из представления (6) резольвенты $R(\lambda; A)$ и из определения (23) заключаем, что для любой функции $\alpha \in H_1$ справедливо равенство

$$S(\alpha, A; \zeta) = \sum_{k:\, |\lambda_k(A)| < \zeta} \left\{ \alpha\left(\frac{\lambda_k(A)}{\zeta}\right) P_k + \sum_{j=1}^{d_k} \frac{1}{j!} \alpha^{(j)}\left(\frac{\lambda_k(A)}{\zeta}\right)\left(\frac{D_k}{\zeta}\right)^j \right\}. \tag{29}$$

Учтя теперь свойство проекторов Ф. Рисса P_k и операторов D_k, входящих в представление (6) и отмеченных в п. 2, получаем, что область значений оператора $S(\alpha, A; \zeta)$ лежит в замкнутой линейной оболочке собственных и присоединенных векторов оператора A, отвечающих его собственным значениям $\lambda_k(A)$ с $|\lambda_k(A)| < \zeta$. Это свойство оператора $S(\alpha, A; \zeta)$ оправдывает такие определения, которые даются здесь в предположении, что выполнены требования леммы 2, обеспечивающие существование оператора $S(\alpha, A; \zeta)$ и постоянной $c(\alpha, A; \zeta)$. Оператор $S(\alpha, A; \zeta)$, заданный равенством (23), называется *оператором суммирования с ядром* α; вектор $S(\alpha, A; \zeta)f$ — *средним (или методом суммирования) элемента* f *по ядру* α, а величина $c(\alpha, A; \zeta)$, заданная формулой (25), — *постоянной суммирования*.

Рассмотрим три ядра суммирования: $\alpha(\lambda) \equiv 1$, $\alpha(\lambda) = 1 - \lambda^s$ и $\alpha(\lambda) = (1 - \lambda^2)^\gamma$, $\gamma > 0$, где $z^\gamma = |z|^\gamma \exp(i\gamma \arg z)$, а $-\pi < \arg z \leq \pi$ для $z \neq 0$ и $0^\gamma := 0$. Как видно из формулы (29), ядро $\alpha(\lambda) \equiv 1$ соответствует частным суммам разложения в ряд Фурье по собственным и присоединенным векторам оператора A, имеющего мероморфную резольвенту. Один из результатов, относящихся к этому случаю, сформулирован в теореме 2. Ядро $1 - \lambda^s$ соответствует методу суммирования Зигмунда [18] (гл. II, §2) в теории тригонометрических рядов, т. е. для оператора $A = \tilde{\mathfrak{D}}$, где $\tilde{\mathfrak{D}}$ задан соотношениями (14). Это ядро дает весьма хорошие оценки скорости сходимости средних* $S\left(1-\lambda^{[\![2(r+1)/2]\!]}, A;\zeta\right)f$ к вектору f, выраженные через K-функционал $K(\zeta^{-r}, f;\mathfrak{B},\mathfrak{D}(A^r))$, где r — произвольно. Ядро $(1-\lambda^2)^\gamma$ соответствует методу суммирования М. Рисса [18] (гл. II, §2) в теории тригонометрических рядов. Для ядра $(1-\lambda^2)^\gamma$, $\gamma>0$, оценки скорости сходимости средних $S((1-\lambda^2)^\gamma, A;\zeta)f$ к вектору f получены в терминах K-функционала $K(\zeta^{-r}, f;\mathfrak{B},\mathfrak{D}(A^r))$ для значений $r=1$ и 2, что для операторов $\mathfrak{D}$ и $\tilde{\mathfrak{D}}$, заданных соответственно соотношениями (9) и (14), равносильно получению оценок в терминах первого и второго модулей гладкости. Отмеченные здесь факты о сходимости средних $S\left(1-\lambda^{[\![(r+1)/2]\!]}, A;\zeta\right)f$ и $S((1-\lambda^2)^\gamma, A;\zeta)f$ к вектору f полностью согласуются с соответствующими утверждениями из теории рядов Фурье (см., например, [7], гл. 8, и [18], гл. II, §2).

Изложенные далее результаты, естественно, позволяют изучить и другие методы суммирования элемента f, порождаемые голоморфными ядрами (см. приведенные далее теоремы 5 и 6).

Установим теперь сформулированную в п. 2 лемму 1.

***Доказательство леммы* 1** использует обозначения из представления (6) резольвенты оператора A в окрестности ее полюса $\lambda_k(A)$. Далее через $\mathfrak{P}_k$ обозначена совокупность всех собственных и присоединенных векторов, отвечающих собственному значению $\lambda_k(A)$, с добавленным к ней нулевым вектором пространства $\mathfrak{B}$. Несложно показать [19] (лемма 6), что множество $\mathfrak{P}_k$ — линейное многообразие пространства $\mathfrak{B}$ (a priori не замкнутое). Установим справедливость равенства $\mathfrak{P}_k=\mathfrak{R}(P_k)$, которое, в частности, докажет замкнутость $\mathfrak{P}_k$, так как P_k — ограниченный проектор. Воспользовавшись формулами (III.6.36) из [6], имеем $AP_k=\lambda_k(A)P_k$ при $d_k=0$ и

$$AD_k^{d_k-s} = \lambda_k(A)D_k^{d_k-s} + D_k^{d_k-s+1}, \quad s=0,\ldots,d_k-1,$$
$$AP_k=\lambda_k(A)P_k+D_k \text{ при } d_k\geq 1,$$

(напомним, что $D_k^{d_k+1}=0$). Поэтому любой отличный от нуля элемент $f\in\mathfrak{R}(P_k)$ является собственным вектором, отвечающим собственному значению $\lambda_k(A)$, если $d_k=0$ или $D_kf=0$ при $d_k\geq 1$. Этот же элемент f является присоединенным вектором к первому неравному нулю элементу, входящему в цепочку векторов $D_k^{d_k}f, D_k^{d_k-1}f,\ldots,D_kf, P_kf$, если $d_k\geq 1$ и $D_kf\neq 0$. Оба рассмотренных случая показывают справедливость включения $f\in\mathfrak{P}_k$, а в силу произвольности выбора f $(\neq 0)$ из $\mathfrak{R}(P_k)$ имеем $\mathfrak{R}(P_k)\subseteq\mathfrak{P}_k$.

Пусть теперь $y_0,\ldots,y_d$ — произвольная цепочка собственного и присоединенных к нему векторов, отвечающая собственному значению $\lambda_k(A)$. Тогда

$$(A-\lambda I)\sum_{j=0}^{d}\frac{1}{(\lambda-\lambda_k(A))^{j+1}}y_{d-j} = -y_d.$$

Домножая левую и правую части этого тождества на $R(\lambda;A)$ и сравнивая полученное равенство с представлением (6), заключаем, что $y_d=P_ky_d$. Значит,

*Здесь и далее символ $[\![\gamma]\!]$ означает целую часть вещественного числа γ.

в силу произвольности выбора вектора y_d из $\mathfrak{P}_k$ имеем $\mathfrak{P}_k \subseteq \mathfrak{R}(P_k)$. Тем самым $\mathfrak{P}_k = \mathfrak{R}(P_k)$.

Обозначим через $\mathfrak{N}_k$ совокупность собственных векторов, отвечающих собственному значению $\lambda_k(A)$, с добавленным к ней нулевым вектором. Очевидно, что $\mathfrak{N}_k$ — линейное многообразие в $\mathfrak{B}$, состоящее из векторов степени не выше $|\lambda_k(A)|$ относительно оператора A. Из замкнутости A вытекает замкнутость $\mathfrak{N}_k$, т. е. $\mathfrak{N}_k$ — подпространство пространства $\mathfrak{B}$. Так как $P_k P_s = 0$, если $\lambda_k(A) \neq \lambda_s(A)$, и $\mathfrak{N}_k \subseteq \mathfrak{P}_k = \mathfrak{R}(P_k)$ для всех k, то $\mathfrak{P}_k \cap \mathfrak{P}_s = \{0\}$ и $\mathfrak{N}_k \cap \cap \mathfrak{P}_s = \{0\}$, если $\lambda_k(A) \neq \lambda_s(A)$. Следовательно, подпространства $\mathfrak{N}_k$ и $\mathfrak{P}_s$ образуют прямую сумму подпространств при различных индексах k и s.

Положив теперь в лемме 2 и в выражении (29) оператора суммирования $\alpha(\lambda) \equiv 1$, получим такое утверждение: если $\zeta_1 < |\lambda_k(A)|$ при всех k, то $\mathfrak{S}_{\zeta_1}(A) = \{0\}$, а если $\zeta_1 > |\lambda_s(A)|$ для некоторого s и $\zeta_1 \neq |\lambda_k(A)|$ при всех k, то $\mathfrak{S}_{\zeta_1}(A)$ равно линейной оболочке подпространств $\mathfrak{P}_k$, для которых $|\lambda_k(A)| < \zeta_1$. Кроме того, выполнено очевидное включение $\mathfrak{S}_{\zeta_1}(A) \subseteq \mathfrak{S}_{\zeta}(A)$ для $\zeta_1 < \zeta$, а $\mathfrak{S}_{\zeta}(A)$ — линейное многообразие для всех ζ. Отсюда и из отмеченных свойств подпространств $\mathfrak{N}_k$, $\mathfrak{P}_k$ и линейного многообразия $\mathfrak{S}_{\zeta}(A)$ вытекают включения

$$\left(\dot{+}_{k:\, |\lambda_k(A)| = \zeta} \mathfrak{N}_k\right) \dot{+} \left(\dot{+}_{k:\, |\lambda_k(A)| < \zeta} \mathfrak{P}_k\right) \subseteq \mathfrak{S}_{\zeta}(A) \subseteq \left(\dot{+}_{k:\, |\lambda_k(A)| \leq \zeta} \mathfrak{P}_k\right), \tag{30}$$

справедливые при всех ζ (здесь символ „$\dot{+}$" обозначает прямую сумму соответствующих подпространств). Утверждение леммы 1 означает, что первое включение в (30) можно заменить равенством. Для этого, как следует из второго включения в (30), достаточно установить тождество $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{S}_{\zeta}(A) \cap \mathfrak{P}_k$ для индексов k с $|\lambda_k(A)| = \zeta$. Предположим, что это тождество несправедливо. Тогда найдется такая цепочка собственного и присоединенных к нему векторов $y_0, \ldots, y_d$, отвечающая собственному значению $\lambda_k(A)$ с $|\lambda_k(A)| = \zeta$, в которой вектор $y_d \in \mathfrak{S}_{\zeta}(A)$ и $d \geq 1$. Из равенства

$$A^j y_d = \sum_{s=0}^{d} \binom{j}{s} \lambda_k(A)^{j-s} y_{d-s}, \qquad j \geq d,$$

заключаем, что

$$\lim_{j \to \infty} \frac{\left\| A^j y_d \right\|}{\binom{j}{d} \zeta^j} = \zeta^{-d} \| y_0 \| . \tag{31}$$

Поскольку вектор $y_0 \neq 0$, то величина, находящаяся в правой части равенства (31), отлична от нуля, а значит, вектор y_d не может принадлежать множеству $\mathfrak{S}_{\zeta}(A)$. Тем самым установлено равенство $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{S}_{\zeta}(A) \cap \mathfrak{P}_k$ для k с $|\lambda_k(A)| = \zeta$, т. е. первое включение в (30) можно заменить на равенство. Это равенство, как уже отмечалось, совпадает с утверждением леммы 1.

Введем обозначения, используемые в доказательствах теорем 1, 2 и их уточнений. Пусть измеримая функция φ задана на отрезке $[0, 2\pi]$ и $\varphi(\theta) \geq 0$ почти при всех $\theta \in [0, 2\pi]$. Зададим классы функций

$$\Phi_1(\varphi) = \{ \alpha \in H_1 \colon \alpha(0)=1, \alpha(e^{i(\cdot)})\varphi(\cdot) \in L_1[0, 2\pi] \},$$

а для натурального числа $r \geq 2$

$$\Phi_r(\varphi) = \{ \alpha \in \Phi_1(\varphi) \colon \alpha'(0) = \ldots = \alpha^{(r-1)}(0) = 0 \}.$$

Определим число

$$\nu_r(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \inf_{\alpha \in \Phi_r(\varphi)} \int_0^{2\pi} \left| \alpha(e^{i\theta}) \right| \varphi(\theta)\, d\theta, \tag{32}$$

причем если множество $\Phi_r(\varphi)$ — пусто, то считаем $\nu_r(\varphi) = \infty$. Очевидно, что $\nu_r(\mu\varphi) = \mu\nu_r(\varphi)$, где постоянная $\mu \geq 0$.

Лемма 3. *Пусть* $\varphi(\theta) \geq 0$ *почти при всех* $\theta \in [0, 2\pi]$. *Если* $1/\varphi \in L_1[0, 2\pi]$ *и*

$$\int_0^{2\pi} \ln^+ \varphi(\theta)\, d\theta < \infty,$$

то для всех r *справедлива оценка*

$$\nu_r(\varphi) \leq \exp\left(\frac{2r-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \varphi(\theta)\, d\theta \right).$$

Доказательство. Пусть $\ln^- a = \min\{\ln a, 0\}$, $a > 0$. Так как $|\ln^- a^{-1}| = \ln^+ a$, $a > 0$, то функция

$$\ln^- \frac{1}{\varphi(\cdot)} \in L_1[0, 2\pi].$$

Значит, определена и голоморфна в единичном круге функция ψ, заданная равенством

$$\psi(\lambda) = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + \lambda}{e^{i\theta} - \lambda} \ln^- \frac{1}{\varphi(\theta)}\, d\theta \right), \quad |\lambda| < 1,$$

причем из $1/\varphi \in L_1[0, 2\pi]$ следует, что $\psi \in H_1$ и

$$|\psi(e^{i\theta})| = \min\left\{1, \frac{1}{\varphi(\theta)}\right\} \leq \frac{1}{\varphi(\theta)} \text{ почти при всех } \theta \in [0, 2\pi]. \tag{33}$$

Из

$$\frac{a+\lambda}{a-\lambda} = 1 + 2\sum_{j=1}^{r-1} \left(\frac{\lambda}{a}\right)^j + \frac{2\lambda^r}{a^{r-1}(a-\lambda)}, \quad a \neq 0, \quad \lambda \neq a,$$

получаем, что для функций α_r и β_r, представимых в виде

$$\alpha_r(\lambda) = \exp\left(\frac{\lambda^r}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i(r-1)\theta}}{e^{i\theta} - \lambda} \ln^- \frac{1}{\varphi(\theta)}\, d\theta \right), \quad |\lambda| < 1,$$

$$\beta_r(\lambda) = \exp\left\{ \frac{-1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{r-1} \left(\frac{\lambda}{e^{i\theta}} \right) \right) \ln^- \frac{1}{\varphi(\theta)}\, d\theta \right\}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

справедливо тождество $\alpha_r(\lambda)/\beta_r(\lambda) = \psi(\lambda)$, $|\lambda| < 1$, а β_r — целая функция и $\beta_r(\lambda) \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Поэтому $\alpha_r \in H_1$. Очевидно также, что $\alpha_r(0) = 1$, а если

$r \ge 2$, то $\alpha'(0) = \ldots = \alpha^{(r-1)}(0) = 0$. Из этих свойств функции α_r и из соотношений (33) следует включение $\alpha_r \in \Phi_r(\varphi)$ и

$$\nu_r(\varphi) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\alpha_r(e^{i\theta})\right|\varphi(\theta)\,d\theta \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\beta_r(e^{i\theta})\right|d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\exp\frac{-1}{\pi}\int_0^{2\pi}D_{r-1}(\tau-\theta)\ln^-\frac{1}{\varphi(\theta)}\,d\theta\right)d\tau,$$

где

$$D_{r-1}(\theta) = \frac{\sin(r-1/2)\theta}{2\sin(\theta/2)}$$

— ядро Дирихле. Поэтому

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}D_{r-1}(\tau-\theta)\ln^-\frac{1}{\varphi(\theta)}\,d\theta \le \frac{2r-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+\varphi(\theta)\,d\theta,$$

откуда вытекает утверждение леммы.

Лемма 4. *Пусть число* ζ *— фиксировано,* $\operatorname{mes}\{\mathcal{T}(\zeta)\cap\rho(A)\} = 2\pi\zeta$, *а функция* $\alpha \in \Phi_r(\|R(\zeta e^{i(\cdot)}; A)\|)$ *при некотором* r. *Тогда с постоянной* $c(\alpha, A; \zeta)$, *заданной равенством* (25), *справедливы оценки*

$$\|f - S(\alpha, A; \zeta)f\| \le (c(\alpha, A; \zeta) + 1)K(\zeta^{-r}, f; \mathfrak{B}, \mathfrak{D}(A^r)), \quad f \in \mathfrak{B}, \tag{34}$$

$$\|g - S(\alpha, A; \zeta)g\| \le c(\alpha, A; \zeta)\zeta^{-r}\|A^r g\|, \quad g \in \mathfrak{D}(A^r). \tag{35}$$

Доказательство. Покажем вначале справедливость оценки (35). Если $\lambda \in \rho(A)$, то $I + \lambda R(\lambda; A) = AR(\lambda; A)$, поэтому $g + \lambda R(\lambda; A)g = R(\lambda; A)Ag$ для $g \in \mathfrak{D}(A)$ (см., например, [6], гл. III, §6, п.1). Используя r раз полученное равенство и учитывая условие леммы, заключаем, что для любого вектора $g \in \mathfrak{D}(A^r)$ и для почти всех $\lambda \in \mathcal{T}(\zeta)$ выполнено тождество

$$\frac{g}{\lambda} + \frac{Ag}{\lambda^2} + \ldots + \frac{A^{r-1}g}{\lambda^r} + R(\lambda; A)g = \frac{1}{\lambda^r}R(\lambda; A)A^r g. \tag{36}$$

Домножая это тождество на функцию $(-2\pi i)^{-1}\alpha(\lambda/\zeta)$ и интегрируя полученное равенство по окружности $\mathcal{T}(\zeta)$ с учетом определения (23) оператора суммирования $S(\alpha, A; \zeta)$ и предположения $\alpha \in \Phi_r(\|R(\zeta e^{i(\cdot)}; A)\|)$, имеем

$$-g + S(\alpha, A; \zeta)g = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\mathcal{T}(\zeta)}\frac{1}{\lambda^r}\alpha\left(\frac{\lambda}{\zeta}\right)R(\lambda; A)A^r g\,d\lambda.$$

Отсюда и из определения $c(\alpha, A; \zeta)$ получаем (35).

Установим теперь оценку (34). Воспользовавшись неравенством (24) при $j = 0$ и оценкой (35), выводим, что для произвольного элемента $g \in \mathfrak{D}(A^r)$ справедливы соотношения

$$\|f - S(\alpha, A; \zeta)f\| \le \|(I - S(\alpha, A; \zeta))(f - g)\| + \|g - S(\alpha, A; \zeta)g\| \le$$

$$\le (c(\alpha, A; \zeta) + 1)\|f - g\| + c(\alpha, A; \zeta)\zeta^{-r}\|A^r g\|, \quad g \in \mathfrak{D}(A^r),$$

из которых и из определения (1) K-функционала следует (34).

Введем функцию

$$F_r(\zeta, A) = \zeta^r \sup_{g \in \mathfrak{D}(A^r):\, \|A^r g\| = 1} E_\zeta(g, A), \tag{37}$$

причем если область определения оператора A^r состоит лишь из векторов g, для которых $A^r g = 0$, то считаем $F_r(\zeta, A) = \infty$.

Из определений (25) и (32) постоянных $c(\alpha, A; \zeta)$ и $\nu_r(\varphi)$ и из оценки (35) следует неравенство

$$F_r(\zeta, A) \le \zeta \nu_r(\| R(\zeta e^{i(\cdot)}; A)\|) \tag{38}$$

для тех значений ζ, когда $R(\lambda; A)$ существует почти при всех $\lambda \in \mathcal{T}(\zeta)$. В частности, согласно лемме 3 для оператора A, имеющего мероморфную резольвенту, функция $F_r(\zeta, A)$ конечна при всех ζ. Кроме того, если A — нормальный неограниченный оператор, действующий в гильбертовом пространстве, то несложно показать, что $F_r(\zeta, A) \le 1$ и $F_r(\zeta, A) = 1$, когда существует такая точка спектра μ оператора A, для которой $|\mu| = \zeta$.

Пусть оператор $\mathfrak{D}_\infty$ действует в пространстве $L_\infty(-\infty, \infty)$ по правилу $\mathfrak{D}_\infty x = -ix'$, $x \in \mathfrak{D}(\mathfrak{D}_\infty) := W^1_\infty(-\infty, \infty)$. Очевидно, что $\mathfrak{G}_\zeta(\mathfrak{D}_\infty) = \mathfrak{G}_\zeta(\mathfrak{D})$, где оператор $\mathfrak{D}$ задан соотношениями (9), поэтому согласно замечанию 1 $\mathfrak{G}_\zeta(\mathfrak{D}_\infty) = \mathfrak{G}_\zeta$. Отсюда и из результата Н. И. Ахиезера [3] (п. 87, теорема 1) получаем равенство $F_r(\zeta, \mathfrak{D}_\infty) = K_r$, $\zeta > 0$, где K_r — константа Фавара. Поэтому функцию $F_r(\zeta, A)$ будем называть r-й функцией Фавара оператора A.

Отметим еще, что к оператору $\mathfrak{D}_\infty$ применимы все предыдущие построения, а область его определения не всюду плотна в пространстве $L_\infty(-\infty, \infty)$. Этот пример показывает целесообразность отказа от требования всюду плотности $\mathfrak{D}(A)$ в пространстве $\mathfrak{B}$.

Далее удобно считать, что $K(\infty, f; \mathfrak{B}, \mathfrak{D}(A^r)) := \|f\|$.

Лемма 5. *Пусть A — произвольный оператор, действующий в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$. Тогда для всех ζ, r и векторов $f \in \mathfrak{B}$ справедлива оценка*

$$E_\zeta(f; A) \le K(F_r(\zeta, A)\zeta^{-r}, f; \mathfrak{B}, \mathfrak{D}(A^r)). \tag{39}$$

Доказательство. Если $F_r(\zeta, A) < \infty$, то для произвольного элемента $g \in \mathfrak{D}(A^r)$ имеем

$$E_\zeta(f; A) \le E_\zeta(f - g; A) + E_\zeta(g; A) \le \|f - g\| + F_r(\zeta, A)\zeta^{-r}\|A^r g\|,$$

откуда и из определения (1) K-функционала получаем (39). Если $F_r(\zeta, A) = \infty$, то оценка (39) очевидна, так как всегда $E_\zeta(f; A) \le \|f\|$.

Заметим, что оценка (39) точна в том смысле, что неравенство

$$E_\zeta(f; A) \le \mu K(F_r(\zeta, A)\zeta^{-r}, f; \mathfrak{B}, \mathfrak{D}(A^r)),$$

с постоянной $\mu < 1$ не может быть справедливым для всех векторов $f \in \mathfrak{B}$ ни при каких значениях ζ и r. Это утверждение является непосредственным следствием определения (37) функции Фавара $F_r(\zeta, A)$ оператора A и неравенства

$$K(\delta, g; \mathfrak{B}, \mathfrak{D}(A^r)) \le \delta \|A^r g\|, \qquad \delta \ge 0, \qquad g \in \mathfrak{D}(A^r).$$

***Доказательство теоремы* 1** основано на леммах 3, 5 и оценке (38). Равенством $\varphi_m(\theta) = \| R(\zeta_m e^{i\theta}; A)\|$ зададим функции φ_m и покажем, что $1/\varphi_m \in L_\infty[0, 2\pi]$. Так как по условию теоремы каждая из функций φ_m непрерывна почти всюду на отрезке $[0, 2\pi]$, то функция $1/\varphi_m$ измерима и для доказательства включения $1/\varphi_m \in L_\infty[0, 2\pi]$ достаточно показать ограниченность $1/\varphi_m$. Это свойство выводится из определения φ_m и следующего простого рассуждения. Если бы существовала последовательность $\lambda_s \in \mathcal{T}(\zeta_m) \cap \rho(A)$, для которой $\|R(\lambda_s; A)\| \to 0$ при $s \to \infty$, то из резольвентного тождества

$$R(\lambda; A) - R(\lambda_s; A) = (\lambda - \lambda_s) R(\lambda; A) R(\lambda_s; A), \qquad \lambda \in \rho(A),$$

следовало бы, что $R(\lambda; A) = 0$, а это, естественно, невозможно. Тем самым показано, что для каждого фиксированного m функции φ_m удовлетворяют условиям леммы 3. Из этой леммы, условия (4) и оценки (38) имеем

$$F_r(\zeta_m, A) \le \beta(\zeta_m) \nu_r\left(\frac{\zeta_m}{\beta(\zeta_m)} \left\| R\left(\zeta_m e^{i(\cdot)}; A\right) \right\| \right) \le \beta(\zeta_m) \exp((2r-1)c).$$

Отсюда на основании леммы 5 получаем утверждения (5).

Приведем теперь следствие из леммы 4, относящееся к методам суммирования Зигмунда и М. Рисса.

Теорема 3. *Пусть существуют такое множество окружностей* $\mathcal{T}(\zeta_m)$ *и такая функция* β, *что* $\beta(\zeta_m) \ge 1$ *и*

$$\| R(\lambda; A) \| \le \beta(\zeta_m) |\operatorname{Im} \lambda|^{-1}, \qquad \lambda \in \mathcal{T}(\zeta_m), \qquad \operatorname{Im} \lambda \ne 0. \tag{40}$$

Тогда для всех m *и элементов* $f \in \mathfrak{B}$ *справедливы оценки*

$$\left\| f - S\left(1 - \lambda^{2[\![(r+1)/2]\!]}, A; \zeta_m\right) f \right\| \le$$

$$\le \left(\frac{8}{\pi^2} \ln r + 6 \right) \beta(\zeta_m) K(\zeta_m^{-r}, f; \mathfrak{B}, \mathfrak{D}(A^r)), \tag{41}$$

$$\| f - S((1 - \lambda^2)^\gamma, A; \zeta_m) f \| \le c(\gamma) \beta(\zeta_m) K(\zeta_m^{-r}, f; \mathfrak{B}, \mathfrak{D}(A^r)), \tag{42}$$

где $c(\gamma) = 1 + \pi^{-1/2} 2^\gamma \Gamma(\gamma/2) \Gamma((\gamma+1)/2)$, *причем оценка* (41) *выполнена при всех* r, *а оценка* (42) — *при* $r = 1$ *и* 2, *а* $\gamma > 0$.

Доказательство. Очевидно, что ядро $1 - \lambda^{2[\![(r+1)/2]\!]}$ принадлежит классу $\Phi_r(|\sin(\cdot)|^{-1})$, а из условия (40) следует неравенство

$$c\left(1 - \lambda^{2[\![(r+1)/2]\!]}, A; \zeta\right) f \le \frac{\beta(\zeta_m)}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\sin [\![(r+1)/2]\!] \theta|}{|\sin \theta|} d\theta. \tag{43}$$

Полностью повторяя выкладки, сделанные при оценке постоянной Лебега [20] (гл. II, §3), получаем, что интеграл из правой части неравенства (43) меньше чем $(8/\pi) \ln r + 5\pi$. Отсюда и из леммы 4 вытекает утверждение (41).

Аналогично ядро $(1 - \lambda^2)^\gamma$, $\gamma > 0$, принадлежит классу $\Phi_2(|\sin(\cdot)|^{-1})$, а

$$c((1 - \lambda^2)^\gamma, A; \zeta) \le \frac{\beta(\zeta_m)}{\pi} 2^{\gamma - 1} \int_0^{2\pi} |\sin \theta|^{\gamma - 1} d\theta.$$

Вычисляя интеграл, находящийся в правой части этого неравенства [8] (формула 858.46), и используя лемму 4, получаем утверждение (42).

Так как функция α, заданная равенством $1 - \lambda^{2[\![(r+1)/2]\!]}$, принадлежит классу $\Phi_r(|\sin(\cdot)|^{-1})$, то, как следует из леммы 4 и доказательства теоремы 3, справедливо следующее утверждение: если оператор A удовлетворяет условию (40), то для всех m и r справедливо неравенство

$$F_r(\zeta_m, A) \le \left(\frac{8}{\pi^2}\ln r + 5\right)\beta(\zeta_m),$$

причем при $r = 1$ и 2 постоянную $(8/\pi^2)\ln r + 5$ в нем можно заменить на 2, а при $r = 3$ и 4 — на $8/\pi$. Кроме того, заметим, что всегда $F_r(\zeta_m, A) = F_r(\zeta_m, e^{i\theta}A)$, если θ — вещественно. Поэтому справедлив такой результат.

Теорема 4. *Пусть существуют такое множество окружностей* $\mathcal{T}(\zeta_m)$ *и такая положительная функция* β, *что*

$$\| R(\lambda; A)\| \le \beta(\zeta_m)\,|\operatorname{Im}(\lambda e^{i\theta_m})|^{-1}, \qquad \lambda \in \mathcal{T}(\zeta_m), \qquad \operatorname{Im}(\lambda e^{i\theta_m}) \ne 0, \tag{44}$$

при некоторых вещественных θ_m. *Тогда для всех* m, r *и элементов* $f \in \mathfrak{B}$ *справедлива оценка*

$$E_{\zeta_m}(f, A) \le K\left(\left(\frac{8}{\pi^2}\ln r + 5\right)\beta(\zeta_m)\zeta_m^{-r}, f; \mathfrak{B}, \mathfrak{D}(A^r)\right), \tag{45}$$

причем при $r = 1$ *и* 2 *постоянную* $(8/\pi^2)\ln r + 5$ *в ней можно заменить на* 2, *а при* $r = 3$ *и* 4 — *на* $8/\pi$.

***Замечание* 3.** Если резольвента оператора A удовлетворяет требованию (44), то из оценки (5) следует, что

$$E_{\zeta_m}(f, A) \le K\left(2^{2r-1}\beta(\zeta_m)\zeta_m^{-r}, f; \mathfrak{B}, \mathfrak{D}(A^r)\right).$$

Поэтому в указанном случае оценка (45) предпочтительнее оценки (5).

Непосредственно из леммы 4 получаем следующее уточнение теоремы 3.

Теорема 5. *Пусть оператор* A *удовлетворяет условиям теоремы* 3, *а при некотором* r *функция* $\alpha \in \Phi_r(|\sin(\cdot)|^{-1})$. *Тогда для всех* m *и элементов* $f \in \mathfrak{B}$ *справедлива оценка*

$$\|f - S(\alpha, A; \zeta_m)f\| \le \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|\alpha(e^{i\theta})|}{|\sin\theta|}d\theta + 1\right)\beta(\zeta_m)K\left(\zeta_m^{-r}, f; \mathfrak{B}, \mathfrak{D}(A^r)\right).$$

При доказательстве этой оценки надо лишь заметить, что так как $\alpha(0) = 1$, то интеграл, находящийся в ее правой части, всегда больше или равен 2π.

Пусть ядро $\alpha_{s,\gamma}(\lambda) = (1 - \lambda^s)^\gamma$, $\gamma > 0$, а оператор $\tilde{\mathfrak{D}}$ задан соотношениями (14). Если s — четное положительное число, то $\alpha_{s,\gamma} \in \Phi_s(|\sin(\cdot)|^{-1})$. Значит, в случае таких ядер ввиду неравенства (15) к оператору $\tilde{\mathfrak{D}}$ применимо утверждение теоремы 5. Если же s — нечетное положительное число либо $s = 0$, то ядро $\alpha_{s,\gamma}$ не принадлежит ни одному из классов $\Phi_r(|\sin(\cdot)|^{-1})$. Однако для таких ядер ввиду неравенства (21) к оператору $\tilde{\mathfrak{D}}$ применимо утверждение следующей теоремы.

Теорема 6. *Пусть оператор* A *имеет мероморфную резольвенту, удовлетворяющую на последовательности окружностей* $\mathcal{T}(\zeta_m)$ *с* $\zeta_m \nearrow \infty$ *при* $m \to \infty$ *оценке*

$$\| R(\lambda; A)\| \le \beta(\zeta_m)\sum_{j=1}^{N}\min\left\{d, \zeta_m^{\kappa}\left|\operatorname{Im}(\lambda e^{i\theta_{j,m}})\right|^{-1}\right\}, \qquad \lambda \in \mathcal{T}(\zeta_m), \qquad m = 1, 2, \ldots, \tag{46}$$

в которой N — *фиксировано,* $\theta_{1,m}, \ldots, \theta_{Nm}$ — *некоторые вещественные чис-*

ла, а функция β *и постоянные* d *и* κ *такие, что* $\beta(\zeta_m)\zeta_m^\kappa \geq 1$, $\kappa \leq 1$, *а* $d > 0$. *Предположим также, что* α *— голоморфная в единичном круге* $\{\lambda: |\lambda| < 1\}$ *функция, у которой* $\alpha(0) = 1$,

$$\sup_{|\lambda|<1} |\alpha(\lambda)| = M < \infty, \tag{47}$$

и если $r > 1$, *то дополнительно считаем, что* $\alpha'(0) = \ldots = \alpha^{(r-1)}(0) = 0$. *Тогда для достаточно больших* $m\left(d\zeta_m^{1-\kappa} \geq 1\right)$ *и всех* $f \in \mathfrak{B}$ *справедлива оценка*

$$\|f - S(\alpha, A; \zeta_m)f\| \leq$$

$$\leq \frac{2MN}{\pi}\beta(\zeta_m)\zeta_m^\kappa((1-\kappa)\ln\zeta_m + \ln 2d + \pi)K\left(\zeta_m^{-r}, f; \mathfrak{B}, \mathfrak{D}(A^r)\right).$$

Доказательство. Согласно условию (47) функция $\alpha \in H_1$ и поэтому $\alpha \in \in \Phi_r(1)$. Но по условию (46) $\Phi_r(1) = \Phi_r\left(\left\| R(\zeta_m e^{i(\cdot)}; A)\right\|\right)$. Из этих условий следует также, что постоянная суммирования, заданная равенством (25), допускает оценку

$$c(\alpha, A; \zeta_m) \leq \frac{2MN}{\pi}\beta(\zeta_m)\zeta_m \int_0^{\pi/2} \min\left\{d, \frac{\zeta_m^{\kappa-1}}{\sin\theta}\right\}d\theta.$$

Считаем теперь m столь большим, что $\zeta_m^{\kappa-1}/d \leq 1$. Записывая интеграл из правой части этого неравенства в виде суммы двух интегралов: первый от 0 до $\arcsin(\zeta_m^{\kappa-1}/d)$, а второй от $\arcsin(\zeta_m^{\kappa-1}/d)$ до $\pi/2$ и находя выражение интеграла от $1/\sin\theta$ [8] (формула 432.10), получаем

$$c(\alpha, A; \zeta_m) \leq \frac{2MN}{\pi}\beta_m(\zeta_m)(\zeta_m d)\arcsin\left(\frac{\zeta_m^{\kappa-1}}{d}\right) -$$

$$- \frac{2MN}{\pi}\beta(\zeta_m)\zeta_m^\kappa \ln \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\zeta_m^{\kappa-1}}{d}\right)\right) \leq MN\beta(\zeta_m)\zeta_m^\kappa\left(1 + \frac{2}{\pi}\ln(2\zeta_m^{1-\kappa}d)\right).$$

Из этой оценки и леммы 4 следует утверждение теоремы 6, так как $\alpha(0) = 1$, и поэтому в условии (47) величина $M \geq 1$.

Если в теореме 6 считать ядро суммирования $\alpha(\lambda) \equiv 1$, а $N = 1$, β — постоянной, равной c, и $\kappa = 0$, то из нее получается теорема 2. При этом необходимо отметить, что при выполнении условий теоремы 2 постоянная c в ней всегда больше или равна 1. Этот факт несложно вывести из резольвентного тождества.

В заключение приведем утверждение об оценках сверху проекторов Ф. Рисса через K-функционалы. Это утверждение полностью аналогично хорошо известной оценке сверху коэффициентов Фурье периодической функции посредством модулей гладкости.

Теорема 7. *Пусть* Ω *— ограниченная область комплексной плоскости* $\mathbb{C}$, *не содержащая нуля и с кусочно-гладкой границей* $\partial\Omega$. *Предположим, что* $\partial\Omega \subset \rho(A)$ *и в* Ω *имеются точки спектра оператора* A. *Если проектор Ф. Рисса*

$$P(\Omega) = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} R(\lambda; A)\,d\lambda,$$

а постоянная

$$c_r(\Omega) = \frac{1}{2\pi\|P(\Omega)\|}\left\|\int_{\partial\Omega}\frac{1}{\lambda^r}R(\lambda;A)\,d\lambda\right\|, \tag{48}$$

то тогда для всех r *и элементов* $f \in \mathfrak{B}$ *справедлива оценка*

$$\|P(\Omega)f\| \le \|P(\Omega)\|\,K(c_r(\Omega), f; \mathfrak{B}, \mathfrak{D}(A^r)). \tag{49}$$

Если весь спектр оператора A, *лежащий в области* Ω, *состоит лишь из одного собственного значения* $\lambda_k(A)$ *и в проколотой окрестности* $\lambda_k(A)$ *справедливо представление* (6), *то* $P(\Omega) = P_k$ *и для всех* r *и элементов* $f \in \in \mathfrak{B}$ *справедлива оценка*

$$\|P_k f\| \le \left\|P_k + \sum_{j=1}^{d_k}\binom{r+j-1}{j}\left(\frac{-D_k}{\lambda_k(A)}\right)^j\right\| K\left(\frac{1}{|\lambda_k(A)|^r}, f; \mathfrak{B}, \mathfrak{D}(A^r)\right). \tag{50}$$

В доказательстве теоремы 7 используется следующее утверждение.

Предложение 2. *Пусть* P *— проектор в банаховом пространстве* $\mathfrak{B}$, *а* D *— такой квазинильпотентный оператор, действующий в* $\mathfrak{B}$, *что* $PD = = DP = D$. *Тогда* $\|P\| \le \|D + P\|$.

Доказательство. Считаем $P \ne 0$, иначе утверждение предложения очевидно. Так как [11] (лемма XV.4.4) спектры операторов P и $D + P$ совпадают, то спектр $D + P$ состоит лишь из $\{1\}$. Равенством $|||x||| = \|(I-P)x\| + + \|P\|^{-1}\|Px\|$ введем новую норму $|||\cdot|||$ на пространстве $\mathfrak{B}$, эквивалентную исходной. Если бы утверждение предложения было несправедливым, то тогда $|||D+P||| < 1$, что невозможно, так как 1 — точка спектра оператора $D + P$.

***Доказательство теоремы* 7.** По условию граница области Ω содержит лишь регулярные точки оператора A. Поэтому при $\lambda \in \partial\Omega$ и $g \in \mathfrak{D}(A^r)$ справедливо тождество (36). Интегрируя это тождество по $\partial\Omega$ с учетом того, что $0 \notin \Omega$, имеем

$$P(\Omega)g = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{1}{\lambda^r}R(\lambda;A)A^r g\,d\lambda, \qquad g \in \mathfrak{D}(A^r).$$

Значит,

$$\|P(\Omega)f\| \le \|P(\Omega)(f-g)\| + \|P(\Omega)g\| \le$$

$$\le \|P(\Omega)\|\,\|f-g\| + \frac{1}{2\pi}\left\|\int_{\partial\Omega}\frac{1}{\lambda^r}R(\lambda;A)\,d\lambda\right\|\,\|A^r g\|, \qquad g \in \mathfrak{D}(A^r).$$

Отсюда и из определений (1) и (48) K-функционала и постоянной $c_r(\Omega)$ получаем оценку (49).

Если же весь спектр оператора A, лежащий в области Ω, состоит лишь из одного собственного значения $\lambda_k(A)$, то из представления (6) получаем равенство

$$\frac{-1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{1}{\lambda^r}R(\lambda;A)\,d\lambda = \left\{P_k + \sum_{j=1}^{d_k}\binom{r+j-1}{j}\left(\frac{-D_k}{\lambda_k(A)}\right)^j\right\}\frac{1}{\lambda_k(A)^r}.$$

Поэтому в этом случае

$$c_r(\Omega) = \frac{1}{\| P_k \|} \left\| P_k + \sum_{j=1}^{d_k} \binom{r+j-1}{j} \left(\frac{-D_k}{\lambda_k(A)} \right)^j \right\| \frac{1}{|\lambda_k(A)|^r} .$$

Отсюда, учитывая свойства проекторов P_k и нильпотентных операторов D_k из представления (6) и принимая во внимание предложение 2, неравенство

$$K(\mu\delta, f; \mathfrak{B}, \mathfrak{D}(A^r)) \leq \mu K(\delta, f; \mathfrak{B}, \mathfrak{D}(A^r)), \qquad \mu \geq 1,$$

и утверждение (49), получаем оценку (50).

1. *Jackson D.* Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung: Inauguraldissertation und Preischrift. – Univ. Göttingen, 1911. – 98 S.
2. *Стечкин С. Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1951. – **15,** № 3. – С. 219–242.
3. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1947. – 324 с.
4. *Radzievskii G.* The rate of convergence of decompositions of ordinary functional-differential operators by eigenfunctions // Some Problems of the Modern Theory of Differential Equations. – Kiev, 1994. – P. 14–27. – (Preprint / Nat. Acad. Sci. Ukraine. Inst. Math.; 94.29).
5. *Радзиевский Г. В.* Краевые задачи и связанные с ними модули непрерывности // Функцион. анализ и его прил. – 1995. – **29,** № 3. – С. 87–90.
6. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
7. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
8. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука, 1966. – 228 с
9. *Брудный Ю. А., Крейн С. Г., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов // Итоги науки и техники. Математический анализ. Т. 24. – М.: ВИНИТИ, 1986. – С. 3–164.
10. *Радыно Я. В.* Пространство векторов экспоненциального типа // Докл. АН БССР. – 1983. – **27,** № 9. – С. 791–793.
11. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Спектральные операторы. – М.: Мир, 1974. – 662 с.
12. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
13. *Ибрагимов И. И.* Экстремальные свойства целых функций конечной степени. – Баку: Изд-во АН АзССР, 1962. – 316 с.
14. *Радзиевский Г. В.* Модули непрерывности, определенные по нулевому продолжению функции, и K-функционалы с ограничениями // Укр. мат. журн. – 1996. – **48,** № 11. – С. 1537–1554.
15. *Никольский С. М.* К условию Дини – Липшица сходимости ряда Фурье // Докл. АН СССР. – 1950. – **73,** № 3. – С. 457–460.
16. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 830 с.
17. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 332 с.
18. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
19. *Радзиевский Г. В.* О линейной независимости производных по Келдышу цепочек у аналитических в полуплоскости оператор-функций // Мат. сб. – 1987. – **132,** № 4. – С. 556–577.
20. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.

Получено 27.11.96