УДК 517. 9

І. М. Романишин (Фіз.-мех. ін-т НАН України, Львів),
Л. А. Синицький (Львів. ун-т)

ПОБУДОВА НАБЛИЖЕНЬ ДО СТАЦІОНАРНОГО РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМИ СИНГУЛЯРНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

We propose a procedure for the construction of successive approximations of a stationary solution of a system of nonlinear ordinary differential equations with a small parameter with the derivative. We present sufficient conditions for the asymptotical behaviour of constructed approximations to the required stationary solution.

Запропонована процедура побудови послідовних наближень до стаціонарного розв'язку системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь з малим параметром при похідній. Наведені достатні умови асимптотичності побудованих наближень до шуканого стаціонарного розв'язку.

1. Постановка задачі. Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь (з. д. р.)

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = f(x, t), \tag{1}$$

де $(x, t) \in D$, $D = \{\mathbf{R}^n \times [0, T]\}$, $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $f(x, t)$ — n-вимірна T-періодична нескінченно диференційовна вектор-функція в області D, яка задовольняє умову $\lim_{\|x\| \to \infty} \|f(x, t)\| = \infty$ (приймемо, що норма вектора визначається рівністю $\| x(t) \| = \max_{1 \le k \le n} (| x_{(k)}(t) |)$, $x_{(k)}$ — k-та складова вектора x).

Нехай власні значення $\lambda_i(x, t)$, $i = \overline{1, n}$, симетризованої матриці Якобі $J_s = (J + J^T)/2$ (J — матриця Якобі вектор-функції $f(x, t)$) задовольняють нерівність

$$\max_{\substack{1 \le i \le n \\ (x, t) \in D}} [\lambda_i(x, t)] \le -a < 0,$$

де a — додатне число.

Згідно з теоремою [1, с. 288] система (1) є конвергентною для $\varepsilon > 0$, тобто всі розв'язки задачі Коші з бігом часу прямують до асимптотично стійкого в цілому розв'язку $\overline{x}(t, \varepsilon)$, який при T-періодичній вектор-функції $f(x, t)$ є T-періодичним [1, с. 281].

Викладемо процедуру побудови асимптотичних наближень до періодичного розв'язку системи (1) $\overline{x}(t, \varepsilon)$. Запропонована процедура близька до процедури Васильєвої [2] побудови регулярної частини (за термінологією Васильєвої) асимптотичного наближення до розв'язку задачі Коші.

2. Процедура побудови наближень до стаціонарного розв'язку. Якщо в (1) прийняти $\varepsilon = 0$, то отримаємо систему алгебраїчних рівнянь (а. р.)

$$f(x^{(0)}, t) = 0. \tag{2}$$

При виконанні накладених на систему (1) умов матриця Якобі J невироджена при $(x, t) \in D$. Згідно з теоремою Пале [3] система а. р. (2) має єдиний T-періодичний розв'язок $x^{(0)}(t)$, який за теоремою про вищі похідні неявної функції [4, с. 154] є нескінченно диференційовним.

За нульове наближення до періодичного розв'язку системи (1) приймемо розв'язок системи (2) $x^{(0)}(t)$.

Для побудови першого наближення розв'язок (1) будемо шукати у вигляді

$$x = x^{(0)} + y_1. \tag{3}$$

Після підстановки (3) в (1) отримаємо систему нелінійних з. д. р. відносно y_1:

$$\varepsilon\frac{dy_1}{dt} = f(x^{(0)} + y_1, t) - \varepsilon\frac{dx^{(0)}}{dt}. \tag{4}$$

Система (4) є конвергентною та має T-періодичний розв'язок $\bar{y}_1(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon > 0$ [1, с. 288, 281].

Розглянемо систему а. р.

$$f(x^{(0)} + y_1^0, t) - \varepsilon\frac{dx^{(0)}}{dt} = 0. \tag{5}$$

Матриця Якобі вектор-функції $f(x^{(0)}(t) + y_1, t)$ за умовами, накладеними на систему (1), є від'ємно визначеною при $(y_1, t) \in D$. Система (5) задовольняє умови теореми Пале, розв'язок (5) $y_1^{(0)}(t, \varepsilon)$ є єдиним, T-періодичним та за теоремою про вищі похідні неявної функції [4, с. 154] нескінченно диференційовним за своїми аргументами $t \in [0, T]$, $\varepsilon > 0$.

За наближення до періодичного розв'язку системи (4) приймемо розв'язок системи а. р. $y_1^{(0)}(t, \varepsilon)$.

Позначивши $x^{(1)} = x^{(0)} + y_1^{(0)}$, одержимо систему а. р. для першого наближення $x^{(1)}$ у вигляді

$$f(x^{(1)}, t) = \varepsilon\frac{dx^{(0)}}{dt}.$$

Методом математичної індукції покажемо, що k-те наближення визначається системою а. р.

$$f(x^{(k)}, t) = \varepsilon\frac{dx^{(k-1)}}{dt}, \tag{6}$$

де $x^{(k-1)}$ — $(k-1)$-ше наближення, $k = 1, 2, \ldots$.

Для $k = 1$ справедливість даного співвідношення показана. Нехай $(k-1)$-ше наближення визначається як розв'язок системи а. р.

$$f(x^{(k-1)}, t) = \varepsilon\frac{dx^{(k-2)}}{dt},$$

де $x^{(k-2)}$ — $(k-2)$-ге наближення (нескінченно диференційовне).

Розв'язок рівняння (1) будемо шукати у вигляді

$$x = x^{(k-1)} + y_k. \tag{7}$$

Після підстановки (7) в (1) одержимо рівняння відносно y_k:

$$\varepsilon\frac{dy_k}{dt} = f(x^{(k-1)} + y_k, t) - \varepsilon\frac{dx^{(k-1)}}{dt}. \tag{8}$$

Система (8) є конвергентною та має T-періодичний розв'язок $\bar{y}_k(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon > 0$ [1, с. 288, 281].

Розглянемо систему а. р.

$$f(x^{(k-1)} + y_k^{(0)}, t) = \varepsilon\frac{dx^{(k-1)}}{dt}. \tag{9}$$

Система (9) задовольняє умови теореми Пале, її розв'язок $y_k^{(0)}(t, \varepsilon)$ є єдиним, T-періодичним та за теоремою про вищі похідні неявної функції [4, с. 154] нескінченно диференційовним за своїми аргументами при $t \in [0, T]$, $\varepsilon > 0$.

За наближення до періодичного розв'язку системи (8) приймемо розв'язок системи а. р. $y_k^{(0)}(t, \varepsilon)$. Позначивши $x^{(k)} = x^{(k-1)} + y_k^{(0)}$, отримаємо систему а. р. для k-го наближення $x^{(k)}$ у вигляді (6).

Зупинимось на застосуванні описаної процедури для побудови вимушеного розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь з постійними параметрами

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = Ax + a(t),$$

де A — $(n \times n)$-вимірна невироджена матриця, $a(t)$ — n-вимірна вектор-функція, достатнє число раз диференційовна, решта позначень такі, як в (1). На основі описаної процедури отримуємо, що k-те наближення зображається у вигляді [5]

$$x^{(k)} = -\sum_{s=0}^{k} A^{-(s+1)} \varepsilon^s \frac{d^s a}{dt^s}.$$

При збіжності ряду

$$x^{\infty}(t) = -\sum_{s=0}^{\infty} A^{-(s+1)} \varepsilon^s \frac{d^s a}{dt^s}$$

(достатні умови збіжності наведені в [5]) одержуємо вимушений розв'язок системи лінійних диференціальних рівнянь. При періодичній вектор-функції $a(t)$ розв'язок $x^{\infty}(t)$ — періодичний. При неперіодичній вектор-функції $a(t)$, яка має фінітний спектр [6], розв'язок $x^{\infty}(t)$ також має фінітний спектр, частотний діапазон якого співпадає із спектром $a(t)$. Тому $x^{\infty}(t)$ можемо розглядати як стаціонарний розв'язок лінійної системи і при неперіодичній вектор-функції $a(t)$. Відмітимо, що в деяких випадках [5] ряд $x^{\infty}(t)$ збігається до вимушеного розв'язку лінійної системи і тоді, коли $a(t)$ не є вектор-функцією з фінітним спектром (наприклад, експоненціального виду $e^{\alpha t}$).

3. Теорема. *Якщо виконуються накладені в п.* 1 *на систему* (1) *умови, то k-те, $k = 0, 1, \ldots$, наближення, яке визначається з системи а. р.* (2) *(при $k = 0$) та* (6) *(при $k > 0$), є асимптотичним наближенням до періодичного розв'язку* (1) *з точністю порядку ε^{k+1}, тобто знайдеться таке ε_k, що при $\varepsilon \le \varepsilon_k$*

$$\| \bar{x}(t, \varepsilon) - x^{(k)}(t, \varepsilon) \| < \varepsilon^{k+1} M_k \| \bar{x}(t, \varepsilon) \|,$$

де M_k — обмежена величина, незалежна від ε.

Доведення теореми проведемо методом математичної індукції.

Розглянемо відхилення $\| \bar{x}(t, \varepsilon) - x^{(0)}(t) \|$. Очевидно, що

$$\| \bar{x}(t, \varepsilon) - x^{(0)}(t) \| = \| \bar{x}(t, \varepsilon) - x(t, \varepsilon, x^{(0)}(0)) + x(t, \varepsilon, x^{(0)}(0)) - x^{(0)}(t) \| \le$$
$$\le \| \bar{x}(t, \varepsilon) - x(t, \varepsilon, x^{(0)}(0)) \| + \| x(t, \varepsilon, x^{(0)}(0)) - x^{(0)}(t) \|.$$

Із асимптотичної стійкості в цілому періодичного розв'язку $\bar{x}(t, \varepsilon)$ для довільного $\varepsilon > 0$ можна вказати таке $T_0(\varepsilon)$, що

$$\| \bar{x}(t, \varepsilon) - x(t, \varepsilon, x^{(0)}(0)) \| < \varepsilon \tag{10}$$

при $t > T_0$.

Система (1) є частинним випадком тихоновської системи [2]. Приєднана система

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tau} = f(\tilde{x}, t), \qquad \tilde{x} \in \mathbf{R}^n, \quad \tau \ge 0,$$

де $t \in [0, T]$ — параметр, має асимптотично стійке в цілому положення рівноваги (внаслідок від'ємної визначеності матриці Якобі).

При виконанні накладених умов згідно з [3, с. 55, 78; 7, с. 635] розв'язок $x^{(0)}(t)$ є асимптотичним з точністю порядку ε до розв'язку задачі Коші $x(t, \varepsilon, x^{(0)}(0))$ при $t > 0$, тобто можна вказати таке $\bar{\varepsilon}_0$, що при $t > 0$ буде справедлива оцінка

$$\| x(t, \varepsilon, x^{(0)}(0)) - x^{(0)}(t) \| < \varepsilon M \| x(t, \varepsilon, x^{(0)}(0)) \| \tag{11}$$

для $\varepsilon \le \bar{\varepsilon}_0$, де M — обмежена величина, незалежна від ε.

З урахуванням (10), (11) для достатньо великого $T_0 > 0$ при $t > T_0$ буде справедлива оцінка

$$\| \bar{x}(t, \varepsilon) - x^{(0)}(t) \| < \varepsilon M_0 \| \bar{x}(t, \varepsilon) \| \tag{12}$$

для $\varepsilon \le \bar{\varepsilon}_0$, де M_0 — обмежена величина, незалежна від ε, $t \in [0, T]$.

Оцінимо величину $\| \bar{x}(t, \varepsilon) - x^{(1)}(t, \varepsilon) \|$. Розглянемо системи (4) та (5).

Відповідна (4) приєднана система

$$\frac{d\tilde{y}_1}{d\tau} = f(x^{(0)} + \tilde{y}_1, t) - \varepsilon \frac{dx^{(0)}}{dt}, \qquad \tilde{y}_1 \in \mathbf{R}^n, \quad \tau \ge 0,$$

де $t \in [0, T]$, $\varepsilon > 0$ — параметри, має асимптотично стійке в цілому положення рівноваги.

Таким чином, задовольняються умови теореми Васильєвої (для нульового наближення) стосовно систем (4), (5) при $t > 0$ [7, с. 635]. Згідно з [3, с. 77, 78; 7, с. 635] та неперервністю розв'язку (5) по $\varepsilon > 0$ можемо стверджувати, що розв'язок системи (5) $y_1^{(0)}(t, \varepsilon)$ є асимптотичним наближенням до розв'язку задачі Коші $y_1(t, \varepsilon, y_1^{(0)}(0, \varepsilon))$. Як і при розгляді $\| \bar{x}(t, \varepsilon) - x^{(0)}(t) \|$, для асимптотично стійкого в цілому розв'язку $\bar{y}_1(t, \varepsilon)$ можна вказати таке $\tilde{\varepsilon}_1$, що при $\varepsilon \le \tilde{\varepsilon}_1$ буде справедлива оцінка

$$\| \bar{y}_1(t, \varepsilon) - y_1^{(0)}(t, \varepsilon) \| < \varepsilon M_1 \| \bar{y}_1(t, \varepsilon) \|, \tag{13}$$

де $t \in [0, T]$, M_1 — обмежена величина, незалежна від ε.

Згідно з (3), (12)

$$\| \bar{y}_1(t, \varepsilon) \| < \varepsilon M_0 \| \bar{x}(t, \varepsilon) \| \tag{14}$$

для $\varepsilon \le \bar{\varepsilon}_0$. Враховуючи (13), (14), приходимо до висновку, що можна вказати таке $\hat{\varepsilon}_1 = \min(\bar{\varepsilon}_0, \tilde{\varepsilon}_1)$, що при $\varepsilon \le \tilde{\varepsilon}_1$ справедливі співвідношення

$$\| \bar{x}(t, \varepsilon) - x^{(1)}(t, \varepsilon) \| = \| x^{(0)}(t) + \bar{y}_1(t, \varepsilon) - (x^{(0)}(t) + y_1^{(0)}(t, \varepsilon)) \| =$$

$$= \| \bar{y}_1(t, \varepsilon) - y_1^{(0)}(t, \varepsilon)) \| < \varepsilon^2 \overline{M}_1 \| \bar{x}(t, \varepsilon) \|,$$

де $\overline{M}_1$ — обмежена величина, незалежна від ε.

Оцінимо величину $\| \bar{x}(t, \varepsilon) - x^{(k)}(t, \varepsilon) \|$. Нехай для $(k-1)$-го наближення при $\varepsilon \le \bar{\varepsilon}_{k-1}$ справедлива оцінка

$$\| \bar{x}(t, \varepsilon) - x^{(k-1)}(t, \varepsilon) \| < \varepsilon^k \overline{M}_{k-1} \| \bar{x}(t, \varepsilon) \|, \tag{15}$$

де $\overline{M}_{k-1}$ — обмежена величина, незалежна від ε, причому $x^{(k-1)}(t, \varepsilon)$ є нескінченно диференційовною вектор-функцією своїх аргументів при $t \in [0, T]$, $\varepsilon > 0$.

Розглянемо системи з. д. р. (8) та а. р. (9). Як і на основі розгляду систем (4), (5), приходимо до висновку, що при виконанні накладених умов задовольняються умови теореми Васильєвої (для нульового наближення) стосовно систем (8),

(9) при $t > 0$ [7, с. 635] і, враховуючи пп. 3–5 [3, с. 77, 78] та неперервність розв'язку (9) по ε, можемо стверджувати, що розв'язок $y_k^{(0)}(t, \varepsilon)$ системи (9) є асимптотичним наближенням з точністю порядку ε до періодичного розв'язку (8) $\bar{y}_k(t, \varepsilon)$. Це означає, що можна вказати таке $\tilde{\varepsilon}_k$, що при $\varepsilon \le \tilde{\varepsilon}_k$

$$\| \bar{y}_k(t, \varepsilon) - y_k^{(0)}(t, \varepsilon)) \| < \varepsilon M_k \| \bar{y}_k(t, \varepsilon) \|, \tag{16}$$

де M_k — обмежена величина, незалежна від ε. З урахуванням (16) та оцінки (15) стверджуємо, що знайдеться таке $\hat{\varepsilon}_k = \min(\bar{\varepsilon}_{k-1}, \tilde{\varepsilon}_k)$, при якому для $\varepsilon \le \hat{\varepsilon}_k$ справедливі співвідношення

$$\| \bar{x}(t, \varepsilon) - x^{(k)}(t, \varepsilon) \| = \| x^{(k-1)}(t, \varepsilon) + \bar{y}_k(t, \varepsilon) - (x^{(k-1)}(t, \varepsilon) + y_k^{(0)}(t, \varepsilon)) \| =$$

$$= \| \bar{y}_k(t, \varepsilon) - y_k^{(0)}(t, \varepsilon) \| < \varepsilon^{k+1} \overline{M}_k \| \bar{x}(t, \varepsilon) \|,$$

де $\overline{M}_k$ — обмежена величина, незалежна від ε.

4. Співставлення запропонованої процедури та процедури побудови асимптотичного розкладу Васильєвої [8]. А. Б. Васильєвою розроблено метод побудови рівномірного відносно $t \in [0, T]$ асимптотичного наближення до розв'язку задачі Коші тихоновської системи, яке має точність $0(\varepsilon^{k+1})$, де k — довільне ціле число. При цьому асимптотичне наближення (користуючись термінологією Васильєвої) складається з двох частин: регулярної і приграничної. А. Б. Васильєва показала, що для $t \ge t_0 > 0$, де t_0 — як завгодно мале, але фіксоване число, за асимптотичне наближення з тією ж точністю можна взяти тільки регулярну частину:

$$\tilde{x} = x^{(0)}(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \ldots \tag{17}$$

При пошуку кожного наступного наближення за процедурою Васильєвої необхідно шукати відповідний член ряду (17) на основі рекурентних формул із системи лінійних а. р. Систему лінійних а. р. необхідно попередньо формувати на основі аналітичних перетворень, які важко піддаються алгоритмізації при чисельній реалізації процедури. Отримувана система лінійних а. р. при $n \ge 2$, $k \ge 2$ є громіздкою.

На відміну від процедури Васильєвої при запропонованій процедурі кожне наступне наближення визначається на основі системи нелінійних а. р. (6). Для всіх наближень система а. р. має однакову структуру. Це суттєво спрощує алгоритмічну і програмну реалізацію запропонованої процедури. Знаходження кожного наступного наближення чисельними методами спрощується тому, що для цього застосовний метод продовження по параметру. Слід відмітити, що програмне забезпечення для розв'язання системи нелінійних а. р. досить добре розроблене.

1. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
2. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 272 с.
3. *Greenspan D.* A new explicit discrete mechanics with applications // J. Franklin Inst. – 1972. – **294,** № 4.
4. *Шилов Г. Е.* Математический анализ (функции нескольких переменных). – М.: Наука, 1972. – Ч. 1, 2. – 622 с.
5. *Романишин И. М., Синицкий Л. А.* Анализ систем с медленным изменением параметров входных воздействий // Теорет. электротехника. – 1992. – Вып. 51. – С. 72–78.
6. *Хургин Я. И., Яковлев В. П.* Финитные функции в физике и технике. – М.: Наука, 1971. – 408 с.
7. *Васильева А. Б.* Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1963. – **3,** № 4. – С. 611–643.
8. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. – М.: Высш. шк., 1990. – 208 с.

Одержано 28.06.95