УДК 530.1

Л. А. Сахнович (Одес. академия связи)

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ НА ОСИ ДЛЯ КАНОНИЧЕСКИХ СИСТЕМ КОНЕЧНОРАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ *

We reduce spectral problems on an axis to spectral problems on a semiaxis.

Спектральна задача на осі зводиться до спектральної задачі на півосі.

В данной статье рассматривается система конечноразностных уравнений вида

$$\begin{aligned} w(k,z) - w(k-1,z) &= izJq(k)w(k-1,z), \qquad k \geq 1, \\ w(k,z) - w(k-1,z) &= izJq(k-1)w(k,z), \qquad k \leq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

При этом предполагается, что

$$q(k) \geq 0, \qquad q(k)Jq(k) = 0; \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{2}$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & E_m \\ E_m & 0 \end{bmatrix}, \qquad w(0,z) = E_{2m}. \tag{3}$$

Система (1) – (3) является дискретным аналогом системы

$$\frac{dw(x,z)}{dx} = izJq(x)w(x,z), \qquad -\infty < x < \infty, \tag{4}$$

спектральная теория которых строилась в статьях [1 – 3]. Как и в случае (4), спектральные задачи для систем (1) на оси $-\infty < k < \infty$ удается свести к задачам на полуоси $k \geq 1$. Такое сведение осуществляется за счет удвоения размерности системы.

Заметим, что системы вида (1) используются в теории интерполяции [2], теории несамосопряженных операторов, теории уравнения цепочки Тоды [4, 5]. Системы, порожденные матрицами Якоби, являются частным случаем систем (1) (см.[6]).

1. Переход от задач на оси к задачам на полуоси. 1. Обозначим через $l^2(q, \pm N)$ пространство векторов вида

$$\vec{g} = \operatorname{col}[g(1-N), \ldots, g(-0), g(+0), g(1), \ldots, g(N-1)],$$

где $g(k)$ — вектор-столбцы размерности $2m$.

Норма в пространстве $l^2(q, \pm N)$ определяется равенством

$$\begin{aligned} \|\vec{g}\|_q^2 = \sum_{k=1}^{N-1} [g^*(k)\,q(k+1)\,g(k) + g^*(-k)\,q(-1-k)\,g(-k)] \, + \\ + \, g^*(+0)\,q(1)\,g(+0) + g^*(-0)\,q(-1)\,g(-0). \end{aligned} \tag{5}$$

Введем еще пространство $L^2(\tau)$ вектор-функций $F(u)$, $-\infty < u < \infty$, размерности $2m \times 1$ со скалярным произведением

$$(F(u), G(u)) = \int_{-\infty}^{\infty} G^*(t)[d\tau(u)]F(u).$$

---

* Выполнена при частичной финансовой поддержке Международного научного фонда Сороса (грант № СХ 200).

Матрица-функция $\tau(u)$ размерности $2m \times 2m$ предполагается монотонно возрастающей.

Определение 1. *Монотонно возрастающую матрицу-функций $\tau(u)$ размерности $2m \times 2m$ будем называть спектральной для системы* (1) *на интервале $-N \le k \le N$, если оператор*

$$V_N \bar{g} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{N-1} [w^*(k,u)\, q(k+1)\, g(k) + w^*(-k,u)\, q(-1-k)\, g(-k)] +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} [q(1)\, g(+0) + q(-1)\, g(-0)] \tag{6}$$

изометрически отображает $l^2(q, \pm N)$ в $L^2(\tau)$.

2. Введем обозначения

$$w_0(k,z) = T^{-1} \begin{bmatrix} w_+(k,z) & 0 \\ 0 & w_-(k,z) \end{bmatrix} T, \tag{7}$$

где

$$w_\pm(k,z) = w(\pm k, z), \qquad k \ge 0, \tag{8}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} J & E_{2m} \\ -J & E_{2m} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

В силу соотношений (1), (7) и (8) верно равенство

$$w_0(k,z) - w_0(k-1,z) = izJ_0\, q_0(k)\, w_0(k-1,z), \qquad k \ge 1. \tag{10}$$

Здесь

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & E_{2m} \\ E_{2m} & 0 \end{bmatrix}, \quad q_0(k) = T^{-1} \begin{bmatrix} q(k) & 0 \\ 0 & q(-k) \end{bmatrix} T. \tag{11}$$

Из (2), (9) и (11) выводим соотношения

$$T^{-1} \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{bmatrix} T = J_0, \quad q_0(k) \ge 0, \quad q_0(k) J_0\, q_0(k) = 0. \tag{12}$$

Таким образом, от системы (1), где $-N \le k \le N$, мы перешли к системе (10) удвоенной размерности, где $1 \le k \le N$.

3. Для дальнейшего нам понадобятся основные понятия, относящиеся к спектральной задаче на полуоси [4, 6}.

Обозначим через $l^2(q_0, N)$ пространство векторов вида

$$\bar{f} = \mathrm{col}\,[f(0), f(1), \dots, f(N-1)],$$

где $f(k)$ — вектор-столбцы размерности $2m$. Норма в пространстве $l^2(q_0, N)$ определяется равенством

$$\|\bar{f}\|_{q_0}^2 = \sum_{k=0}^{N-1} f^*(k)\, q_0(k+1)\, f(k). \tag{13}$$

Определение 2. *Монотонно возрастающую матрицу-функцию $\tau(u)$ размерности $2m \times 2m$ будем называть спектральной для системы* (10) *на интервале $1 \le k \le N$, если оператор*

$$V\vec{f} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{N-1}[w_+^*(k,u), w_-^*(k,u)]\,T q_0(k+1)\,f(k) \tag{14}$$

изометрически отображает $l^2(q_0, N)$ *в* $L^2(\tau)$.

4. Связь между задачами при $-N \le k \le N$ и $1 \le k \le N$ проясняет следующая теорема.

Теорема 1. *Семейства спектральных матриц-функций системы* (1) $(-N \le \le k \le N)$ *и соответствующей системы* (10) $(1 \le k \le N)$ *совпадают.*

Доказательство. Перепишем формулу (5) в виде

$$\|\vec{g}\|_q^2 = \sum_{k=0}^{N-1}\tilde{g}^*(k)\,q_1(k+1)\,\tilde{g}(k), \tag{15}$$

где

$$\tilde{g}(k) = \operatorname{col}[g(k), g(-k)], \qquad k \ne 0, \tag{16}$$

$$\tilde{g}(0) = \operatorname{col}[g(+0), g(-0)], \tag{17}$$

$$q_1(k) = \begin{bmatrix} q(k) & 0 \\ 0 & q(-k) \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Из второго из равенств (11) и (18) следует

$$\|\vec{g}\|_q^2 = \sum_{k=0}^{N-1}[T^{-1}\tilde{g}(k)]^*\,q_0(k+1)\,[T^{-1}\tilde{g}(k)]. \tag{19}$$

В силу равенств (15) – (18) формула (6) принимает вид

$$V_N\vec{g} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{N-1}[w_+^*(k,u), w_-^*(k,u)]\,q_1(k+1)\,\tilde{g}(k). \tag{20}$$

Сравнивая (14) и (20), выводим равенство

$$V\vec{f} = V_N\vec{g}, \tag{21}$$

где

$$f(k) = T^{-1}\tilde{g}(k). \tag{22}$$

Согласно (13), (19) и (22) имеем

$$\|\vec{g}\|_q^2 = \|\vec{f}\|_{q_0}^2. \tag{23}$$

Утверждение теоремы вытекает непосредственно из равенств (21) и (23).

2. Матрицы-функции Вейля – Титчмарша. В данном пункте вводятся и исследуются матрицы-функции Вейля – Титчмарша для систем на полуоси (первое из уравнений (1)) и систем на оси (уравнения (1)).

1. Начнем с задач на полуоси и запишем в блочном виде матрицы

$$w^*(k,\bar{z}) = \begin{bmatrix} a(k,z) & b(k,z) \\ c(k,z) & d(k,z) \end{bmatrix}, \tag{24}$$

$$w^*(k,z)\,J\,w(k,z) = \begin{bmatrix} -\gamma(k,z) & \delta(k,z) \\ \delta^*(k,z) & -\nu(k,z) \end{bmatrix}, \tag{25}$$

где блоки являются матрицами порядка $m \times m$.

Заметим, что из соотношений (1) – (3) следует равенство

$$w^*(k,z)\,J\,w(k,z) - w^*(k-1,z)\,J\,w(k-1,z) =$$

$$= -\frac{z-\bar{z}}{i}\,w^*(k-1,z)\,q(k)\,w(k-1,z), \quad k \ge 1. \tag{26}$$

Так как $w(0,z) = E_{2m}$, то из (26) выводим

$$w^*(k,z)\,J\,w(k,z) - J \le 0, \quad \operatorname{Im} z > 0. \tag{27}$$

Значит, верно неравенство $\nu(k,z) \ge 0$. Если верно строгое неравенство

$$\nu(k,z) > 0, \quad \operatorname{Im} z > 0, \tag{28}$$

то имеет смысл дробно-линейное преобразование [5]

$$v(k,z) = i\,[a(k,z)\,\mathcal{P}(z) + b(k,z)\,\mathcal{Q}(z)]\times$$

$$\times[c(k,z)\,\mathcal{P}(z) + d(k,z)\,\mathcal{Q}(z)]^{-1}. \tag{29}$$

При этом пары матриц-функций $\mathcal{P}(z)$, $\mathcal{Q}(z)$ мероморфны в верхней полуплоскости и удовлетворяют условиям

$$\det[\mathcal{P}^*(z)\,\mathcal{P}(z) + \mathcal{Q}^*(z)\,\mathcal{Q}(z)] \not\equiv 0, \quad \operatorname{Im} z > 0, \tag{30}$$

$$\mathcal{P}^*(z)\,\mathcal{Q}(z) + \mathcal{Q}^*(z)\,\mathcal{P}(z) \ge 0, \quad \operatorname{Im} z > 0. \tag{31}$$

Матрицы $v(k,z)$ образуют систему вложенных кругов Вейля [2, 6].

Теорема 2. *Пусть* $v(z)$ *принадлежит предельному множеству системы* (29), *причем при* $k \ge k_0$ *выполнено неравенство* (28). *Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{k=0}^{\infty}[E_m, iv^*(z)]\,w^*(k,z)\,q(k+1)\,w(k,z)\begin{bmatrix} E_m \\ -iv(z)\end{bmatrix} < \infty, \quad \operatorname{Im} z > 0. \tag{32}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{P}(k,z)$, $\mathcal{Q}(k,z)$ таковы, что $v(z) = \lim v(k,z)$ при $k \to \infty$. Из (29), (30) вытекает, что $\operatorname{col}[-iv(k,z), E_m]$ и $w^*(k,\bar{z})\operatorname{col}[\mathcal{P}(k,z), \mathcal{Q}(k,z)]$ образуют базисы одного и того же пространства.

В силу (26) верно равенство

$$w^*(k,\bar{z})\,J\,w(k,z) = J. \tag{33}$$

Значит, вектор-столбцы $J\,w(k,z)\operatorname{col}[E_m, -iv(k,z)]$ и $\operatorname{col}[\mathcal{P}(k,z), \mathcal{Q}(k,z)]$ образуют базисы одного и того же пространства. Из (27), (31) вытекает, что это пространство J-неотрицательно, т. е.

$$[E_m, iv^*(k,z)]\,w^*(k,z)\,J\,w(k,z)\begin{bmatrix} E_m \\ -iv(k,z)\end{bmatrix} \ge 0. \tag{34}$$

Запишем теперь конечноразностный аналог соотношения Лагранжа

$$(z-\bar{z})\sum_{k=0}^{N-1} w^*(k,z)\,q(k+1)\,w(k,z) = i\,[J - w^*(N,z)\,J\,w(N,z)]. \tag{35}$$

Из (34), (35) вытекает

$$\sum_{k=0}^{N-1}[E_m, iv^*(N,z)]\,w^*(k,z)\,q(k+1)\,w(k,z)\begin{bmatrix} E_m \\ -iv(k,z)\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{i}{z-\bar{z}}[E_m, iv^*(N,z)][J - w^*(N,z)\,J\,w(N,z)]\begin{bmatrix} E_m \\ -iv(N,z)\end{bmatrix} \le$$

$$\le \frac{v(N,z) - v^*(N,z)}{z-\bar{z}}. \tag{36}$$

Переходя в (36) к пределу при $N \to \infty$, получаем доказываемое неравенство (32).

Из (32) следует, что $v(z)$ является аналогом функции Вейля – Титчмарша в классической теории дифференциальных уравнений (см. [2]).

2. Функция Вейля – Титчмарша для задачи (1) на всей оси $-\infty < k < \infty$ вводится с помощью задачи (10) на полуоси. Матрицу-функцию $v(z)$ порядка $2m \times 2m$ будем называть функцией Вейля – Титчмарша системы (1), если выполнено неравенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} [E_{2m}, iv^*(z)]\, w_0^*(k,z)\, q_0(k+1)\, w_0(k,z)\begin{bmatrix} E_{2m} \\ -iv(z)\end{bmatrix} < \infty, \quad \operatorname{Im} z > 0. \tag{37}$$

Матрицы-функции $v_{\pm}(z)$ порядка $m \times m$ будем называть функциями Вейля – Титчмарша систем

$$w_{\pm}(k,z) - w_{\pm}(k-1,z) = \pm izJ\,q(\pm k)\,w_{\pm}(k-1,z), \quad k \ge 1, \tag{38}$$

если выполнены неравенства

$$\sum_{k=0}^{\infty} [E_m, \pm iv_{\pm}^*(z)]\, w_{\pm}^*(k,z)\, q(\pm(k+1))\, w_{\pm}(k,z)\begin{bmatrix} E_m \\ \mp iv_{\pm}(z)\end{bmatrix} < \infty, \quad \operatorname{Im} z > 0. \tag{39}$$

В силу соотношений (7), (9) неравенство (37) эквивалентно паре неравенств

$$\sum_{k=0}^{\infty} [J \pm iv^*(z)]\, w_{\pm}^*(k,z)\, q(\pm(k+1))\, w_{\pm}(k,z)\,[J \mp iv(z)] < \infty. \tag{40}$$

Запишем $v(z)$ в блочном виде

$$v(z) = \{v_{ij}(z)\}_{i,j=1}^{2},$$

где $v_{ij}(z)$ — матрицы порядка $m \times m$.

Теорема 3. *Пусть задачам (38) соответствуют единственные матрицы-функции Вейля – Титчмарша $v_+(z)$ и $v_-(z)$ (предельные точки Вейля). Если выполнены соотношения*

$$\det v_{11}(z) \ne 0, \quad \det[E_m \pm iv_{12}(z)] \ne 0, \quad \operatorname{Im} z > 0, \tag{41}$$

то справедливы равенства

$$v_{\pm}(z) = -[E_m \mp iv_{21}(z)]\, v_{11}^{-1}(z) = v_{22}(z)\,[E_m \mp iv_{12}(z)]^{-1}, \tag{42}$$

$$[Jv(z)]^2 = -E_{2m}. \tag{43}$$

Доказательство. Соотношения (40) могут быть переписаны в эквивалентной форме

$$\sum_{k=0}^{\infty} [\pm iv_{11}^*(z), E_m \pm iv_{21}^*(z)]\, w_{\pm}^*(k,z)\, q(\pm(k+1))\, w_{\pm}(k,z)\begin{bmatrix} \mp v_{11}(z) \\ E_m \mp iv_{21}(z)\end{bmatrix} < \infty,$$

$$\operatorname{Im} z > 0, \tag{44}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} [E_m \pm iv_{12}^*(z), \pm iv_{22}^*(z)]\, w_\pm^*(k,z)\, q(\pm(k+1))\, w_\pm(k,z) \begin{bmatrix} E_m \mp v_{12}(z) \\ \mp iv_{22}(z) \end{bmatrix} < \infty,$$

$$\operatorname{Im} z > 0. \tag{45}$$

Так как согласно условию теоремы задачам (38) соответствуют предельные точки Вейля, то из (39), (44), (45) вытекают равенства (42). Из равенств (42) выводим

$$v_{21}\, v_{11}^{-1} + v_{11}^{-1} v_{12} = 0, \qquad v_{22} = v_{21}\, v_{11}^{-1} v_{12} - v_{11}^{-1}. \tag{46}$$

Соотношения (46) эквивалентны равенству (43). Теорема доказана.

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Если элементы матрицы* $v(z)$ *являются рациональными функциями, то элементы матриц* $v_\pm(z)$ *также являются рациональными.*

Учитывая соотоношения (41), (42), выразим блоки $v_{kl}(z)$ матрицы $v(z)$ через $v_\pm(z)$:

$$v_{11}(z) = -2\,[v_+(z) + v_-(z)]^{-1}, \tag{47}$$

$$v_{21}(z) = i\,[v_+(z) - v_-(z)]\,[v_+(z) + v_-(z)]^{-1}, \tag{48}$$

$$v_{12}(z) = -i\,[v_+(z) + v_-(z)]^{-1}\,[v_+(z) - v_-(z)], \tag{49}$$

$$v_{22}(z) = \frac{1}{2}\{[v_+(z) + v_-(z)] -$$

$$- [v_+(z) - v_-(z)]\,[v_+(z) + v_-(z)]^{-1}\,[v_+(z) - v_-(z)]\}. \tag{50}$$

Проводя рассуждения теоремы 2 в обратном порядке, убеждаемся, что верна следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть задачам* (38) *соответствуют единственные матрицы-функции Вейля – Титчмарша* $v_+(z)$ *и* $v_-(z)$ *(предельные точки Вейля). Если выполнены соотношения*

$$\det v_\pm(z) \not\equiv 0, \qquad \det[v_+(z) + v_-(z)] \not\equiv 0, \qquad \operatorname{Im} z > 0,$$

то матрица $v(z)$, *блоки которой определяются формулами* (47) – (50), *является матрицей-функцией Вейля – Титчмарша системы вида* (1).

3. Обратная спектральная задача на оси. 1. Чтобы получить эффективную процедуру решения обратной задачи на оси $-\infty < k < \infty$, воспользуемся теорией S-узлов [1]. Обозначим через $\{H_1, H_2\}$ множество ограниченных операторов, действующих из H_1 в H_2. Пусть $H_\pm$ — конечномерные евклидовы пространства, а операторы

$$A_\pm,\ S_\pm \in \{H_\pm, H_\pm\}, \qquad \Phi_k^\pm \in \{G_1, H_\pm\},$$

$k = 1, 2$; $\dim G_1 = m$, образуют $S_\pm$-узлы, т. е. верны соотношения

$$A_\pm S_\pm - S_\pm A_\pm^* = i\,[\Phi_1^\pm (\Phi_2^\pm)^* + \Phi_2^\pm (\Phi_1^\pm)^*]. \tag{51}$$

Предположим далее, что выполняются следующие условия:

I. Операторы $S_\pm$ — положительны.

II. Существуют в H_+ и H_- монотонно возрастающие семейства ортогональных проекторов P_k^+ и P_k^- такие, что

$$A_\pm^* P_k^\pm = P_k^\pm A_\pm^* P_k^\pm, \qquad (P_k^\pm - P_{k-1}^\pm)\, A_\pm (P_k^\pm - P_{k-1}^\pm) = 0, \tag{52}$$

$$\dim(P_k^{\pm} - P_{k-1}^{\pm})\,H_{\pm} = m, \quad P_0 = 0, \quad P_N = E_{\pm}$$

($E_{\pm}$ — единичные операторы в $H_{\pm}$).

Теперь положим

$$S_k^{\pm} = P_k^{\pm} S_{\pm} P_k^{\pm}, \quad \Pi_{\pm} = [\Phi_1^{\pm}, \Phi_2^{\pm}], \tag{53}$$

$$q_{\pm}(k) = \sigma_{\pm}(k) - \sigma_{\pm}(k-1), \quad \sigma_{\pm}(k) = \Pi_{\pm}^*(S_k^{\pm})^{-1} P_k^{\pm}\Pi_{\pm}. \tag{54}$$

Обозначим через $w_{\pm}(k,z)$ решения систем

$$w_{\pm}(k,z) - w_{\pm}(k-1,z) = \pm izJ\,q_{\pm}(k)\,w_{\pm}(k-1,z). \tag{55}$$

Используя обозначения (7) и (53), (54), перепишем (55) в виде (10). Учитывая (51), (52), построим S-узел, соответствующий системе (10). С этой целью введем операторы

$$A = \begin{bmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & -A_- \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} S_+ & 0 \\ 0 & S_- \end{bmatrix}, \quad P_k = \begin{bmatrix} P_k^+ & 0 \\ 0 & P_k^- \end{bmatrix}, \tag{56}$$

действующие в пространстве

$$H = H_+ \oplus H_-.$$

Нам понадобятся также операторы

$$\Pi_0 = \begin{bmatrix} \Pi_+ & 0 \\ 0 & \Pi_- \end{bmatrix} T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \Pi_+ J & \Pi_+ \\ -\Pi_- J & \Pi_- \end{bmatrix}, \quad S_k = P_k S P_k. \tag{57}$$

Простой подсчет показывает, что

$$AS - SA^* = i\Pi_0 J_0 \Pi_0^*, \quad A^* P_k = P_k A^* P_k. \tag{58}$$

В [4, 6] показано, что

$$q_0(k) = \sigma_0(k) - \sigma_0(k-1), \quad \sigma_0(k) = \Pi_0^* S_k^{-1} P_k \Pi_0. \tag{59}$$

Из (57) следует, что спектральной задаче (10) с матрицей (59) соответствуют операторы

$$\Phi_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \Phi_2^+ & \Phi_1^+ \\ -\Phi_2^- & -\Phi_1^- \end{bmatrix}, \quad \Phi_2^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \Phi_1^+ & \Phi_2^+ \\ \Phi_1^- & \Phi_2^- \end{bmatrix}, \quad \Pi_0 = [\Phi_1^0, \Phi_2^0]. \tag{60}$$

Решая обратную задачу на полуоси, мы предполагали операторы A и Φ_2 фиксированными [4, 6]. Выбор этих операторов характеризует класс систем, для которых решается обратная задача. Процедура, изложенная в статьях [4, 6], не может быть непосредственно перенесена на системы вида (10), (59), так как Φ_2^0 зависит не только от фиксированных $\Phi_2^{\pm}$, но и от $\Phi_1^{\pm}$ (см. (60)).

Чтобы приспособить рассматриваемую ситуацию к общей схеме, введем операторы

$$\tilde{\Phi}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \Phi_1^+ & \Phi_1^+ \\ \Phi_1^- & -\Phi_1^- \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Phi}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \Phi_2^+ & \Phi_2^+ \\ -\Phi_2^- & \Phi_2^- \end{bmatrix}, \tag{61}$$

$$u_1 = \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_m \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_2 & u_1 \\ u_1 & u_2 \end{bmatrix}. \tag{62}$$

Непосредственным подсчетом проверяются равенства

$$\Pi_0 = \tilde{\Pi}U, \quad UJ_0U^* = J_0, \quad \tilde{\Pi} = [\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2]. \tag{63}$$

В силу (58) и (63) верно операторное тождество

$$AS - SA^* = i\tilde{\Pi} J_0 \tilde{\Pi}^*, \tag{64}$$

которому соответствует оператор-функция

$$\tilde{\sigma}(k) = \tilde{\Pi}^* S_k^{-1} P_k \tilde{\Pi} \tag{65}$$

и система

$$\tilde{w}(k, z) - \tilde{w}(k-1, z) = izJ_0 \tilde{q}(k) \tilde{w}(k-1, z),$$

где

$$\tilde{q}(k) = \tilde{\sigma}(k) - \tilde{\sigma}(k-1), \qquad \tilde{w}(0, z) = E_{4m}. \tag{66}$$

Из равенств (59), (63), (65) и (66) получаем соотношение

$$\sigma_0(k) = U\tilde{\sigma}(k) U, \tag{67}$$

откуда следует равенство

$$w_0(k, z) = U\tilde{w}(k, z) U.$$

2. Операторному тождеству (64) поставим в соответствие матричное неравенство [2]

$$L(z) = \begin{bmatrix} S & B(z) \\ B^*(z) & C(z) \end{bmatrix} \geq 0, \tag{68}$$

где

$$B(z) = (E - Az)^{-1}[\Phi_1^0 - i\Phi_2^0 v(z)], \qquad C(z) = \frac{v(z) - v^*(z)}{z - \bar{z}}. \tag{69}$$

В статье [2] показана связь неравенства (68) с интерполяционными задачами. Отметим, что (68) является абстрактным аналогом основного матричного неравенства Потапова.

Введем еще неравенство

$$\tilde{L}(z) = \begin{bmatrix} S & \tilde{B}(z) \\ \tilde{B}^*(z) & C(z) \end{bmatrix} \geq 0, \tag{70}$$

где

$$\tilde{B}(z) = (E - Az)^{-1}[\tilde{\Phi}_1 - i\tilde{\Phi}_2 \tilde{v}(z)], \qquad \tilde{C}(z) = \frac{\tilde{v}(z) - \tilde{v}^*(z)}{z - \bar{z}}, \tag{71}$$

а операторы $\tilde{\Phi}_1$, $\tilde{\Phi}_2$ определены формулами (61). Пользуясь обозначениями (62), запишем преобразование

$$\tilde{v}(z) = i\{u_2[-iv(z)] + u_1]\}\{u_1[-iv(z)] + u_2\}^{-1}. \tag{72}$$

Мы предполагаем, что

$$\det\{u_1[-iv(z)] + u_2\} \not\equiv 0. \tag{73}$$

Лемма. *Пусть матрицы* $\tilde{v}(z)$ *и* $v(z)$ *связаны соотношением* (72) *и выполнено условие* (73). *Если* $v(z)$ *удовлетворяет неравенству* (68), *то* $\tilde{v}(z)$ *удовлетворяет неравенству* (70).

Доказательство. Учитывая (63), перепишем (71) в виде

$$\tilde{B}(z) = (E - Az)^{-1}[\Phi_1^0, \Phi_2^0] \cup \operatorname{col}[E, -i\tilde{v}(z)],$$

т. е.

$$\tilde{B}(z) = (E - Az)^{-1}[\Phi_1^0, \Phi_2^0] \operatorname{col}[u_2 - iu_1\tilde{v}(z), u_1 - iu_2\tilde{v}(z)]. \tag{74}$$

Из формул (69), (72) и (74) следует

$$\tilde{B}(z) = B(z)[-iu_1 v(z) + u_2]^{-1}. \tag{75}$$

Из (71) выводим

$$\tilde{C}(z) = [-iu_1 v(z) + u_2]^{*-1} C(z)[-iu_1 v(z) + u_2]^{-1}. \tag{76}$$

Сравнивая (68) и (70), а также учитывая формулы (75) и (76), получаем доказываемое утверждение.

3. Пусть заданы спектральные данные $\tau(u)$ и α системы (1). Тогда с помощью формулы [4, 6]

$$v(z) = \alpha + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{u - z} - \frac{u}{1 + u^2} \right) d\tau(u) \tag{77}$$

находим функцию Вейля – Титчмарша соответствующей системы. Предполагая выполненным условие (73), находим функцию $\tilde{v}(z)$ (см. (72)). Функция $\tilde{v}(z)$ принадлежит классу Неванлинны и, следовательно, допускает представление

$$\tilde{v}(z) = \tilde{\beta} z + \tilde{\alpha} + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{u - z} - \frac{u}{1 + u^2} \right) d\tilde{\tau}(u). \tag{78}$$

Далее будем предполагать, что

$$\tilde{\beta} = 0. \tag{79}$$

Построим теперь операторы

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} (E - Au)^{-1} \tilde{\Phi}_2 [d\tilde{\tau}(u)] \tilde{\Phi}_2^* (E - A^* u)^{-1}, \tag{80}$$

$$\tilde{\Phi}_1 = -i \int_{-\infty}^{\infty} \left[A(E - Au)^{-1} + \frac{u}{1 + u^2} E \right] \tilde{\Phi}_2 \, d\tilde{\tau}(u) + i\tilde{\Phi}_2 \tilde{\alpha}. \tag{81}$$

Процедура решения обратной задачи на оси $-\infty < k < \infty$ для системы (1) описывается следующей теоремой.

Теорема 5. *Пусть заданы операторы* $A_\pm$, $\Phi_2^\pm$ *и спектральные характеристики* $\tau(u)$ *и* α *некоторой системы* (1). *Пусть при этом выполнены условия* I, II *и соотношения* (73), (79), *а операторы* S *и* $\tilde{\Phi}_1$, *определенные соотношениями* (80), (81), *имеют вид*

$$S = \begin{bmatrix} S_+ & 0 \\ 0 & S_- \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\Phi}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \Phi_1^+ & \Phi_1^+ \\ \Phi_1^- & -\Phi_1^- \end{bmatrix}. \tag{82}$$

Тогда система (1) *с заданными спектральными данными* $\tau(u)$ *и* α *находится с помощью формул* (65), (67) *и соотношений*

$$q_0(k) = \sigma_0(k) - \sigma_0(k-1), \quad \begin{bmatrix} q(k) & 0 \\ 0 & q(-k) \end{bmatrix} = T q_0(k) T^{-1}. \tag{83}$$

Доказательство. По заданным $\tau(u)$ и α, пользуясь формулами (72), (77), строим $v(z)$, $\tilde{v}(z)$. Затем с помощью формул (78)–(81) находим S и $\tilde{\Phi}_1$. Из (65), (67) находим $\sigma_0(k)$. Как показано в [4, 6], $\tau(u)$ и α являются спектральными характеристиками построенной системы (10). Из условий (82) вытекает, что $q_0(k) = \sigma_0(k) - \sigma_0(k-1)$ имеет вид (11). Тогда формула (83) приводит к системе (1) на оси $(-\infty < k < \infty)$. Согласно теореме 1 спектральные характеристики построенной системы на оси совпадают с заданными $\tau(u)$ и α. Теорема доказана.

4. Выясним структуру матрицы $\tilde{v}(z)$, определенной формулой (72). Отметим, что условие (73) совпадает с условием $\det v_{11}(z) \not\equiv 0$. Формулу (72) можно переписать в виде

$$\tilde{v}(z) = \begin{bmatrix} -v_{11}^{-1} & -iv_{11}^{-1}v_{12} \\ iv_{21}v_{11}^{-1} & v_{22} - v_{21}v_{11}^{-1}v_{12} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, матрица $\tilde{v}(z)$ в силу (73) имеет следующую блочную структуру:

$$\tilde{v}(z) = \begin{bmatrix} \tilde{v}_{11}(z) & \tilde{v}_{12}(z) \\ \tilde{v}_{12}(z) & \tilde{v}_{11}(z) \end{bmatrix}. \tag{84}$$

Замечание. Если $\tilde{v}(z)$ удовлетворяет условиям (79), (84), то операторы S и Φ_1 имеют вид (82).

1. *Сахнович Л. А.* Задачи факторизации и операторные тождества // Успехи мат. наук. – 1986. – **41**, № 1. – С. 3–55.
2. *Сахнович Л. А.* Метод операторных тождеств и задачи анализа // Алгебра и анализ. – 1993. – **5**, № 1. – С. 3–80.
3. *Сахнович Л. А.* Спектральные задачи для систем уравнений на оси // Докл. АН СССР. – 1986. – **296**, № 5. – С. 1052–1056.
4. *Сахнович Л. А.* О полубесконечной цепочке Тоды // Теорет. и мат. физика. – 1989. – **81**, № 1. – С. 12–23.
5. *Березанский Ю. М.* Интегрирование нелинейных разностных уравнений методом обратной спектральной задачи // Докл. АН СССР. – 1985. – **281**, № 1. – С. 16–19.
6. *Сахнович Л. А.* Нелинейные уравнения и обратные задачи на полуоси. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1987. – 56 с.

Получено 19.10.95