УДК 517.929.5

М. Т. Терехин (Рязан. пед. ун-т),
Л. Г. Насыхова (Башкир. пед. ин-т, Уфа)

СУЩЕСТВОВАНИЕ БИФУРКАЦИОННОГО ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРА СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

We prove a theorem on the existence of nonzero periodic solution of a system of differential equations with a deviation, which depends both on unknown function and on its derivative. This result is obtained for the case where the matrix of linear approximation has zero and imaginary eigenvalues provided that a parameter takes the critical value.

Доведено теорему про існування ненульового періодичного розв'язку системи диференціальних рівнянь з відхиленням, яке залежить як від невідомої функції, так і від її похідної, у випадку, коли матриця лінійного наближення при критичному значенні параметра має ненульові і уявні власні значення.

Проблема существования периодического решения систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, содержащих малый параметр, изучалась в работах [1 – 3].

В настоящей статье ставится задача: определить условия существования ненулевого периодического решения системы дифференциальных уравнений с отклонением, зависящим как от неизвестной функции, так и от ее производной.

Пусть задана система дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}(t) = [L(\lambda) + F(t, x(t), x(t - A(t, x(t), \dot{x}(t))), \dot{x}(t - B(t, x(t), \dot{x}(t))), \lambda)]x(t), \tag{1}$$

где $x(t)$ — искомая вектор-функция, L, F — $(n \times n)$-матрицы, A, B — известные конечномерные вектор-функции, под символами $x(t - A(t, x(t), \dot{x}(t)))$, $\dot{x}(t - B(t, x(t), \dot{x}(t)))$ понимаем вектор-функции соответственно с компонентами $x_i(t - a^{(n_i)}(t, x(t), \dot{x}(t)))$, $\dot{x}_i(t - b^{(m_i)}(t, x(t), \dot{x}(t)))$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n_i = 1, 2, \ldots, \mu_i$, $m_i = 1, 2, \ldots, p_i$, μ_i, p_i — натуральные числа, $\lambda \in E_\nu$, λ — параметр, E_s — s-мерное векторное пространство, $t \in I =]-\infty, \infty[$.

Под решением системы (1) будем понимать двустороннее решение, т. е. непрерывно дифференцируемую на интервале I вектор-функцию $x(t)$, при любом $t \in I$ удовлетворяющую системе (1).

Пусть $b \in E_s$, $|b| = \max_j |b_j|$, $|B(t)| = \max_{|x| \le 1} |B(t)x|$, $\|B\| = \sup_{0 \le t \le \omega} |B(t)|$, $\|\varphi\|_C = \sup_{0 \le t \le \omega} |\varphi(t)|$, $\|\dot{\varphi}\|_C = \sup_{0 \le t \le \omega} |\dot{\varphi}(t)|$, $\|\varphi\| = \max\{\|\varphi\|_C, \|\dot{\varphi}\|_C\}$, φ — вектор-функция, определенная на сегменте $[0, \omega]$, $B(t)$, $t \in [0, \omega]$, — $(n \times n)$-матрица, $\omega > 0$ — некоторое число, $\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i$, $r = \sum_{i=1}^n p_i$, R_0, p_0, δ_0 — некоторые положительные числа, $\lambda_0 \in E_\nu$ — фиксированный вектор, $\Lambda(\delta_0) = \{\lambda : \lambda \in E_\nu, |\lambda - \lambda_0| \le \delta_0\}$, $D_1 = \{(t, x, u, v, \lambda) : t \in I, x \in E_n, u \in E_\mu, v \in E_r, \lambda \in E_\nu, |x| \le R_0, |u| \le R_0, |v| \le p_0, |\lambda - \lambda_0| \le \delta_0\}$, $D_2 = \{(t, x, z) : t \in I, x \in E_n, z \in E_n, |x| \le R_0, |z| \le p_0\}$ и пусть выполнены следующие условия:

I. На множестве D_1 матрица $F(t, x, u, v, \lambda)$ определена, непрерывна по совокупности переменных, ω-периодическая по t и удовлетворяет условиям Липшица по переменным t, x, u, v соответственно с постоянными k_1, k_2, k_3, k_4, $F(t, 0, 0, 0, \lambda) \equiv 0$.

II. Вектор-функция $A(t, x, z)$ на множестве D_2 определена, непрерывна по совокупности переменных, ω-периодическая по t и удовлетворяет условиям Липшица по переменным t, x, z соответственно с постоянными s_1, s_2, s_3.

III. Вектор-функция $F(t, x, z)$ на множестве D_2 определена, непрерывна по совокупности переменных, ω-периодическая по t и удовлетворяет условию Липшица по переменным t, x, z соответственно с постоянными r_1, r_2, r_3.

Очевидно, что $x \equiv 0$ является решением системы (1) при любом $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$.

Символом $w(R, p)$ обозначим множество всех непрерывно дифференцируемых на интервале I, ω-периодических n-мерных вектор-функций φ, при любом $t \in I$ удовлетворяющих неравенствам $|\varphi(t)| \le R$, $|\dot\varphi(t)| \le p$.

Определение. *Следуя* [4], *вектор* $\lambda_0 \in E_\nu$ *назовем бифуркационным значением параметра* λ *системы* (1), *если для любого числа* $\varepsilon > 0$ *существует вектор* $\lambda \in \Lambda(\varepsilon)$, *при котором система* (1) *имеет ненулевое периодическое решение* $x(t)$, *удовлетворяющее неравенству* $|x(t)| < \varepsilon$ *при любом* $t \in [0, \omega]$.

Одновременно с системой (1) рассмотрим систему уравнений

$$\dot y = [L(\lambda) + \overline{F}(t, \lambda, \varphi)]\, y, \tag{2}$$

где $\varphi \in w(R, p)$, $\overline{F}(t, \lambda, \varphi(t)) = F(t, \varphi(t), \varphi(t - A(t, \varphi(t), \dot\varphi(t))), \dot\varphi(t - B(t, \varphi(t), \dot\varphi(t))), \lambda)$.

Пусть $Y(t, \lambda, \varphi)$ — фундаментальная матрица решений системы (2), $Y(0, \lambda, \varphi) = E$, E — единичная матрица. Тогда общее решение системы (2) определится равенством

$$y(t, \lambda, \varphi) = Y(t, \lambda, \varphi)\alpha_\varphi, \tag{3}$$

α_φ — некоторый постоянный вектор.

Равенство (3) при любом фиксированном векторе $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$ на множестве $w(R, p)$ определяет оператор $\Gamma_\lambda\colon \varphi \to \Gamma_\lambda\varphi \equiv y(t, \lambda, \varphi)$.

Теорема 1. *Неподвижные точки оператора* Γ_λ, *принадлежащие множеству* $w(R, p)$, *являются* ω-*периодическими решениями системы* (1).

Доказательство. Пусть $\varphi^* \in w(R, p)$ — неподвижная точка оператора Γ_λ. Это значит, что φ^* — решение системы (2), и, следовательно, решение системы (1).

Теорема 2. *Если*:

1) K *и* Λ — *замкнутые компактные множества некоторых линейных нормированных пространств*, K — *выпуклое множество*;

2) *на подмножестве множества* $K \times \Lambda$ *определен оператор* $S_\lambda v$ *такой, что для любого* $v \in K$ *существует единственное* $\lambda \in \Lambda$, *удовлетворяющее включению* $S_\lambda v \in K$;

3) *из того, что* $v_n \to v_0$, $\lambda_n \to \lambda_0$, $u_n = S_{\lambda_n} v_n$, $u_n \to u_0$, *следует* $u_0 = S_{\lambda_0} v_0$,

то существуют $v^* \in K$, $\lambda^* \in \Lambda$ *такие, что* $v^* = S_{\lambda^*} v^*$.

Доказательство. Пусть ε^k — произвольное положительное число. Так как K — компактное множество, то существует конечная ε^k-сеть $v_1^k, v_2^k, \ldots, v_{n_k}^k$ для множества K, $v_i^k \in K$, $i = 1, 2, \ldots, n_k$.

Рассмотрим функции φ_i^k, w_i^k, определенные на множестве K равенствами

$$\varphi_i^k(v) = \max\left\{\varepsilon^k - \|v - v_i^k\|, 0\right\},$$

$$w_i^k(v) = \frac{\varphi_i^k(v)}{\sum_{j=1}^{n_k} \varphi_j^k(v)}.$$

Функции φ_i^k непрерывны и неотрицательны на множестве K, причем для любого $v \in K$ найдется хотя бы одно j такое, что $\varphi_j^k(v) > 0$. Поэтому и функции w_i^k непрерывны на множестве K. Так как $v_i^k \in K$, то согласно условию 2 теоремы существует единственное $\lambda_i^k \in \Lambda$, удовлетворяющее включению $S_{\lambda_i}^k v_i^k \in K$.

Пусть $u_i^k = S_{\lambda_i}^k v_i^k$. Непрерывное отображение $T_k\colon K \to K$ определим равенством

$$T_k v = \sum_{i=1}^{n_k} w_i^k(v) u_i^k.$$

Так как $u_i^k \in K$, $w_i^k(v) \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n_k} w_i^k(v) = 1$, то из выпуклости множества K следует, что $T_k v \in K$. Таким образом, при любом k непрерывное отображение T_k преобразует множество K в себя. Поэтому по теореме Шаудера о неподвижной точке существует $v_k \in K$, удовлетворяющее равенству $T_k v_k = v_k$.

Из условия 2 теоремы следует, что для любого $v_k \in K$ существует единственное $\lambda_k \in \Lambda$, при котором $u_k = S_{\lambda_k} v_k \in K$.

Из компактности множеств K и Λ следует существование последовательностей (ε^k), (v_k), (λ_k) таких, что

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon^k = 0, \qquad \lim_{k\to\infty} v_k = v^*, \qquad \lim_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda^*.$$

В силу замкнутости множеств K и Λ $v^* \in K$, $\lambda^* \in \Lambda$. Следовательно (см. условие 3 теоремы), $u^* = S_{\lambda^*} v^* \in K$, где $u^* = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$.

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Тогда существует номер N такой, что при любом $k \geq N$ $\varepsilon^k < \varepsilon/2$, $\| v_k - v^* \| < \varepsilon/2$, $\| \lambda_k - \lambda^* \| < \varepsilon$.

Рассмотрим те значения i, при которых $w_i^k(v_k) > 0$. Следовательно, при $k \geq N$

$$\| v_i^k - v^* \| \leq \| v_i^k - v_k \| + \| v_k - v^* \| < \varepsilon^k + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Из условия 3 теоремы следует, что для любого числа $\sigma > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что как только $\| v - v^* \| < \delta$, $\| \lambda - \lambda^* \| < \delta$, выполнено неравенство $\| S_\lambda v - u^* \| < \sigma$.

Пусть $0 \leq \bar\varepsilon \leq \delta$. Выберем номер N_1 таким образом, чтобы при всех $k \geq N_1$ и любом i, при котором $w_i^k(v_k) > 0$, выполнялись неравенство $\| v_i^k - v^* \| < \bar\varepsilon$, в силу единственности λ^* неравенство $\| \lambda_i^k - \lambda^* \| < \bar\varepsilon$, но тогда и неравенство $\| u_i^k - u^* \| < \sigma$.

Из равенства

$$v_k = \sum_{i=1}^{n_k} w_i^k(v) u_i^k$$

следует, что v_k есть выпуклая комбинация тех u_i^k, которые удовлетворяют неравенству $\| u_i^k - u^* \| < \sigma$. Поэтому $\| v_k - u^* \| < \sigma$. Переходя к пределу при $k \to \infty$ и учитывая произвольность σ, получаем $v^* = S_{\lambda^*} v^*$. Теорема доказана.

Матрицу $Y(t, \lambda, \varphi)$ можно представить в виде $Y(t, \lambda, \varphi) = X(t, \lambda) + \Phi(t, \lambda, \varphi)$, где $X(t, \lambda)$ — фундаментальная матрица решений системы $\dot{x} = L(\lambda)x$, $X(0, \lambda) = E$, матрица $\Phi(t, \lambda, \varphi)$ является решением системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\Phi} = [L(\lambda) + \overline{F}(t, \lambda, \varphi)]\Phi + \overline{F}(t, \lambda, \varphi)X(t, \lambda), \tag{4}$$

при любом $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$ удовлетворяющим равенству $\Phi(0, \lambda, \varphi) = 0$.

Пусть $\overline{F}(t, \lambda, \varphi) = [f_{mv}(t, \lambda, \varphi)]_1^n$, $\Phi(t, \lambda, \varphi) = [\psi_{mv}(t, \lambda, \varphi)]_1^n$ и при любом $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$ матрица $L(\lambda)$ имеет k действительных собственных значений $\mu_l(\lambda)$, $l \in \{1, 2, \dots, k\}$, q пар комплексно-сопряженных собственных значений $\sigma_j(\lambda) \pm i\tau_j(\lambda)$, $j \in \{1, 2, \dots, q\}$, и неособенным линейным преобразованием приводима к виду $L(\lambda) = \operatorname{diag}\{L_1(\lambda), A_1(\lambda), \dots, A_q(\lambda), \mu_1(\lambda), \dots, \mu_k(\lambda)\}$, в котором при любом $j \in \{1, 2, \dots, q\}$ матрица $A_j(\lambda)$ определяется равенством

$$A_j(\lambda) = \begin{pmatrix} \sigma_j(\lambda) & \tau_j(\lambda) \\ -\tau_j(\lambda) & \sigma_j(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Далее будем предполагать, что такое преобразование выполнено.

Для простоты положим $\lambda_0 = 0$.

Будем полагать также, что λ — $(2q + k)$-мерный вектор; в противном случае (т. е. при условии, что λ — ν-мерный вектор и $\nu > 2q + k$) выберем те $2q + k$ координат вектора λ (заменив остальные нулями), которые удовлетворяют условиям теоремы 3.

Теорема 3. *Пусть*:

1) *выполнены условия* I – III;

2) *при любых* $j \in \{1, 2, \dots, q\}$, $l \in \{1, 2, \dots, k\}$ *и* $\delta \in \,]0, \delta_0]$ *на множестве* $\Lambda(\delta)$

$$\sigma_j(\lambda) = \sum_{s=1}^{2q+k} a_{js}\lambda_s^{n_s} + \sigma_j^*(\lambda),$$

$$\tau_j(\lambda) = \sum_{s=1}^{2q+k} a_{q+js}\lambda_s^{n_s} + \tau_j(0) + \tau_j^*(\lambda),$$

$$\mu_l(\lambda) = \sum_{s=1}^{2q+k} a_{2q+ls}\lambda_s^{n_s} + \mu_l^*(\lambda),$$

где n_s — *натуральные нечетные числа,* $\cos\tau_j(0)\omega = 1$, *функции* $\sigma_j^*(\lambda)$, $\tau_j^*(\lambda)$, $\mu_l^*(\lambda)$ *удовлетворяют условиям Липшица по переменной* $\overline{\lambda} = (\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \dots, \overline{\lambda}_{2q+k})$, $\overline{\lambda}_s = \lambda_s^{n_s}$, *с постоянной* γ *и* $\gamma \to 0$ *при* $\delta \to 0$, *матрица* $B_0 = [a_{mv}]_1^{2q+k}$ *неособенная;*

3) *на множестве* $\Lambda(\delta_0)$ *при любом* $t \in [0, \omega]$ *для любой вектор-функции* $\varphi \in w(R_0, p_0)$ *функция* $f_{mv}(t, \lambda, \varphi)$, $(m, v) \in \{1, 2, \dots, n\}$ *имеет непрерывные частные производные по координатам вектора* $\overline{\lambda}$ *и* $\partial f_{mv}(t, \lambda, \varphi)/\partial\overline{\lambda}_s \to 0$

при $\| \varphi \| \to 0$ *равномерно относительно* $t \in [0, \omega]$, $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$;

4) *на множестве* $\Lambda(\delta_0)$ *матрица* $L_1(\lambda)$ *непрерывно дифференцируема по координатам вектора* $\bar{\lambda}$, *матрица* $L_1(0)$ *не имеет собственных значений вида* $\pm i\nu^* \tau_j(0)$, $\nu^* = 1, 2, \ldots$.

Тогда $\lambda_0 = 0$ — *бифуркационное значение параметра* λ *системы* (1).

Доказательство. Пусть $\alpha > 0$ — число, удовлетворяющее неравенству $\| L(0) \| < \alpha$. Тогда из условий 1, 2 и 4 теоремы следует, что существуют такие числа $R_1 \in \,]0, R_0]$, $p_1 \in \,]0, p_0]$ и $\delta_1 \in \,]0, \delta_0]$, что для любой вектор-функции $\varphi \in w(R_1, p_1)$, любого вектора $\lambda \in \Lambda(\delta_1)$ и любого $t \in [0, \omega]$ $\| L(\lambda) \| + \| \bar{F}(t, \lambda, \varphi) \| < \alpha$.

Кроме того, числа R_1 и p_1 выберем так, чтобы для любых чисел $R \in \,]0, R_1]$, $p \in \,]0, p_1]$ выполнялись неравенства $\eta = 1 - R(k_3 p s_3 + k_4 + k_4 r_1 + k_4 r_2 p) > 0$, $\eta^2 - 4\mu_0 \ge 0$, где $\mu_0 = k_4 r_3 d R$, $d = p\alpha + R(k_1 + k_2 p + k_3 p + k_3 p s_1 + k_3 p^2 s_2)$.

Пусть $k_0 > 0$ — число, удовлетворяющее неравенству $\mu_0 k_0^2 - k_0(\eta - 1) + 1 \le k_0$. Из неравенства $\eta^2 - 4\mu_0 \ge 0$ следует, что такое k_0 существует.

Символом $w^*(R, p)$ обозначим множество всех вектор-функций $\varphi \in w(R, p)$ таких, что для любых $(t_1, t_2) \in [0, \omega]$ $|\dot{\varphi}(t_1) - \dot{\varphi}(t_2)| \le k_0 d |t_1 - t_2|$. Следовательно, $w^*(R, p)$ — выпуклое, замкнутое, компактное множество. Докажем, что числа R, p и δ можно выбрать так, что для любой вектор-функции $\varphi \in w^*(R, p)$ существует единственный вектор $\lambda \in \Lambda(\delta)$, при котором $\Gamma_\lambda \varphi \in w^*(R, p)$. Тогда согласно теореме 2 $(K = w^*(R, p),\ \Lambda = \Lambda(\delta))$ будут существовать вектор-функция $\varphi^* \in w^*(R, p)$ и вектор $\lambda^* \in \Lambda(\delta)$ такие, что $\Gamma_{\lambda^*} \varphi^* = \varphi^*$. Теорема будет доказана, если будет установлено, что $\| \varphi^* \| \ne 0$.

Из условия 1 теоремы следует, что при $\varphi \in w^*(R, p)$ и $\| \varphi \| \to 0$ $| \bar{F}(t, \lambda, \varphi)| \to 0$ равномерно относительно $t \in [0, \omega]$, $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$. Но тогда согласно равенству (4) равномерно относительно $t \in [0, \omega]$, $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$ $|\Phi(t, \lambda, \varphi)| \to 0$ при $\| \varphi \| \to 0$. Кроме того, из равенства (4) и условия 3 теоремы следует, что при любых $(m, v) \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $t \in [0, \omega]$ функция $\psi_{mv}(t, \lambda, \varphi)$ на множестве $\Lambda(\delta_0)$ имеет непрерывные частные производные по координатам вектора $\bar{\lambda}$ и $\partial \psi_{mv}(t, \lambda, \varphi) / \partial \bar{\lambda}_s \to 0$ при $\| \varphi \| \to 0$ равномерно относительно $t \in [0, \omega]$, $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$.

Из условий 3 и 4 теоремы следует, что существуют такие числа $R \in \,]0, R_1]$, $p \in \,]0, p_1]$, $\delta \in \,]0, \delta_1]$ и матрица $Q(\lambda, \varphi)$ с отличным от нуля, не зависящим от λ и φ определителем (см. [5]), что для любого вектора $\lambda \in \Lambda(\delta)$, любой вектор-функции $\varphi \in w^*(R, p)$ выполнено равенство $(Y(\omega, \lambda, \varphi) - E) Q(\lambda, \varphi) = [B_{mv}(\lambda, \varphi)]_1^2$, в котором $B_{12}(\lambda, \varphi)$ — $[n - (2q + k)] \times 1$-нулевая матрица, $B_{22}(\lambda, \varphi)$ — $(2q + k) \times 1$-матрица, элементами которой являются $\exp[\sigma_j(\lambda)\omega] \sin \tau_j(\lambda)\omega + \beta_{1j}(\lambda, \varphi)$, $\exp[\sigma_j(\lambda)\omega] \cos \tau_j(\lambda)\omega - 1 + \beta_{2j}(\lambda, \varphi)$, $j = 1, 2, \ldots, q$, $\exp[\mu_l(\lambda)\omega] - 1 + \beta_l(\lambda, \varphi)$, $l = 1, 2, \ldots, k$, при этом для любых $j \in \{1, 2, \ldots, q\}$, $s \in \{1, 2, \ldots, 2q + k\}$, $l \in \{1, 2, \ldots, k\}$

$$\lim_{\|\varphi\| \to 0} \beta_{1j}(\lambda, \varphi) = \lim_{\|\varphi\| \to 0} \beta_{2j}(\lambda, \varphi) = \lim_{\|\varphi\| \to 0} \beta_l(\lambda, \varphi) = 0,$$

$$\lim_{\|\varphi\|\to 0} \partial\beta_{1j}(\lambda,\varphi)/\partial\overline{\lambda}_s = \lim_{\|\varphi\|\to 0} \partial\beta_{2j}(\lambda,\varphi)/\partial\overline{\lambda}_s = \lim_{\|\varphi\|\to 0} \partial\,\beta_l(\lambda,\varphi)/\partial\overline{\lambda}_s = 0$$

равномерно относительно $\lambda \in \Lambda(\delta)$.

Убедимся, что числа $R \in\ ]0, R_1]$, $p \in\ ]0, p_1]$ и $\delta \in\ ]0, \delta_1]$ можно выбрать так, что для любой вектор-функции $\varphi \in w^*(R, p)$ существовал единственный вектор $\lambda \in \Lambda(\delta)$ такой, что

$$\begin{gathered}
\exp[\sigma_j(\lambda)\omega]\sin\tau_j(\lambda)\omega + \beta_{1j}(\lambda,\varphi) = 0,\\
\exp[\sigma_j(\lambda)\omega]\cos\tau_j(\lambda)\omega - 1 + \beta_{2j}(\lambda,\varphi) = 0,\\
\exp[\mu_l(\lambda)\omega] - 1 + \beta_l(\lambda,\varphi) = 0,\\
j = 1, 2, \ldots, q, \quad l = 1, 2, \ldots, k.
\end{gathered} \tag{5}$$

Систему (5) запишем в виде

$$\begin{gathered}
\sigma_j(\lambda)\omega = \frac{1}{2}\ln\left[1 - 2\beta_{2j}(\lambda,\varphi) + \beta_{2j}^2(\lambda,\varphi) + \beta_{1j}^2(\lambda,\varphi)\right],\\
\tau_j(\lambda)\omega = -\operatorname{arctg}\frac{\beta_{1j}(\lambda,\varphi)}{1-\beta_{2j}(\lambda,\varphi)} + \tau_j(0)\omega,\\
\mu_l(\lambda)\omega = \ln[1 - \beta_l(\lambda,\varphi)].
\end{gathered} \tag{6}$$

Учитывая условие 2 теоремы, систему (6) заменим системой

$$\overline{\lambda} = \frac{1}{\omega}B_0^{-1}\left[\gamma_1(\overline{\lambda}) + \gamma_2(\overline{\lambda},\varphi)\right],$$

в которой векторы $\gamma_1(\overline{\lambda})$ и $\gamma_2(\overline{\lambda},\varphi)$ определяются равенствами

$$\gamma_1(\overline{\lambda}) = \left(\sigma_j^*(\lambda),\ \tau_j^*(\lambda),\ j = 1, 2, \ldots, q,\ \mu_l^*(l),\ l = 1, 2, \ldots, k\right),$$

$$\gamma_2(\overline{\lambda},\varphi) = \left(\frac{1}{2}\ln\left[1 - 2\beta_{1j}(\lambda,\varphi) + \beta_{2j}^2(\lambda,\varphi) + \beta_{1j}^2(\lambda,\varphi)\right], -\operatorname{arctg}\frac{\beta_{1j}(\lambda,\varphi)}{1-\beta_{2j}(\lambda,\varphi)},\right.$$

$$\left. j = 1, 2, \ldots, q,\ \ln[1 - \beta_l(\lambda,\varphi)],\ l = 1, 2, \ldots, k\right).$$

Оператор A_0 определим равенством

$$A_0\overline{\lambda} = \frac{1}{\omega}B_0^{-1}\left[\gamma_1(\overline{\lambda}) + \gamma_2(\overline{\lambda},\varphi)\right].$$

Из условий 2 – 4 теоремы следует существование таких чисел $R \in\ ]0, R_1]$, $p \in\ ]0, p_1]$ и $\delta \in\ ]0, \delta_1]$, что для любой фиксированной вектор-функции $\varphi \in$ $\in w^*(R, p)$ оператор A_0 на множестве $\{\overline{\lambda}: |\overline{\lambda}| \le \delta\}$ непрерывен, удовлетворяет включению $A_0\overline{\lambda} \in \{\overline{\lambda}: |\overline{\lambda}| \le \delta\}$, является сжимающим оператором и, следовательно, имеет единственную неподвижную точку. А это значит, что для любой вектор-функции $\varphi \in w^*(R, p)$ существует единственный вектор $\lambda_\varphi \in$ $\in \Lambda(\delta)$ такой, что $B_{22}(\lambda_\varphi, \varphi) = 0$.

Пусть a — n-мерный вектор, первые $n-1$ координаты которого равны нулю, n-я координата равна a_n и $a_n \ne 0$. Тогда $(Y(\omega, \lambda_\varphi, \varphi) - E)Q(\lambda_\varphi, \varphi)a = 0$. Следовательно, положив $\alpha_\varphi = Q(\lambda_\varphi, \varphi)a$, получим, что $y(t, \lambda_\varphi, \varphi) = Y(t, \lambda_\varphi,$ $\varphi)\alpha_\varphi$ — ω-периодическое решение системы (2). Выберем число $a_n \ne 0$ таким образом, чтобы для любой вектор-функции $\varphi \in w^*(R, p)$ выполнялись неравенства $\| y(t, \lambda_\varphi, \varphi)\|_C \le R$, $\| \dot y(t, \lambda_\varphi, \varphi)\|_C \le p$. Непосредственным подсчетом убеждаемся, что для любых чисел $(t_1, t_2) \in [0, \omega]$ $| \dot y(t_1, \lambda_\varphi, \varphi) - \dot y(t_2, \lambda_\varphi, \varphi)| \le [\alpha p + R(k_1 + k_2 p + k_3 p + k_3 s_1 p + k_3 s_2 p^2) + R k_0 d(k_3 p s_3 + k_4 + k_4 r_1 + k_4 r_2 p) + k_4 r_3 R k_0^2 d^2] |t_1 - t_2|$ или, учитывая обозначения, $| \dot y(t_1, \lambda_\varphi, \varphi) - \dot y(t_2, \lambda_\varphi, \varphi)| \le d(\mu_0 k_0^2 - k_0(\eta - 1) + 1) |t_1 - t_2| \le d k_0 |t_1 - t_2|$.

Таким образом, получаем, что выбор чисел $R \in \,]0, R_1]$, $p \in \,]0, p_1]$ и $\delta \in \,]0, \delta_1]$, при которых для любой вектор-функции $\varphi \in w^*(R, p)$ существует единственный вектор $\lambda \in \Lambda(\delta)$ такой, что $\Gamma_\lambda \varphi \equiv y(t, \lambda, \varphi) \in w^*(R, p)$, возможен. Но тогда по теореме 2 существуют вектор-функция $\varphi^* \in w^*(R, p)$ и вектор $\lambda^* \in \Lambda(\delta)$ такие, что φ^* — неподвижная точка оператора Γ_{λ^*}. А так как $\varphi^*(t) = Y(t, \lambda^*, \varphi^*)\alpha_{\varphi^*}$, $\alpha_{\varphi^*} = Q(\lambda^*, \varphi^*)a \ne 0$, то φ^* — ненулевое ω-периодическое решение системы (1) при $\lambda = \lambda^*$, т. е. $\lambda_0 = 0$ — бифуркационное значение параметра λ системы (1). Теорема доказана.

Замечание. Теорема 3 остается справедливой и тогда, когда матрица F и вектор-функции A, B в системе (1) явно не зависят от t. В этом случае в теореме утверждается существование ненулевого периодического решения системы (1) с периодом ω, при любом $j \in \{1, 2, \ldots, q\}$ удовлетворяющим равенству $\cos \tau_j(0)\omega = 1$.

1. *Рябов Ю. А.* Метод малого параметра в теории периодических решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Тр. сем. по теории дифференц. уравнений с отклоняющимся аргументом. – 1962. – **1**. – С. 103–113.
2. *Айзенгендлер П. Г., Вайнберг М. М.* О ветвлении периодических решений дифференциальных уравнений с запаздыванием // Изв. вузов. Математика. – 1969. – № 10. – С. 3–10.
3. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
4. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1966. – 331 с.
5. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1966. – 575 с.

Получено 10.04.95