УДК 517.5

В. Ф. Бабенко, А. А. Руденко (Днепропетр. ун-т)

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ БИЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В ЛИНЕЙНЫХ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ *

We study the problem of the optimal recovery of bilinear functionals on the basis of optimal linear information in the general statement. We also represent some new results for the special function spaces.

Досліджується задача оптимального відновлення білінійних функціоналів за оптимальною лінійною інформацією у загальній постановці. Наведено також деякі нові результати для конкретних функціональних просторів.

Пусть X — линейное нормированное пространство над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел, X^* — сопряженное к X пространство, $\langle x, x^* \rangle$ — значение функционала $x^* \in X^*$ на элементе $x \in X$; $W \subset X$ и $W^* \subset X^*$ — заданные множества.

Будем рассматривать задачу оптимального восстановления билинейного функционала $\langle x, x^* \rangle$ на множествах W и W^*. Для точной формулировки задачи введем необходимые обозначения и определения.

Линейные ограниченные операторы $I\colon X \to \mathbb{R}^n$ и $I_*\colon X^* \to \mathbb{R}^n$ будем называть информационными операторами, а произвольную функцию $\Phi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — методом восстановления. Положим

$$R(W, W^*; I, I_*; \Phi) := \sup\{|\langle x, x^* \rangle - \Phi(I(x), I_*(x^*))|\colon x \in W,\ x^* \in W^*\}.$$

Задача состоит в том, чтобы для заданных множеств W и W^* найти величину

$$R_n(W, W^*) := \inf_{I, I_*} \inf_{\Phi} R(W, W^*; I, I_*; \Phi) \tag{1}$$

и указать оптимальные (т. е. реализующие инфимумы в правой части (1), если, конечно, они существуют) информационные операторы I и I_*, а также оптимальный метод восстановления Φ.

Эта задача изучалась в работах [1 – 3], в которых для ряда важных классов функций W и W^* было получено ее точное решение. В данной статье мы приведем одну общую теорему, позволяющую оценивать величину $R_n(W, W^*)$ сверху через линейные поперечники некоторых множеств, связанных с множествами W и W^*, и снизу через колмогоровские поперечники таких множеств. В ряде важных случаев получаемые оценки сверху и снизу величины $R_n(W, W^*)$ совпадают, что позволяет, во-первых, рассматривать многие результаты работ [1 – 3] как следствие из этой общей теоремы и известных результатов по вычислению поперечников, и, во-вторых, получить ряд конкретных новых результатов, дополняющих результаты [1 – 3].

Множества W и W^* будем определять по следующей схеме, в которую

* Выполнена при частичной финансовой поддержке Международного научного фонда (грант № U92000) и Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий.

вписываются определения большинства практически важных классов функций (что будет показано ниже при изложении конкретных результатов).

Пусть в пространстве X задан некоторый проектор $P: X \to X$, и $\mathfrak{N}(P)$ и $\mathfrak{R}(P)$ — соответственно ядро и образ проектора P. Пусть Y, Z — вещественные нормированные пространства, $A: Y \to X$ и $B: Z \to X^*$ — линейные ограниченные операторы такие, что $\mathfrak{R}(A) \subset \mathfrak{N}(P)$, $\mathfrak{R}(B) \subset \mathfrak{N}(P^*)$. Пусть $H \subset \mathfrak{R}(P)$, $H^* \subset \mathfrak{R}(P^*)$ — подпространства размерности $\dim H = \dim H^* = = k < \infty$. Определим множества W и W^* следующим образом:

$$W = W(A, P, H) = \{ x = h + Ay: \ \|y\|_Y \le 1, \ h \in H \},$$

$$W^* = W(B, P^*, H^*) = \{ x^* = h^* + Bz: \ \|z\|_Z \le 1, \ h^* \in H^* \}.$$

В случае, когда $P = Id$ — тождественный оператор, вместо $W(A, P, H)$ будем писать $W(A)$. Через $d_n(F, X)$ и $\lambda_n(F, X)$ будет обозначать n-поперечник по Колмогорову и линейный n-поперечник множества $F \subset X$ в пространстве X (см., например, [4]).

Основным результатом данной статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть X — рефлексивное пространство, $W = W(A, P, H)$, $W^* = W(B, P^*, H^*)$ и $n > k$. Тогда*

$$R_n(W, W^*) \ge \max \{ d_{n-k}(W(B^*A), Z^*), d_{n-k}(W(A^*B), Y^*) \}. \tag{2}$$

Если для линейных поперечников $\lambda_{n-k}(W(B^*A), Z^*)$ и $\lambda_{n-k}(W(A^*B), Y^*)$ существуют экстремальные подпространства [4, с. 18], *которые лежат в замыкании линейных оболочек множеств $W(B^*A)$ и $W(A^*B)$ соответственно, то*

$$R_n(W, W^*) \le \min \{ \lambda_{n-k}(W(B^*A), Z^*), \lambda_{n-k}(W(A^*B), Y^*) \}. \tag{3}$$

Если линейные поперечники множеств $W(B^*A)$ или $W(A^*B)$ совпадают с колмогоровскими, то

$$R_n(W, W^*) = \max \{ d_{n-k}(W(B^*A), Z^*), d_{n-k}(W(A^*B), Y^*) \}. \tag{4}$$

***Замечание* 1.** Линейные и колмогоровские поперечники совпадают для многих конкретных функциональных классов [4], что в этих случаях позволяет найти точные значения величины $R_n(W, W^*)$ и получить, например, результаты работ [1–3].

Доказательство неравенства (2) идейно близко к доказательству теоремы 1 из [2] и мы его опускаем. Приведем схему доказательства неравенства (3). Пусть $G_{n-k} = \operatorname{span}\{g_1, \ldots, g_{n-k}\} \subset Z^*$ — экстремальное подпространство для поперечника $\lambda_{n-k}(W(B^*A), Z^*)$. В силу условий теоремы (существует экстремальное подпространство, лежащее в замыкании линейной оболочки множества $W(B^*A)$) можно, не уменьшая общности, считать, что элементы g_i имеют вид $g_i = B^*A y_i$, где $y_i \in Y$. Пусть также для $z^* \in Z^*$

$$L_{n-k}(z^*) = \sum_{i=1}^{n-k} \langle z^*, f_i \rangle g_i = \sum_{i=1}^{n-k} \langle z^*, f_i \rangle B^*A y_i$$

($f_i \in Z^{**}$ фиксированы) — наилучший для множества $W(B^*A)$ линейный метод приближения подпространством G_{n-k} (в предположении, что он существует).

Пусть $\{e_1, \ldots, e_k\}$ и $\{e_1^*, \ldots, e_k^*\}$ — фиксированные базисы в пространствах H и H^* соответственно. Тогда соотношения

$$h = \sum_{j=1}^{k} \langle h, c_j \rangle e_j, \quad h^* = \sum_{j=1}^{k} \langle h^*, c_j^* \rangle e_j^*$$

однозначно определяют функционалы c_j и c_j^*.

Определим информационные операторы $\bar{\mathrm{I}}$ и $\bar{\mathrm{I}}_*$ следующим образом. Через $\bar{\mathrm{I}}_l$, $l = 1, \ldots, n$, обозначим функционалы из X^* такие, что для $x = h + Ay \in W(A, P, H)$

$$\langle x, \bar{\mathrm{I}}_l \rangle = \begin{cases} \langle h, c_l \rangle, & l \leq k; \\ \langle Ay, B^{**} f_{l-k} \rangle, & l > k. \end{cases}$$

Через $\bar{\mathrm{I}}_*^l$, $l = 1, \ldots, n$, обозначим функционалы из $X^{**} (= X)$ такие, что для $x^* = h^* + Bz \in W(B, P^*, H^*)$

$$\langle x^*, \bar{\mathrm{I}}_*^l \rangle = \begin{cases} \langle h^*, c_l^* \rangle, & l \leq k; \\ \langle Ay_{l-k}, Bz \rangle, & l > k. \end{cases}$$

По определению, $\bar{\mathrm{I}} = (\bar{\mathrm{I}}_1, \ldots, \bar{\mathrm{I}}_n)$ и $\bar{\mathrm{I}}_* = (\bar{\mathrm{I}}_*^1, \ldots, \bar{\mathrm{I}}_*^n)$. Положим также для u, $v \in \mathbb{R}^n$

$$\overline{\Phi}(u, v) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} u_i v_i \langle e_i, e_j^* \rangle + \sum_{i=k+1}^{n} u_i v_i.$$

Тогда, как нетрудно проверить,

$$R_n(W, W^*) \leq R(W, W^*; \bar{\mathrm{I}}, \bar{\mathrm{I}}_*; \overline{\Phi}) =$$

$$= \sup_{\|y\|_Y \leq 1} \sup_{\|z\|_Z \leq 1} \left| \langle Ay, Bz \rangle - \sum_{i=1}^{n-k} \langle Ay, B^{**} f_i \rangle \langle Ay_i, Bz \rangle \right| =$$

$$= \sup_{\|y\|_Y \leq 1} \left\| B^* Ay - \sum_{i=1}^{n-k} \langle B^* Ay, f_i \rangle B^* Ay_i \right\|_{Z^*} =$$

$$= \sup_{z^* \in W(B^* A)} \| z^* - L_{n-k}(z^*) \|_{Z^*} = \lambda_{n-k}(W(B^* A), Z^*).$$

Аналогично устанавливается неравенство

$$R_n(W, W^*) \leq \lambda_{n-k}(W(A^* B), Y^*).$$

Соотношение (3) доказано. Последнее утверждение теоремы 1 сразу следует из (2) и (3).

Пусть L_p, $1 \leq p \leq \infty$, — пространства 2π-периодических функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с соответствующими нормами $\|\cdot\|_p$. Для $r \in \mathbb{N}$ обозначим через W_p^r класс функций $f \in L_p$ таких, что $f^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывна и $\|f^{(r)}\|_p \leq 1$. Пусть также $W_{p,0}^r = \left\{ f \in W_p^r\colon f_0 := \int_0^{2\pi} f(t)\, dt = 0 \right\}$.

Для иллюстрации возможностей применения теоремы 1 рассмотрим задачу оптимального восстановления скалярных произведений на классах $W = W_{p_1}^{r_1}$ и $W^* = W_{p_2}^{r_2}$.

Отметим, что классы $W_{p_1}^{r_1}$ и $W_{p_2}^{r_2}$ могут быть определены по приведенной выше общей схеме. Действительно, пусть $X = L_2$, $L_{p,0} = \{ f \in L_p\colon f_0 = 0 \}$, $\|f\|_{L_{p,0}} = \|f\|_p$, $Y = L_{p_1,0}$, $Z = L_{p_2,0}$, $Pf = f - f_0$, $Af = B_{r_1} * f$, $Bf = B_{r_2} * f$, где

$$B_r(t) = \pi^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos(kt - \pi r/2)$$

— ядро Бернулли; H и H^* — подпространства констант. Тогда $W(A, P, H) = W_{p_1}^{r_1}$, $W(B, P^*, H^*) = W_{p_2}^{r_2}$, $W(B^*A) = W_{p_1,0}^{r_1+r_2}$ и $W(A^*B) = W_{p_2,0}^{r_1+r_2}$.

Теперь в силу теоремы 1 при любом $n > 1$ получим

$$\max\{d_{n-1}(W_{p_1,0}^{r_1+r_2}, L_{p_2,0}^*), d_{n-1}(W_{p_2,0}^{r_1+r_2}, L_{p_1,0}^*)\} \le R_n(W_{p_1}^{r_1}, W_{p_2}^{r_2}) \le$$
$$\le \min\{\lambda_{n-1}(W_{p_1,0}^{r_1+r_2}, L_{p_2,0}^*), \lambda_{n-1}(W_{p_2,0}^{r_1+r_2}, L_{p_1,0}^*)\}. \quad (5)$$

В случае, когда $p_2 < \infty$, нетрудно установить, что

$$d_{n-1}(W_{p_1,0}^{r_1+r_2}, L_{p_2,0}^*) = d_n(W_{p_1}^{r_1+r_2}, L_{p_2'}) \quad (6)$$

и

$$\lambda_{n-1}(W_{p_1,0}^{r_1+r_2}, L_{p_2,0}^*) = \lambda_n(W_{p_1}^{r_1+r_2}, L_{p_2'}), \quad (7)$$

где $p' = p/(p-1)$. Если $p_1 = \infty$, а $p_2 = p \in [1, \infty]$ — произвольно, то (см., например, [4], теорема 8.1.11)

$$d_{2n}(W_{p_1}^{r_1+r_2}, L_p) = \lambda_{2n}(W_{p_1}^{r_1+r_2}, L_p) = \|\varphi_{n,r}\|_{p'}, \quad (8)$$

где $\varphi_{n,r}$ — r-й периодический интеграл с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_{n,0}(t) = \operatorname{sign}\sin nt$.

Сопоставляя соотношения (5)–(8), устанавливаем, что в дополнение к утверждению следствия из теоремы 2 работы [2] справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$, $p_1 = \infty$ *и* $p_2 = p \in [1, \infty)$, *или* $p_1 = p \in [1, \infty)$, *а* $p_2 = \infty$ *и* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$R_{2n}(W_{p_1}^{r_1}, W_{p_2}^{r_2}) = \|\varphi_{n,r}\|_{p'}.$$

Теперь положим $\overline{W}_p^r = \{ f = a + B_r * \varphi : a \in \mathbb{R}, \|\varphi\|_p \le 1 \}$ и рассмотрим задачу оптимального восстановления скалярного произведения функций из классов $W = \overline{W}_{p_1}^{r_1}$, $W^* = \overline{W}_{p_2}^{r_2}$.

Используя теорему 1, для любого $n \in \mathbb{N}$ получаем

$$d_n(\overline{W}_{p_2}^{r_1+r_2}, L_{p_1'}) \le R_n(\overline{W}_{p_1}^{r_1}, \overline{W}_{p_2}^{r_2}) \le \lambda_n(\overline{W}_{p_2}^{r_1+r_2}, L_{p_1'}). \quad (9)$$

Как известно (см., например, [5, с. 243], теорема 5), при любом $r \in \mathbb{N}$

$$d_{2n-1}(\overline{W}_1^r, L_2) = \left(\sum_{k=n}^{\infty} k^{-2r} \right)^{1/2}, \quad n = 1, 2, \ldots. \quad (10)$$

Сопоставляя (9), (10), видим, что справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *При всех* $r_1, r_2, n \in \mathbb{N}$

$$R_{2n-1}(\overline{W}_1^{r_1}, \overline{W}_2^{r_2}) = \left(\sum_{k=n}^{\infty} k^{-2(r_1+r_2)} \right)^{1/2}.$$

1. *Бабенко В. Ф.* О наилучшем использовании линейных функционалов для аппроксимации билинейных // Исслед. по соврем. пробл. суммирования и приближения функций и их прил. – Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1979. – С. 3–5.
2. *Бабенко В. Ф.* О приближенном вычислении скалярных произведений // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 1. – С. 15–21.
3. *Бабенко В. Ф., Руденко А. А.* Об оптимальном восстановлении сверток и скалярных произведений функций из различных классов // Там же. – 1991. – **43**, № 10. – С. 1305–1310.
4. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
5. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.

Получено 27.08.95