УДК 517.9

А. А. Бойчук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Boundary-value problems for systems of difference equations with a discrete argument, whose linear part is the Fredholm operator, are considered. The necessary and sufficient conditions of the solvability of difference boundary-value problems of this sort are obtained.

Розглянуто крайової задачі для систем різницевих рівнянь з дискретним аргументом, лінійна частина яких є нетеровим оператором. Одержано необхідні та достатні умови розв'язності таких різницевих крайових задач.

Большое количество задач науки и техники [1 – 5] приводит к необходимости исследования краевых задач для систем разностных уравнений с дискретным аргументом. Как правило, такие задачи исследовались в предположении, что оператор их линейной части является фредгольмовым, более того, имеет обратный (как, например, периодические задачи в некритическом случае [3, 6]). Мы исследуем случай, когда оператор линейной части рассматриваемых разностных краевых задач является нетеровым [7]. Этот случай характеризуется тем, что число m краевых условий не совпадает с размерностью n разностной системы и включает в себя как недоопределенные, так и переопределенные некритические и критические разностные краевые задачи.

1. Линейные задачи. Рассмотрим линейную неоднородную разностную краевую задачу

$$x(t+1) = A(k)x(k) + f(k+1), \tag{1}$$

$$lx(\cdot) = \alpha. \tag{2}$$

Найдем критерий существования ограниченных решений $x\colon [n_0, N] \to R^n$ разностной системы (1) с краевым условием (2), задаваемым с помощью линейного ограниченного m-мерного векторного функционала $l = \operatorname{col}\,(l_1, \ldots, l_m)\colon \{x\colon [n_0, N] \to R^n\} \to R^m$, который определен на пространстве ограниченных на $[n_0, N]$ вектор-функций; $l_i\colon \{x\colon [n_0, N] \to R^n\} \to R$; $A(k)$ — $(n \times n)$-мерная ограниченная матрица, $f(k)$ — n-мерный ограниченный вектор-столбец, $k \in [n_0, N] \subset Z^+$ — множество натуральных чисел. Решение неоднородной разностной системы (1) удобно записать в виде

$$x(k) = X(k, n_0)c + \sum_{j=n_0+1}^{N} K(k,j)f(j) \qquad \forall\, c \in R^n, \tag{3}$$

где

$$X(k, n_0) = \prod_{j=n_0+1}^{k} A(k+n_0-j), \qquad X(n_0, n_0) = E \quad [3, \text{с. } 23],$$

$$K(k,j) = \begin{cases} X(k, j), & n_0 \le j \le k \le N; \\ 0, & j > k, \end{cases}$$

— матрица Коши задачи Коши системы (1). Если $\det A(k) \ne 0$, то (3) — общее решение системы (1).

Для того чтобы решение $x(k)$ (3) задачи Коши разностной системы (1) было решением краевой задачи (1), (2), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$lX(\cdot, n_0)c + \sum_{j=n_0+1}^{N} lK(\cdot,j)f(j) = \alpha. \tag{4}$$

Обозначим через $Q = lX(\cdot, n_0)$ $(m \times n)$-мерную матрицу, ранг которой равен $n_1 = \operatorname{rank} Q \le \min(n, m)$; P_Q и P_{Q^*} — $(n \times n)$- и $(m \times m)$-мерные матрицы-ортопроекторы, проектирующие пространства R^n и R^m на нуль-пространства $N(Q)$ и $N(Q^*)$ соответственно; $P_{Q_d^*}$ — $(d \times m)$-мерная матрица, составленная из полной системы d линейно независимых строк матрицы P_{Q^*}; P_{Q_r} — $(n \times r)$-мерная матрица, составленная из полной системы r линейно независимых столбцов матрицы P_Q; Q^+ — $(n \times m)$-мерная матрица, псевдообратная к Q. Для того чтобы система (4) была разрешимой относительно $c \in R^n$, необходимо и достаточно, чтобы [7, с. 91]

$$P_{Q_d^*}\left\{\alpha - \sum_{j=n_0+1}^{N} lK(\cdot, j) f(j)\right\} = 0 \quad (d = m - n_1); \tag{5}$$

при этом уравнение (4) имеет решение

$$c = -Q^+\left\{\alpha - \sum_{j=n_0+1}^{N} lK(\cdot, j) f(j)\right\} + P_{Q_r} c_r \quad (r = n - n_1) \quad \forall\, c_r \in R^n. \tag{6}$$

Подставляя (6) в (3), получаем

$$x(k) = x^0(k, c_r) = X(k, n_0) P_{Q_r} c_r + X(k, n_0) Q^+\left\{\alpha - \sum_{j=n_0+1}^{N} lK(\cdot, j) f(j)\right\} +$$

$$+ \sum_{j=n_0+1}^{N} K(k, j) f(j) = X_r(k, n_0) c_r + X(k, n_0) Q^+ \alpha + \sum_{j=n_0+1}^{N} G(k, j) f(j), \tag{7}$$

где $G(k, j) = K(k, j) - X(k, n_0) Q^+ lK(\cdot, j)$ — обобщенная матрица Грина краевой задачи (1), (2) для системы разностных уравнений, $X_r(k, n_0) = X(k, n_0) P_{Q_r}$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\operatorname{rank}[Q = lX(\cdot, n_0)] = n_1 \le \min(n, m)$. *Тогда однородная* $(f(j) = 0,\ \alpha = 0)$ *краевая задача* (1), (2) *имеет* r *и только* r *линейно независимых решений. Неоднородная краевая задача* (1), (2) *разрешима тогда и только тогда, когда неоднородности* $f(j) \in R^n$ *и* $\alpha \in R^m$ *удовлетворяют условию* (5), *и при этом имеет* r*-параметрическое семейство решений* (7).

2. Нелинейные задачи. Найдем условия существования и алгоритм построения решения $x = x(k, \varepsilon)$ слаболинейной краевой задачи вида

$$\begin{gathered} x(k+1) = A(k)x(k) + f(k+1) + \varepsilon Z(x(k), k, \varepsilon), \\ lx(\cdot) = \alpha + \varepsilon J(x(\cdot), \varepsilon). \end{gathered} \tag{8}$$

Решение этой задачи будем искать на пространстве ограниченных по первому и непрерывных по второму аргументам вектор-функций $x\colon x(\cdot, \varepsilon)\colon [n_0, N] \to R^n$, $x(k, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$, обращающихся при $\varepsilon = 0$ в одно из порождающих решений (7) $x(k, 0) = x^0(x, c_r)$ порождающей краевой задачи (1), (2), получающейся из (8) при $\varepsilon = 0$. Нелинейная n-мерная вектор-функция $Z(x, k, \varepsilon)$ имеет ограниченную производную по первому аргументу в окрестности порождающего решения, ограниченная по второму аргументу, непрерывная по третьему в окрестности $\varepsilon = 0$; $J(x(\cdot), \varepsilon)$ — m-мерный векторный функционал, имеющий ограниченную производную Фреше по первому аргументу и как вектор-функция второго аргумента непрерывна по $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

Теорема 2 (необходимое условие). *Пусть краевая задача* (8) *имеет решение*

$$x(k,\varepsilon)\colon x(\cdot,\varepsilon)\colon [n_0,N]\to R^n,\quad x(k,\cdot)\in C[0,\varepsilon_0],$$

обращающееся при $\varepsilon=0$ *в одно из порождающих решений* (7) $x(k,0)=x^0(k,c_r)$ *порождающей для* (8) *краевой задачи* (1), (2) *с константой* $c_r=c_r^*\in R^r$ $(r=n-\operatorname{rank}Q=n-n_1)$. *Тогда векторная константа* c_r^* *удовлетворяет уравнению для порождающих амплитуд разностной краевой задачи* (8):

$$F(c_r) = P_{Q_d^*}\left\{ J\big(x^0(\cdot,c^r),0\big) - \sum_{j=n_0+1}^{N} lK(\cdot,j)Z\big(x^0(j,c^r),j,0\big)\right\} = 0. \tag{9}$$

Доказательство проводится методом от противного с использованием теоремы 1 и аналогично доказательству соответствующих теорем, касающихся краевых задач для систем с непрерывным изменением аргумента [7, с. 183, 262].

Для нахождения достаточного условия выполним в (8) замену переменных $x(k,\varepsilon)=x^0\big(k,c_r^*\big)+y(k,\varepsilon)$, в результате чего получим задачу о нахождении решения $y(k,\varepsilon)\colon y(\cdot,\varepsilon)\colon [n_0,N]\to R^n$, $y(k,\cdot)\in C[0,\varepsilon_0]$, $y(k,0)=0$ краевой задачи

$$\begin{gathered} y(k+1) = A(k)y(k) + \varepsilon Z\big(x^0\big(k,c_r^*\big)+y(k,\varepsilon),k,\varepsilon\big),\\ l\,y(\cdot) = \varepsilon J\big(x^0(\cdot,c_r^*)+y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big). \end{gathered} \tag{10}$$

С учетом условий на нелинейности в окрестности $y=0$, $\varepsilon=0$ справедливы разложения

$$Z\big(x^0(k,c_r^*)+y(k,\varepsilon),k,\varepsilon\big) = Z\big(x^0(k,c_r^*),k,0\big) + A_1(k)y + R(y(k,\varepsilon),k,\varepsilon),$$
$$J\big(x^0(\cdot,c_r^*)+y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big) = J\big(x^0(\cdot,c_r^*),0\big) + l_1y(\cdot) + R_0(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon),$$

где l_1 — линейный ограниченный m-мерный векторный функционал, определенный на пространстве ограниченных на $[n_0,N]$ вектор-функций;

$$R(0,k,0) = 0,\quad \frac{\partial R(0,k,0)}{\partial y} = 0;\quad R_0(0,0) = 0,\quad \frac{\partial R_0(0,0)}{\partial y} = 0.$$

Рассматривая нелинейности в (10) формально как неоднородности и применяя к (10) теорему 1, для нахождения решения краевой задачи (8) получаем следующую операторную систему:

$$\begin{gathered} y(k,\varepsilon) = X_r(k,n_0)c + y^{(1)}(k,\varepsilon),\quad c\in R^r,\\ B_0c = -P_{Q_d^*}\Big\{ l_1y^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+R_0(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -\\ - \sum_{j=n_0+1}^{N} lK(\cdot,j)\big[A_1(j)y^{(1)}(j,\varepsilon)+R(y(j,\varepsilon),j,\varepsilon)\big]\Big\}, \end{gathered} \tag{11}$$

$$y^{(1)}(k,\varepsilon) = \varepsilon X(k,n_0)Q^+\big[J\big(x^0(\cdot,c_r^*),0\big)+l_1\big(X_r(\cdot,n_0)c+y^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\big)+R_0(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\big] +$$
$$+ \sum_{j=n_0+1}^{N} G(k,j)\big[Z\big(x^0(j,c_r^*),j,0\big)+A_1(j)\big(X_r(j,n_0)c+y^{(1)}(j,\varepsilon)\big)+R(y(j,\varepsilon),j,\varepsilon)\big],$$

где

$$B_0 = P_{Q_d^*}\left\{ l_1X_r(\cdot,n_0) + \sum_{j=n_0+1}^{N} lK(\cdot,j)A_1(j)X_r(j,n_0)\right\}$$

— $(d \times r)$-мерная матрица $(r = n - n_1,\ d = m - n_1,\ n_1 = \operatorname{rank} Q)$. Обозначим через P_{B_0} $(r \times r)$-мерную матрицу (ортопроектор), проектирующую R^r на $N(B_0) = \ker B_0$, а через $P_{B_0^*}$ $(d \times d)$-мерную матрицу (ортопроектор): $R^d \to N(B_0^*)$ [7]. Тогда при условии

$$P_{B_0} = 0, \qquad P_{B_0^*} P_{Q_d^*} = 0 \tag{12}$$

второе уравнение операторной системы (11) с помощью псевдообратной к B_0 $(r \times d)$-мерной матрицы B_0^+ однозначно разрешимо относительно $c \in R^r$. В результате для решения операторной системы (11) применим [7, с. 113] сходящийся метод простых итераций. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3 (достаточное условие). *Пусть краевая задача* (8) *удовлетворяет указанным выше условиям, так что соответствующая ей порождающая краевая задача* (1), (2) *при условии* (5) *и только при нем имеет r-параметрическое семейство порождающих решений* $x^0(k, c_r)$ (7). *Тогда для каждого значения векторной константы* $c_r = c_r^* \in R^r$, *удовлетворяющей уравнению* (9) *для порождающих амплитуд, при условии* (12) *краевая задача* (8) *имеет единственное ограниченное на* $[n_0, N]$ *решение* $x(k, \varepsilon)$: $x(k, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$, *обращающееся в порождающее* $x^0(k, c_r^*)$ *при* $\varepsilon = 0$. *Это решение может быть найдено с помощью сходящегося на* $[0, \varepsilon_*] \subseteq [0, \varepsilon_0]$ *итерационного процесса*

$$c_i = -B_0^+ P_{Q_d^*} \Big\{ l_1 y_i^1(\cdot, \varepsilon) + R_0(y_i(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) -$$

$$- \sum_{j = n_0 + 1}^{N} lK(\cdot, j)\big[A_1(j) y_i^{(1)}(j, \varepsilon) + R(y_i(j, \varepsilon), j, \varepsilon) \big] \Big\}, \tag{13}$$

$$y_{i+1}^{(i)}(k, \varepsilon) = \varepsilon X(k, n_0) Q^+ \Big[J\big(x^0(\cdot, c_r^*), 0\big) + l_1\big(X_r(\cdot, n_0) c_i + y_i^{(1)}(\cdot, \varepsilon)\big) + R_0\big(y_i(\cdot, \varepsilon)\big) \Big] +$$

$$+ \sum_{j = n_0 + 1}^{N} G(k, j)\Big[Z\big(x^0(j, c_r^*), j, 0\big) + A_1(j)\big(X_r(j, n_0) c_i + y_i^{(1)}(j, \varepsilon)\big) + R(y_i(j, \varepsilon), j, \varepsilon) \Big],$$

$$y_{i+1}(k, \varepsilon) = X_r(k, n_0) c_i + y_{i+1}^{(1)}(j, \varepsilon), \qquad x_i(k, \varepsilon) = x^0\big(k, c_r^*\big) + y_i(k, \varepsilon);$$

$$y_0 = y_0^{(1)} = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Заметим, что в случае краевых задач фредгольмового типа $(n = m)$ из $P_{B_0} = 0$ следует $P_{B_0^*} = 0$ и, поэтому второе условие в (12) автоматически выполняется. По аналогии с [7, с. 277] можно показать, что в этом случае $(m = n)$ условие $P_{B_0} = 0$ $(\det B_0 \neq 0)$ эквивалентно требованию простоты корней уравнения (9) для порождающих амплитуд.

1. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей: Изд. 3-е, исп. – М.: Наука, 1967. – 376 с.
2. *Мартынюк Д. И.* Лекции по качественной теории разностных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1972. – 248 с.
3. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 309 с.
4. *Самарский А. А., Карамзин Ю. Н.* Разностные уравнения. – М.: Наука, 1978.
5. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1986. – 280 с.
6. *Пелюх Г. П.* О существовании периодических решений дискретных разностных уравнений и их свойствах // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 10. – С. 1382–1387.
7. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обощенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 320 с.

Получено 12.11.96