УДК 517.956.3/517.957

І. Л. Нижник (Ін-т математики НАН України, Київ)

СТІЙКА РІЗНИЦЕВА СХЕМА ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ КЛЕЙНА – ГОРДОНА

For the nonlinear Klein–Gordon equation, we obtain a stable difference scheme for large time intervals. We prove that this scheme is of six order of accuracy.

Для нелінійного рівняння Клейна – Гордона одержано стійку різницеву схему на великих часових проміжках. Доведено, що схема має шостий порядок точності.

У різних розділах математичної фізики часто зустрічається рівняння вигляду

$$u_{xx} - u_{tt} = F(u), \tag{1}$$

де $F(u)$ — деяка нелінійна, достатньо гладка функція від u. Це рівняння називають нелінійним рівнянням Клейна – Гордона. Найбільш важливим є випадок, коли $F(u) = \sin u$. Рівняння (1) в цьому випадку відоме під назвою sin-Гордона і є одним із основних рівнянь в теорії солітонів. Якщо $F(u) = \sin u + \lambda \sin 2u$, то рівняння називається подвійним рівнянням sin-Гордона, а у випадку $F(u) = \exp u$ — рівнянням Ліувілля. Якщо $F(u) = \alpha u - u^3$, то це рівняння відіграє важливу роль в так званій φ^4 моделі. Розглядаються також інші випадки [1].

Для розв'язання деякого класу нелінійних рівнянь Клейна – Гордона досить добре розвинений аналітичний апарат, наприклад, метод оберненої задачі розсіяння. Але існує досить багато цікавих рівнянь (подвійне рівняння sin-Гордона, φ^4 та ін.), для яких ці методи не можна застосувати. В цих випадках використовують інший підхід — чисельне інтегрування [2]. Найбільш ефективною для розв'язання рівняння (1) є різницева схема з однаковим кроком h по x і по t з чотирьохточковим шаблоном [3]:

$$u_m^{n+1} = -u_m^{n-1} + u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - h^2 F\left(\frac{1}{2}\left(u_{m-1}^n + u_{m+1}^n\right)\right), \tag{2}$$

де $u_m^n = u(hm, hn)$ — значення функції в точці сітки з номером (m, n). Дана схема є стійкою для відрізку часу T, порівнянному з величиною h^{-1}. Але розрахунки по цій схемі на більш довгих інтервалах часу призводять до втрати стійкості.

Для того щоб схема була стійкою на більших проміжках часу, можна збільшити порядок точності схеми, використовуючи на кожному етапі обчислення не тільки значення функції в основних вузлах шаблона, але і вже знайдені значення в інших вузлах.

Теорема. *Для рівняння* (1) *різницева схема вигляду*

$$u_m^{n+1} = -u_m^{n-1} + u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - h^2\left(F(z_m^n) + w_m^n\right), \tag{3}$$

$$z_m^n = \frac{u_{m-1}^n + u_{m+1}^n}{2} - \frac{h^2}{12} F\left(\frac{u_{m-1}^n + u_{m+1}^n}{2}\right) + \frac{1}{24}\left(u_{m-1}^n + u_{m+1}^n - u_{m-3}^n - u_{m+3}^n\right),$$

$$w_m^n = \frac{1}{48}\left[\left(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n\right)^2 + \left(u_{m-1}^n + u_{m+1}^n - 2u_m^{n-1} - h^2 F\left(\frac{u_{m-1}^n + u_{m+1}^n}{2}\right)\right)^2\right] \times$$

$$\times\ F^n\left(\frac{u_{m-1}^n + u_{m+1}^n}{2}\right)$$

має похибку $O(h^6)$.

© І. Л. НИЖНИК, 1997

Доведення. Проінтегруємо рівняння (1) по квадрату R_m^n з вершинами в точках сітки, що мають номери $(m, n-1), (m-1, n), (m, n+1), (m+1, n)$. Після простих обчислень з використанням формули Гаусса – Остроградського інтегрування рівняння (1) приводить до точного виразу

$$u_m^{n+1} = -u_m^{n-1} + u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - h^2 J_m^n, \tag{4}$$

де J_m^n — середнє значення $F(u(x, t))$ по квадрату R_m^n,

$$J_m^n = \frac{1}{2h^2} \int\limits_{R_m^n}\int F(u(x, t))\, dx dt. \tag{5}$$

Якщо функцію F у виразі (5) розкласти в ряд Тейлора в околі центра квадрата R_m^n з залишковим членом $O(h^2)$, провести інтегрування розкладу, враховуючи, що

$$u_m^n = \frac{1}{2}\left(u_{m-1}^n + u_{m+1}^n\right) + O(h^2),$$

то одержимо

$$J_m^n = F\left(\frac{1}{2}(u_{m-1}^n + u_{m+1}^n)\right) + O(h^2). \tag{6}$$

Підставляючи вираз (6) у формулу (4), отримуємо схему (2), яка має точність $O(h^4)$.

Якщо у виразі (5) для J_m^n функцію F розкласти в ряд Тейлора в околі центра квадрата R_m^n до третього степеня включно, враховуючи, що $u(x, t)$ — розв'язок рівняння (1), будемо мати

$$\begin{aligned} J_m^n &= F(u) + F'\left[\frac{h^2}{6}\left(u_{xx} - \frac{F}{2}\right)\right] + \frac{h^2}{12}F''(u)(u_x^2 + u_t^2) + O(h^4) = \\ &= F\left(u + \frac{h^2}{6}u_{xx} - \frac{h^2}{12}F(u)\right) + \frac{h^2}{12}F''(u)(u_x^2 + u_t^2) + O(h^4), \end{aligned} \tag{7}$$

де u, u_x, u_t, u_{xx} — відповідні значення функції та її похідних, аргументами яких є координати центра квадрата R_m^n. Використовуючи розклад Тейлора, отримуємо

$$u + \frac{h^2}{6}u_{xx} = \frac{1}{2}(u_{m-1}^n + u_{m+1}^n) + \frac{u_{m-1}^n + u_{m+1}^n - u_{m-3}^n - u_{m+3}^n}{24} + O(h^4), \tag{8}$$

$$u_x = \frac{1}{2h}(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) + O(h^2), \tag{9}$$

$$u_t = \frac{1}{2h}(u_m^{n+1} - u_m^{n-1}) + O(h^2). \tag{10}$$

Використовуючи схему (2), похибка якої $O(h^4)$, із (10) маємо

$$u_t = \frac{1}{2h}\left(u_{m-1}^n + u_{m+1}^n - 2u_m^{n-1} - h^2 F\left(\frac{1}{2}(u_{m-1}^n + u_{m+1}^n)\right)\right) + O(h^2); \tag{11}$$

підставляючи (8), (9), (11) в (7), отримуємо (3). Теорема доведена.

***Зауваження* 1.** Чисельний алгоритм теореми можна дещо спростити, якщо взяти

$$z_m^n = \frac{1}{2}\left(u_{m-1}^n + u_{m+1}^n\right) - \frac{h^2}{12}F\left(u_m^{n-1}\right) - \frac{1}{12}\left[u_{m-2}^{n-1} - 2u_m^{n-1} + u_{m+2}^{n-1}\right],$$

$$w_m^n = \frac{1}{24}\left(\left(u_{m-1}^n - u_m^{n-1}\right)^2 + \left(u_{m+1}^n - u_m^{n-1}\right)^2\right)F''\left(u_m^{n-1}\right),$$

тоді відповідна різницева схема матиме точність $O(h^5)$.

***Зауваження* 2.** Різницева схема вигляду (3) є стійкою для інтервалу часу $T = h^{-2}$.

1. *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. – М.: Мир, 1988. – 694 с.
2. *Самарский А. А.* Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971. – 552 с.
3. *Ablowits M. J., Kruskal M. D., Ladic J. F.* Solitary wave collisions // SIAM J. App. Math. – 1979. – **53.** – P. 428–437.

Одержано 02.09.96