УДК 512. 64

В. М. Петричкович (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

КРИТЕРІЙ ДІАГОНАЛІЗОВНОСТІ ПАРИ МАТРИЦЬ НАД КІЛЬЦЕМ ГОЛОВНИХ ІДЕАЛІВ СПІЛЬНИМИ РЯДКОВИМИ І РІЗНИМИ СТОВПЦЕВИМИ ПЕРЕТВОРЕННЯМИ

We establish that a pair A, B of nonsingular matrices over a commutative domain R of principal ideals can be reduced to their canonical diagonal forms D^A and D^B by using the common transformation of rows and separate transformations of columns. This means that there exist invertible matrices U, V_A, and V_B over R such that $UAV_A = D^A$ and $UAV_B = D^B$ if and only if the matrices B_*A and $D_*^B D^A$ are equivalent, where B_* is a adjoint matrix for the matrix B.

Встановлено, що пара A, B неособливих матриць над комутативною областю головних ідеалів R спільними рядковими і різними стовпцевими перетвореннями зводиться до їхніх канонічних діагональних форм D^A і D^B, тобто існують оборотні матриці U, V_A, V_B над R такі, що $UAV_A = D^A$, $UAV_B = D^B$ тоді і тільки тоді, коли матриці B_*A і $D_*^B D^A$ еквівалентні, де B_* — взаємна матриця для матриці B.

Нехай R — комутативна область головних ідеалів, R_n — кільце матриць розміру $n \times n$ над R. Через D^A позначимо канонічну діагональну форму матриці $A \in R_n$, тобто $D^A = UAV = \operatorname{diag}(\mu_1^A, \ldots, \mu_n^A)$, $\mu_i^A \mid \mu_{i+1}^A$, $i = 1, \ldots, n-1$, для деяких оборотних матриць $U, V \in R_n$.

У роботах [1, 2] встановлено, що скінченний набір матриць над кільцем $P[x]$ (P — поле) спільними рядковими і різними стовпцевими перетвореннями зводиться до нижніх трикутних форм з інваріантними множниками на головних діагоналях, які знаходять застосування в задачах факторизації матриць [3, 2], при вивченні мультиплікативних властивостей канонічних діагональних форм матриць [4]. У роботі [5] цей результат поширений для пар матриць над загальнішими областями. У даній статті вказані необхідні та достатні умови, за яких пара неособливих матриць $A, B \in R_n$ зводиться такими перетвореннями до канонічних діагональних форм D^A і D^B, а також умови, за яких із подільності канонічних діагональних форм D^A і D^B випливає подільність матриць A і B.

Теорема 1. *Для неособливих матриць $A, B \in R_n$ існують оборотні матриці U, V_A, $V_B \in R_n$ такі, що $UAV_A = D^A$, $UBV_B = D^B$ тоді і тільки тоді, коли матриці B_*A і $D_*^B D^A$ еквівалентні, де B_* — взаємна матриця для матриці B.*

Доведення. Необхідність. Нехай $UAV_A = D^A$ і $UBV_B = D^B$ для деяких оборотних матриць U, V_A, $V_B \in R_n$. Оскільки $BB_* = (\det B)I$, де I — одинична матриця, то можемо записати

$$(\det B)A = BB_*A. \tag{1}$$

Тоді $(\det B)UAV_A = UBV_B V_B^{-1} B_* A V_A$ або $(\det B)D^A = D^B\Phi$, де $\Phi = V_B^{-1}B_*AV_A$. З іншого боку, $\Phi = D_*^B D^A$. Отже, матриці B_*A і $D_*^B D^A$ еквівалентні.

Достатність. Нехай матриці B_*A і $D_*^B D^A$ еквівалентні. На основі [1 – 3] для матриць A, B існують оборотні матриці $Q, S_A, S_B \in R_n$ такі, що

$$T^A = QAS_A = \left\| \begin{matrix} \mu_1^A & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21}\mu_1^A & \mu_2^A & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}\mu_1^A & a_{n2}\mu_2^A & \ldots & \mu_n^A \end{matrix} \right\| \tag{2}$$

і $QBS_B = D^B$. Тому із (1) дістанемо $(\det B)QAS_A = QBS_BS_B^{-1}B_*AS_A$, тобто $(\det B)T^A = D^BC$, або

$$(\det B)W_1D^A = D^BC, \tag{3}$$

де $C = S_B^{-1}B_*AS_A$ — нижня трикутна і W_1 — нижня унітрикутна матриці.

Оскільки трикутна матриця C з головною діагоналлю $\Phi = D_*^BD^A$ еквівалентна до діагональної матриці Φ, то, як випливає із [6], для матриці C існують нижні унітрикутні матриці F і H такі, що $FCH = \Phi$. Тоді із (3) для деяких унітрикутних матриць H_1 і F_1 матимемо $(\det B)W_1D^AH = D^BF^{-1}FCH$, або $(\det B)W_1H_1D^A = F_1D^B\Phi$. З цієї рівності випливає $W_1H_1 = F_1 = W$. Отже, $U == W^{-1}Q$, $V_A = S_AH$, $V_B = S_BF^{-1}$. Теорему доведено.

Наслідок. *Нехай $A, B \in R_n$ і $(\det A, \det B) = 1$. Тоді існують оборотні матриці $U, V_A, V_B \in R_n$ такі, що $UAV_A = D^A$ і $UBV_B = D^B$.*

Як відомо [7, 8], якщо $B\,|\,A$, $A, B \in R_n$, то $D^B\,|\,D^A$. Виникає запитання: за яких умов із того, що $D^B\,|\,D^A$ випливає, що $B\,|\,A$?

Зрозуміло, що коли $UAV_A = D^A$ і $UBV_B = D^B$ для деяких оборотних матриць $U, V_A, V_B \in R_n$, то матриця B є лівим дільником матриці A, як тільки $D^B\,|\,D^A$.

Теорема 2. *Нехай A, B — неособливі матриці із R_n і $D^B\,|\,D^A$, тобто*

$$D^A = \operatorname{diag}\left(\mu_1^B, \dots, \mu_n^B\right)\operatorname{diag}(\psi_1, \dots, \psi_n).$$

Якщо

$$\left(\frac{\mu_i^B}{\mu_j^B}, (\psi_i, \psi_j)\right) = 1, \qquad i, j = 1, \dots, n, \ i > j,$$

то матриця B є лівим дільником матриці A тоді і тільки тоді, коли матриці $B^{-1}A$ і $(D^B)^{-1}D^A$ еквівалентні, тобто $UAV_A = D^A$ і $UBV_B = D^B$ для деяких оборотних матриць $U, V_A, V_B \in R_n$.

Доведення. *Достатність* умов теореми очевидна.

Необхідність. Нехай $A = BC$. Тоді, як і при доведенні теореми 1, з цієї рівності дістанемо

$$D^A = T^BC_1, \tag{4}$$

де T^B — трикутна матриця вигляду (2), $C_1 = \left\| c_{ij} \right\|_1^n$ — нижня трикутна матриця, причому $c_{ii} = \psi_i$, $i = 1, \dots, n$.

Покажемо, що матриця C_1 еквівалентна матриці $\Phi = \operatorname{diag}(\psi_1, \dots, \psi_n)$. Із [9, 6] випливає, що C_1 еквівалентна Φ тоді і тільки тоді, коли система рівнянь

$$c_{ii}x_{ij} - \sum_{k=j}^{i-1} c_{kj}y_{ik} = c_{ij}, \qquad i, j = 1, \dots, n, \ i > j, \tag{5}$$

має розв'язки. Із (4) одержимо рівності

$$\sum_{k=j}^{i} b_{ik}c_{kj}\mu_k^B = 0, \qquad i, j = 1, \dots, n, \ i > j,$$

або

$$\sum_{k=j}^{i} b_{ik} c_{kj} \frac{\mu_k^B}{\mu_j^B} = 0, \qquad i, j = 1, \ldots, n, \; i > j,$$

де $b_{ii} = 1$, $c_{jj} = \psi_j$. Звідси, за умов теореми маємо, що c_{ij} ділитьсяна (ψ_j, ψ_k), $i, j = 1, \ldots, n$, $i > j$, для всіх $k = i + 1, \ldots, n$. Тому система рівнянь (5) має розв'язки. Отже, матриця C_1 еквівалентна Φ, а значить, і $C = B^{-1} A$ еквівалентна $\Phi = (D^B)^{-1} D^A$. Теорему доведено.

1. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теорет. та прикл. питання алгебри і диференц. рівнянь. – Київ: Наук. думка, 1977. – С. 61–66.
2. *Петричкович В. М.* Полускалярная эквивалентность и факторизация многочленных матриц // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, №5. – С. 644–649.
3. *Казимирский П. С.* Решение проблемы выделения регулярного множителя из матричного многочлена // Там же. – 1980. – **32**, №4. – С. 483–493.
4. *Петричкович В. М.* О полускалярной эквивалентности и нормальной форме Смита многочленных матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1987. – Вып. 26. – С. 13–16.
5. *Забавский Б. В., Казимирский П. С.* Приведение пары матриц над адекватным кольцом к специальному треугольному виду применением идентичных односторонних преобразований // Укр. мат. журн. – 1984. – **36**, №2. – С. 256–258.
6. *Feinberg R. B.* Equivalence of partitioned matrices // J. Res. Nat. Bur. Stand. A. – 1976. – **80**, № 1. – P. 89–97.
7. *Ingraham M. N.* Rational methods in matrix equations // Bull. Amer. Math. Soc. – 1941. – **47**. – P. 61–70.
8. *Newman M.* On the Smith normal form // J. Res. Nat. Bur. Stand. A. – 1971. – **75**. – P. 81–84.
9. *Roth W. E.* The equations $AX - YB = C$ and $AX - XB = C$ in matrices // Proc. Amer. Math. Soc. – 1952. – №3. – P. 392–396.

Одержано 22.01.96