УДК 517.9

В. Е. Слюсарчук (Укр. акад. вод. хозяйства, Ривнэ)

НЕЛИНЕЙНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ С АСИМПТОТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВЫМИ РЕШЕНИЯМИ

We establish conditions of asymptotic stability for all solutions of equation $X_{n+1} = F(X_n),\ n \geq 0$, in the Banach space E in the case $r(F'(x)) < 1 \ \ \forall x \in E$, where $r'(x)$ is the spectral radiusof $F'(x)$. An example of an equation with unstable solution is given.

Встановлено умови асимптотичної стійкості всіх розв'язків рівняння $X_{n+1} = F(X_n),\ n \geq 0$, в банаховому просторі E у випадку $r(F'(x)) < 1 \ \ \forall x \in E$, $r'(x)$ — спектральний радіус $F'(x)$. Наведено приклад рівняння з нестійким розв'язком.

В настоящее время устойчивость решений разностных уравнений достаточно хорошо изучена (см., например, [1–10]).

Известно, что нулевое решение, а следовательно, и каждое решение разностного уравнения

$$x_{n+1} = A x_n, \qquad n \geq 0,$$

где A — линейный непрерывный оператор, действующий в банаховом пространстве E, асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда спектральный радиус $r(A)$ оператора A меньше 1.

В случае нелинейного разностного уравнения

$$x_{n+1} = F(x_n), \qquad n \geq 0, \tag{1}$$

с C^1-отображением $F: E \to E$ все решения уравнения (1) могут не быть асимптотически устойчивыми, если

$$\sup_{x \in E} r(F'(x)) < 1, \tag{2}$$

где $F'(x)$ — производная Фреше отображения $F(x)$ в точке x, даже когда пространство E конечномерно и $\dim E \neq 1$ (соответствующий пример приводится в данной работе).

Поэтому интересным является нахождение дополнительных ограничений на $F'(x)$, которые вместе с условием (2) или условием

$$r(F'(x)) < 1 \quad \text{для всех} \quad E \tag{3}$$

обеспечивали бы асимптотическую устойчивость всех решений уравнения (1).

В настоящей статье показано, что такими дополнительными ограничениями на $F'(x)$ являются условия малого приращения $F'(x)$ на прямолинейных отрезках

$$[x, F(x)] = \{tx + (1-t)F(x):\ 0 \leq t \leq 1\}, \qquad x \in E.$$

1. Пример уравнения (1), для которого выполняется соотношение (2) и не все решения асимптотически устойчивы. Рассмотрим две нильпотентные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко проверяется, что

$$\max_{0 \leq \alpha \leq 1} \{|\lambda|:\ \det(\lambda I - (\alpha A - (1-\alpha)B)) = 0\} = \frac{1}{2}, \tag{4}$$

где I — единичная матрица.

Пусть $\mu \in (1, 2)$ и $m \in \mathbb{N}$. Определим отображение $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ равенством $F(x) = C(x)x$, где

$$C(x) = \begin{cases} \mu^{1/2}\left[\left(\sin^2 \dfrac{\pi \ln\|x\|}{\ln\mu}\right)A + \left(\cos^2 \dfrac{\pi\ln\|x\|}{\ln\mu}\right)B\right], & \text{если } \|x\| \ge \mu^m; \\ \mu^{1/2}\left(\sin^2 \dfrac{\pi\|x\|}{2\mu^m}\right)B, & \text{если } \|x\| < \mu^m, \end{cases}$$

— матрица, элементы которой зависят от

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \|x\| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}.$$

Это отображение является C^1-отображением, что вытекает из определения $F(x)$.

Из (4) следует, что для каждого $m \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} r(C(x)) = \frac{\mu^{1/2}}{2} < 1.$$

Пусть $\gamma \in (\mu^{1/2}/2, 1)$. Поскольку множество $\{C(x)\colon x \in \mathbb{R}^2\}$ компактно, то найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что если для матрицы M и некоторого $x \in \mathbb{R}^2$ $\|M - C(x)\| \le \varepsilon$, то $r(M) \le \gamma$ [4].

Из определения $F(x)$ следует

$$\lim_{m \to \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^2} \|C(x) - F'(x)\| = 0.$$

Поэтому

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} r(F'(x)) \le \gamma$$

для достаточно большого m.

Рассмотрим уравнение (1) с построенным $F(x)$ при достаточно большом m. Оно имеет решение

$$y_n = \begin{cases} \mu^{m+n/2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{esly } n = 0, 2, 4, 6, \dots; \\ \mu^{m+n/2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \text{esly } n = 1, 3, 5, 7, \dots, \end{cases}$$

для которого

$$\lim_{n \to \infty} \|y_n\| = \infty.$$

Поскольку $F'(x) = 0$, то нулевое решение рассматриваемого уравнения асимптотически устойчиво (см., например, [5]). Поэтому не все решения рассматриваемого уравнения асимптотически устойчивы.

2. Условия асимптотической устойчивости всех решений уравнения (1) в случае выполнения соотношения (2). Приведем сначала утверждения, позволяющие получить условия асимптотической устойчивости решений уравнения (1).

Как и выше, E обозначает произвольное банахово пространство.

Лемма 1. *Пусть:*

1) $\mathcal{K}$ *— непустое компактное множество линейных непрерывных операторов* $A: E \to E$;

2) $r(A) < 1$ *для всех* $A \in \mathcal{K}$.

Тогда

$$\sup_{A \in \mathcal{K}} r(A) = q_0 < 1$$

и для произвольных $q \in (q_0, 1)$ *и* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\sup_{A \in \mathcal{K}} \|A^n\| \le M q^{n+1},$$

где

$$M = \sup_{(\lambda, A) \in \{\lambda \in \mathbb{C}:\ |\lambda| = q\} \times \mathcal{K}} \|(\lambda I - A)^{-1}\| < \infty.$$

Доказательство. Из верхней полунепрерывности спектрального радиуса $r(A)$ [11, 12] следует, что на компактном множестве $\mathcal{K}$ функция $r(A)$ в некоторой точке $A_0 \in \mathcal{K}$ принимает наибольшее значение q_0 [13, 14], которое в силу второго условия леммы меньше 1. Возьмем произвольное число $q \in (q_0, 1)$ и рассмотрим окружность $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = q\}$. Пусть $\rho(A)$ — область регулярности оператора $A \in \mathcal{K}$, т. е. множество $\mathbb{C} \setminus \sigma(A)$, где $\sigma(A)$ — спектр оператора A. Поскольку $\Gamma \subset \bigcap_{A \in \mathcal{K}} \rho(A)$, то резольвента $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$, где I — единичный оператор, как функция переменных λ и A непрерывна на компактном множестве $\Gamma \times \mathcal{K}$ и поэтому ограничена на $\Gamma \times \mathcal{K}$ [14]. Пусть

$$M = \max_{(\lambda, A) \in \Gamma \times \mathcal{K}} \|R(\lambda, A)\|.$$

Известно [11], что для каждого $A \in \mathcal{K}$

$$A^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^n R(\lambda, A)\, d\lambda, \qquad n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$$

(здесь Γ — рассмотренная выше окружность с положительной ориентацией). Отсюда получаем

$$\sup_{A \in \mathcal{K}} \|A^n\| \le \frac{1}{2\pi} \sup_{A \in \mathcal{K}} \left\| \int_{\Gamma} \lambda^n R(\lambda, A)\, d\lambda \right\| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi} \sup_{A \in \mathcal{K}} \int_{\Gamma} |\lambda^n| \, \|R(\lambda, A)\| \, |d\lambda| =$$

$$= \frac{q^{n+1}}{2\pi} \sup_{A \in \mathcal{K}} \int_0^{2\pi} |R(q e^{i\varphi}, A)\| \, d\varphi \le M q^{n+1}$$

для всех $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть:*

1) Ω *— замкнутое выпуклое подмножество банахова пространства* E, *содержащее точку* 0, *и* $G: \Omega \to \Omega$ *—* C^1*-отображение;*

2) $G(0) = 0$;

3) *найдутся числа* $M \geq 1$ *и* $q \in (0, 1)$ *такие, что*

$$\| (G'(x))^n \| \leq M q^n$$

для всех $n \in \{0\} \bigcup \mathbb{N}$ *и* $x \in \Omega$;

4) ε^* — *наибольшее решение неравенства*

$$\left(\prod_{k=0}^{m-1} (a + k\varepsilon) \right) - a^m \leq q - Mq^m, \tag{5}$$

где

$$a = \sup_{x \in \Omega} \| (G'(x)) \| \geq 1$$

и $m = [2 - \ln M / \ln q]$ — *целая часть числа* $2 - \ln M / \ln q$.

5) $\| G'(G(x)) - G'(x) \| \leq \varepsilon^*$ *для всех* $x \in \Omega$.

Тогда

$$\| \underbrace{G(G(G(\ldots(G}_{m \text{ раз}}(x))\ldots))) \| \leq q \| x \|$$

для всех $x \in \Omega$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что согласно третьему и четвертому условиям леммы $Mq^m < q$ и поэтому $\varepsilon^* > 0$.

Рассмотрим отображение $H \colon \Omega \to \Omega$, определенное равенством

$$H(x) = \underbrace{G(G(G(\ldots(G}_{m \text{ раз}}(x))\ldots))).$$

Это отображение согласно первым двум условиям леммы является C^1-отображением и $H(0) = 0$. Применяя к $H(x)$ формулу конечных приращений [15, с. 639], получаем

$$\| H(x) \| \leq \sup_{\theta \in [0, x]} \| H'(\theta) \| \, \| x \| \tag{6}$$

для всех $x \in \Omega$. Покажем, что

$$\sup_{\theta \in [0, x]} \| H'(\theta) \| \leq q. \tag{7}$$

Пусть

$$\theta_1 = \theta, \quad \theta_2 = G(\theta_1), \quad \theta_3 = G(\theta_2), \ \ldots, \quad \theta_m = G(\theta_{m-1}).$$

На основании цепного правила дифференциального исчисления [16, с. 258]

$$H'(\theta) = G'(\theta_m) G'(\theta_{m-1}) \ldots G'(\theta_2) G'(\theta_1).$$

Каждый множитель $G'(\theta_k)$, $k = \overline{2, m}$, можно представить в виде $G'(\theta_1) + P_k$, где $P_k \colon E \to E$ — линейный непрерывный оператор, для которого

$$\| P_k \| \leq k \varepsilon^*. \tag{8}$$

Действительно,

$$G'(\theta_k) = G'(\theta_1) + \sum_{l=1}^{k-1} (G'(\theta_{l+1}) - G'(\theta_l)) =$$

$$= G'(\theta_1) + \sum_{l=1}^{k-1} (G'(G(\theta_l)) - G'(\theta_l)),$$

и для

$$P_k = \sum_{l=1}^{k-1} (G'(G(\theta_l)) - G'(\theta_l))$$

имеет место оценка (8) ввиду пятого условия леммы. Тогда

$$H'(\theta) = (G'(\theta)+P_m)(G'(\theta)+P_{m-1})\ldots(G'(\theta)+P_2)\,G'(\theta) = (G'(\theta))^m + Q_m,$$

где

$$Q_m = (G'(\theta)+P_m)(G'(\theta)+P_{m-1})\ldots$$
$$\ldots(G'(\theta)+P_2)\,G'(\theta) - (G'(\theta))^m,$$

и следовательно,

$$\|H'(\theta)\| \le \|(G'(\theta))^m\| + \|Q_m\| \le$$
$$\le Mq^m + a(a+\varepsilon^*)(a+2\varepsilon^*)\ldots(a+(m-1)\varepsilon^*) - a^m \le q,$$

если учесть третье и четвертое условия леммы.

Итак, соотношение (7) имеет место. Отсюда с учетом (6) мы получаем утверждение леммы. Лемма 2 доказана.

Замечания. **1.** Согласно лемме 1 третье условие леммы 2 выполняется, если, например, $r(G'(x)) < 1$ для всех $x \in \Omega$ и множество $\{G'(x) : x \in \Omega\}$ компактно.

2. Пусть $\varphi(x, y) = \min\{\|z\| : z \in [x, y]\}$, $x, y \in \Omega$. Пятое условие леммы 2 выполняется, если для некоторых чисел $\delta > 0$ и $\gamma > 0$

$$\varphi(x, G(x)) \ge \gamma\|x\|$$

и

$$\|G'(x) - G'(y)\| \le \frac{\delta\|x-y\|}{1+\varphi(x, y)}$$

для всех $x, y \in \Omega$ и число γ/δ достаточно мало.

Теперь приведем условия асимптотической устойчивости решений уравнения (1).

Теорема 1. *Пусть*:

1) $F: E \to E$ — C^1-*отображение*;

2) $F(0) = 0$;

3) *найдутся числа* $M \ge 1$ *и* $q \in (0, 1)$ *такие, что* $\|(F'(x))^n\| \le M q^n$ *для всех* $x \in E$ *и* $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$;

4) ε^* — *наибольшее решение неравенства* (5), *в котором*

$$a = \sup_{x \in E} \|F'(x)\| \ge 1 \quad \text{и} \quad m = [2 - \ln M / \ln q];$$

5) $\|F'(F(x)) - F'(x)\| \le \varepsilon^*$ *для всех* $x \in E$.

Тогда все решения разностного уравнения (1) *асимптотически устойчивы.*

Доказательство. Пусть x_n — произвольное решение уравнения (1). Рассмотрим отображение $H: E \to E$, определенное равенством $H(x) = F(F(F(\ldots(F(x))\ldots)))$, и разностное уравнение

$$y_{p+1} = H(y_p), \quad p \in \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

Очевидно, что $y_p \overset{\text{def}}{=} x_{pm}$, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, — решение этого уравнения. Поскольку согласно лемме 2 $\| H(x) \| \leq q \| x \|$ для всех $x \in E$, то

$$\| x_{pm} \| \leq q^p \| x_0 \| \quad \text{для всех} \quad p \in \mathbb{N}$$

и, следовательно,

$$\lim_{p \to \infty} \| x_{pm} \| = 0,$$

так как $q \in (0, 1)$. Отсюда, из асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (1) (на основании теоремы об асимптотической устойчивости решений уравнения (1) по линейному приближению [5] и того, что $r(F'(0)) < 1$), непрерывности и ограниченности отображения F следует асимптотическая устойчивость всех решений уравнения (1). Теорема 1 доказана.

***Замечание* 3.** Если величина

$$\sup_{x \in E} \| F'(F(x)) - F'(x) \|$$

не будет достаточно малой, то утверждение теоремы 1 может быть неверным, что подтверждается примером, рассмотренным в п. 1.

***Следствие* 1.** *Пусть:*

1) $F: E \to E$ — C^1-*отображение;*

2) $F(0) = 0$;

3) *множество* $\{F'(x) \colon x \in E\}$ *компактно;*

4) $r(F'(x)) < 1$ *для всех* $x \in E$.

Тогда для достаточно малой величины

$$\sup_{x \in E} \| F'(F(x)) - F'(x) \|$$

все решения уравнения (1) *асимптотически устойчивы.*

Это утверждение вытекает из леммы 1 и теоремы 1.

3. Оценки для наибольшего решения ε^* неравенства (5). Проверка условий теоремы 1 связана с нахождением наибольшего решения ε^* неравенства (5). Поскольку эту задачу решить трудно, то ограничимся указанием оценок для этого решения.

Лемма 3. *Пусть*

$$\varepsilon_1 = \frac{2a}{m(m-1)} \ln\left(1 + \frac{q - Mq^m}{a^m}\right),$$

$$\varepsilon_2 = \frac{2\varepsilon_1}{1 + \left(1 - \dfrac{4m-2}{3a}\varepsilon_1\right)^{1/2}}.$$

Тогда $\varepsilon^* \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Доказательство. Так как

$$\prod_{k=0}^{m-1} (a + k\varepsilon^*) = a^m + q - Mq^m,$$

то

$$\sum_{k=0}^{m-1} \ln\left(1 + \frac{k}{a}\varepsilon^*\right) = \ln\left(1 + \frac{q - Mq^m}{a^m}\right).$$

Отсюда и из неравенства $x - x^2/2 < \ln(1+x) < x,\ x > 0,$ получаем

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{k}{a}\varepsilon^* - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{k^2}{a^2}(\varepsilon^*)^2 < \ln\left(1 + \frac{q - Mq^m}{a^m}\right) < \sum_{k=1}^{m-1}\frac{k}{a}\varepsilon^*.$$

Используя это соотношение и известные равенства

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

получаем утверждение леммы.

***Замечание* 4.** Если $a > 1$, то ε_1 — бесконечно малая величина и $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = o(\varepsilon_1)$ при $m \to \infty$, ($m \to \infty$, если, например, $q \to 1$, $M > 1$ и $a > 1$).

***Следствие* 2.** *Пусть*:

1) *выполняются условия* 1–3 *теоремы* 1;

2) $$\| F'(F(x)) - F'(x) \| \le \frac{2a}{m(m-1)} \ln\left(1 + \frac{q - Mq^m}{a^m}\right)$$

для всех $x \in E$, *где*

$$a = \sup_{x \in E} \| F'(x) \| \ge 1 \quad \text{и} \quad m = \left[2 - \frac{\ln M}{\ln q}\right].$$

Тогда все решения разностного уравнения (1) *асимптотически устойчивы.*

4. Разностное уравнение (1) с негладким отображением F. В этом пункте исследуем асимптотическую устойчивость решений разностного уравнения (1), в котором $F(x) = A(x)x$ и $A(x)\colon E \to E$ — линейный непрерывный оператор для каждого $x \in E$. Здесь отображение $F\colon E \to E$ может не быть C^1-отображением.

Сначала приведем аналог теоремы 1 для разностного уравнения (1), которое принимает вид

$$x_{n+1} = A(x_n)x_n, \qquad n \ge 0. \tag{9}$$

Теорема 2. *Пусть*:

1) $A\colon E \to L(E)$ — *непрерывное отображение*;

2) *найдутся числа* $M \ge 1$ *и* $q \in (0, 1)$ *такие, что* $\|(A(x))^n\| \le M q^n$ *для всех* $x \in E$ *и* $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$;

3) ε^* — *наибольшее решение неравенства* (5), *в котором*

$$a = \sup_{x \in E} \|A(x)\| \ge 1 \quad \text{и} \quad m = \left[2 - \frac{\ln M}{\ln q}\right];$$

4) $\|A(A(x)x) - A(x)\| \le \varepsilon^*$ *для всех* $x \in E$.

Тогда все решения разностного уравнения (9) *асимптотически устойчивы.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Следствие 3. *Пусть*:

1) *выполняются условия* 1, 2 *теоремы* 2;

2) $$\| A(A(x)x) - A(x) \| \leq \frac{2a}{m(m-1)} \ln\left(1 + \frac{q - Mq^m}{a^m}\right)$$

для всех $x \in E$, *где*

$$a = \sup_{x \in E} \| A(x) \| \geq 1 \quad и \quad m = \left[2 - \frac{\ln M}{\ln q}\right].$$

Тогда все решения разностного уравнения (9) *асимптотически устойчивы.*

Следствие 4. *Пусть*:

1) *выполняется условие* 1 *теоремы* 2;

2) *множество* $\{A(x) \colon x \in E\}$ *компактно*;

3) $r(A(x)) < 1$ *для всех* $x \in E$.

Тогда для достаточно малой величины

$$\sup_{x \in E} \| A(A(x)x) - A(x) \|$$

все решения разностного уравнения (9) *асимптотически устойчивы.*

Заметим, что условие 2 теоремы 2 сильно сужает класс исследуемых разностных уравнений, поскольку для них

$$\sup_{x \in E} r(A(x)) < 1.$$

Укажем условия асимптотической устойчивости всех решений уравнения (9), для которого $r(A(x)) < 1$ для всех $x \in E$ и

$$\sup_{x \in E} r(A(x)) = 1.$$

Теорема 3. *Пусть*:

1) $A \colon E \to L(E)$ — *непрерывное отображение*;

2) $M(t)$ *и* $q(t)$ — *монотонные неубывающие непрерывные справа на* $[1, +\infty)$ *и принимающие значения соответственно в* $[1, +\infty)$ *и* $(0, 1)$ *функции, для которых*

$$\sup_{\|x\| \leq t} \| (A(x))^n \| \leq M(t)(q(t))^n$$

для всех $t \geq 0$ *и* $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$;

3) $$\sup_{\|x\| \geq t} \| A(A(x)x) - A(x) \| \leq \varepsilon_1(t)$$

для всех $t \geq 0$, *где*

$$\varepsilon_1(t) = \frac{2a}{m(t)(m(t)-1)} \ln\left(1 + \frac{q(t) - M(t)(q(t))^{m(t)}}{a^{m(t)}}\right),$$

$$m(t) = \left[2 - \frac{\ln M(t)}{\ln q(t)}\right] \quad и \quad a = \sup_{x \in E} \| A(x) \| \geq 1.$$

Тогда все решения разностного уравнения (9) *асимптотически устойчивы.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное ненулевое решение y_n уравнения (9). Предположим, что

$$\inf_{n \ge 0} \| y_n \| = \delta > 0. \tag{10}$$

Тогда

$$\| y_p \| = \delta \tag{11}$$

для некоторого $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ или

$$\| y_n \| > \delta \tag{12}$$

для всех $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ и найдется последовательность натуральных чисел n_l, $l \ge 1$, для которой

$$\lim_{l \to \infty} \| y_{n_l} \| = \delta. \tag{13}$$

Рассмотрим отображение $H_m \colon E \to E$, $m \in \mathbb{N}$, определенное равенством

$$H_m(x) = F(F(\ldots(F(x))\ldots)),$$

где $F(x) = A(x)x$. Поскольку

$$H_{m(\delta)}(y_p) = A(y_{p+m(\delta)-1}) A(y_{p+m(\delta)-2}) \ldots A(y_{p+1}) A(y_p) y_p \tag{14}$$

и

$$A(y_{p+k}) = A(y_p) + \sum_{l=p}^{p+k-1} (A(A(y_l)y_l) - A(y_l)), \qquad k = \overline{1, m(\delta)-1},$$

то в случае выполнения соотношений (10) и (11) на основании условия 3 теоремы 3

$$\| A(y_{p+k}) - A(y_p) \| \le k\varepsilon_1(\delta).$$

Поэтому согласно условию 2 теоремы 3, лемме 3 и (14)

$$\| y_{p+m(\delta)} \| = \| H_{m(\delta)}(y_p) \| \le$$

$$\le \left(\| (A(y_p))^{m(\delta)} \| + \prod_{k=0}^{m(\delta)-1} (a + \varepsilon_1(\delta)k) - a^{m(\delta)} \right) \delta \le$$

$$\le (M(\delta)(q(\delta))^{m(\delta)} + (q(\delta) - M(\delta)(q(\delta))^{m(\delta)}))\,\delta = q(\delta)\,\delta < \delta,$$

что противоречит (10).

Обозначим $\delta_l = \| y_{n_l} \|$. В случае выполнения соотношений (12) и (13) имеем

$$H_{m(\delta_l)}(y_{n_l}) = A(y_{n_l+m(\delta_l)-1}) \ldots A(y_{n_l+1}) A(y_{n_l}) y_{n_l},$$

$$A(y_{n_l+k}) = A(y_{n_l}) + \sum_{r=n_l}^{n_l+k-1} (A(A(y_{n_l}) y_{n_l} - A(y_{n_l})), \qquad k = \overline{1, m(\delta_l)-1},$$

и поэтому на основании условия 3 теоремы 3

$$\| A(y_{n_l+k}) - A(y_{n_l}) \| \le k\varepsilon_1(\delta),$$

а на основании условия 2 теоремы 3 и леммы 3

$$\| y_{n_l+m(\delta_l)} \| = \| H_{m(\delta_l)}(y_{n_l+m(\delta_l)}) \| \le$$

$$\le \left(\|(A(y_{n_l}))^{m(\delta_l)}\| + \left(\prod_{k=0}^{m(\delta_l)-1} (a+k\varepsilon_1(\delta)) - a^{m(\delta_l)} \right) \right) \delta_l \le$$

$$\le \left(M(\delta_l)(q(\delta_l))^{m(\delta_l)} + \left(\prod_{k=0}^{m(\delta_l)-1} (a+k\varepsilon_1(\delta)) - a^{m(\delta_l)} \right) \right) \delta_l. \tag{15}$$

В силу условия 2 теоремы 3 функции $m(t)$ и $\varepsilon_1(t)$ непрерывны справа в точке $t = \delta$. Поэтому найдется такое $l_0 \in \mathbb{N}$, что $m(\delta_l) = m(\delta)$ и $\varepsilon_1(\delta_l) \le \varepsilon^*(\delta)$ для всех $l \ge l_0$, где $\varepsilon^*(\delta)$ — наибольшее решение неравенства (5) при $q = q(\delta)$, $M = M(\delta)$, $m = m(\delta) = [2 - \ln M(\delta)/\ln q(\delta)]$ и

$$a = \sup_{x \in E} \| A(x) \|.$$

Тогда

$$\prod_{k=1}^{m(\delta_l)-1} (a+k\varepsilon_1(\delta)) - a^{m(\delta_l)} = \prod_{k=0}^{m(\delta)-1} (a+k\varepsilon_1(\delta)) - a^{m(\delta)} \le$$

$$\le \prod_{k=0}^{m(\delta)-1} (a+k\varepsilon^*(\delta)) - a^{m(\delta)} \le q(\delta) - M(\delta)\left(q(\delta)\right)^{m(\delta)} \tag{16}$$

для всех $l \ge l_0$.

Таким образом, на основании (15) и (16) имеем

$$\| y_{n_l+m(\delta_l)} \| \le \left(M(\delta_l)\left(q(\delta_l)\right)^{m(\delta)} + q(\delta) - M(\delta)\left(q(\delta)\right)^{m(\delta)} \right) \delta_l$$

для всех $l \ge l_0$. Так как функции $M(t)$ и $q(t)$ непрерывны справа в точке $t \in \in \delta$, то из последнего неравенства получаем

$$\overline{\lim_{l \to \infty}} \| y_{n_l+m(\delta_l)} \| < \delta,$$

что противоречит предположению (10) и в случае выполнения соотношений (12) и (13).

Итак, предположение о выполнении соотношения (10) неверно. Следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} \| y_n \| = 0 \tag{17}$$

для каждого решения уравнения (9).

Из условий 1, 2 теоремы 3 на основании теоремы об асимптотической устойчивости по линейному приближению [5] следует, что нулевое решение разностного уравнения (9) асимптотически устойчиво. Отсюда с учетом непрерывности отображения $A\colon E \to L(E)$ на E и соотношения (17) получаем асимптотическую устойчивость каждого решения разностного уравнения (9). Теорема 3 доказана.

***Замечание* 5.** Полученные выше результаты сохраняются и для разностного уравнения $x(t+1) = F(x(t))$, $t \ge 0$, с непрерывным временем t. Задача исследования асимптотического поведения решений этого уравнения, если не выполняется соотношение (3), — сложная задача даже в случае $\dim E = 1$ [3, 4, 17].

1. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 311 с.
2. *Мартынюк Д. И.* Лекции по качественной теории разностных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1972. – 246 с.
3. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1986. – 280 с.
4. *Шарковский А. Н., Коляда С. Ф., Сивак А. Г., Федоренко В. В.* Динамика одномерных отображений. – Киев: Наук. думка, 1989. – 216 с.
5. *Слюсарчук В. Е.* Устойчивость решений разностных уравнений в банаховом пространстве: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Черновцы, 1972. – 91 с.
6. *Слюсарчук В. Е., Царьков Е. Ф.* Разностные уравнения в банаховом пространстве // Латв. мат. ежегодник. – 1976. – **17**. – С. 214–229.
7. *Слюсарчук В. Е.* Новые теоремы о неустойчивости разностных систем по первому приближению // Дифференц. уравнения. – 1983. – **19**, № 5. – С. 906–908.
8. *Слюсарчук В. Е.* К неустойчивости разностных уравнений по первому приближению // Там же. – 1986. – **22**, № 4. – С. 722–723.
9. *Слюсарчук В. Е.* К неустойчивости автономных систем по линейному приближению // Асимптотические методы и их применение в задачах математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. – С. 112–114.
10. *Свердан М. Л., Царьков Е. Ф.* Устойчивость стохастических импульсных систем. – Рига: Риж. техн. ун-т, 1994. – 300 с.
11. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
12. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. – М.: Мир, 1970. – 352 с.
13. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. – М.: Мир, 1980. – 304 с.
14. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.
15. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
16. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. – М.: Мир, 1969. – 448 с.
17. Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем // Успехи физ. наук. – 1983. – **141**, вып. 2. – С. 343–374.

Получено 19.01.96