УДК 517.9

В. І. Ткаченко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО РІВНОМІРНО СТІЙКІ ЛІНІЙНІ КВАЗІПЕРІОДИЧНІ СИСТЕМИ*

In a finite-dimensional complex space, we consider a system of linear differential equations with quasiperiodic skew-Hermitian matrix. The space of solutions of this system is a sum of one-dimensional invariant subspaces. Over a torus defined by quasiperiodic matrix of the system, we investigate the corresponding one-dimensional invariant bundles (nontrivial in the general case). We find the conditions, under which these bundles are trivial and the system can be reduced to diagonal form by means of the Lyapunov quasiperiodic transformation with a frequency module coinciding with frequency module of the matrix of system.

У скінченновимірному комплексному просторі розглядається система лінійних диференціальних рівнянь з квазіперіодичною косоермітовою матрицею, простір розв'язків якої є сумою одновимірних інваріантних підпросторів. Досліджуються відповідні одновимірні інваріантні розшарування (у загальному випадку нетривіальні) над тором, який визначається квазіперіодичною матрицею системи. Наводяться умови, при яких ці розшарування тривіальні і система зводиться до діагонального вигляду ляпуновським квазіперіодичним перетворенням з частотним модулем, який співпадає з частотним модулем матриці системи.

1. Розглянемо систему диференціальних рівнянь з квазіперіодичною косоермітовою матрицею, записану як лінійне розширення динамічної системи на торі

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi)x, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \tag{1}$$

де $x \in \mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^n$ — n-вимірний комплексний простір, $\varphi \in \Omega_m$, $\Omega_m = \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$ — m-вимірний тор, $\rho(\cdot,\cdot)$ — метрика на торі, $P(\varphi)$ — неперервна функція $\Omega_m \to u(n)$, $u(n)$ — множина косоермітових матриць n-го порядку $P(\varphi) + P^*(\varphi) = 0$ (P^* — спряжена матриця), $M(n)$ — множина комплекснозначних матриць n-го порядку, $U(n)$ — множина унітарних матриць n-го порядку, $\|\cdot\|$ — норма вектора з $\mathbb{C}^n$ чи відповідна норма матриці

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|, \qquad A \in M(n), \qquad x \in \mathbb{C}^n,$$

$\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ — сталий вектор з дійсними раціонально незалежними координатами.

Нехай $\Phi(t, \varphi_0)$ — фундаментальна матриця розв'язків системи

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi_0 \cdot t)x,$$

де $\varphi_0 \cdot t = \omega t + \varphi_0$ — розв'язок другого рівняння (1), $\Phi(0, \varphi_0) = I$, I — одинична матриця. Оскільки матриця $P(\varphi)$ косоермітова, $\Phi(t, \varphi_0) \in U(n)$.

Позначимо через $C(\Omega, U(n))$ простір неперервних на торі Ω функцій зі значеннями в просторі $U(n)$, $C'(\Omega, U(n))$ — простір функцій $a(\varphi)$ з $C(\Omega, U(n))$, для яких $a(\varphi \cdot t)$ має неперервні похідні відносно t.

Нехай $X = \mathrm{cls}\,\{(\varphi_0, I) \cdot t,\ t \in \mathbb{R}\} \subset \Omega_m \times U(n)$ — замикання траєкторії з початковою точкою (φ_0, I) системи (1). На X вводиться динамічна система $(X, \mathbb{R})$:

* Робота виконана при фінансовій підтримці Державного Комітету України з питань науки і технологій (Фонд фундаментальних досліджень).

$$(\varphi, A)\cdot t = (\omega t+\varphi, \Phi(\varphi, t)A), \quad (\varphi, A) \in X, \quad t\in \mathbb{R}.$$

Динамічна система $(X, \mathbb{R})$ мінімальна та дистальна. Нехай π — проекція на перший співмножник $\pi: X\to\Omega_m$. В [1, 2] показано, що $\pi^1(\varphi_0)$ утворює компактну групу G.

Лема 1. *Якщо група G комутативна, то простір $\Omega_m \times \mathbb{C}^n$ системи* (1) *є сумою Уітні одновимірних локально тривіальних інваріантних розшарувань γ_i, $i=\overline{1,n}$, над тором Ω_m. Відповідні цим розшаруванням проектори $P_i(\varphi)$, $i=\overline{1,n}$, належать простору $C'(\Omega, M(n))$.*

Доведення. Для комутативної групи G простір $\mathbb{C}^n$ є прямою сумою n одновимірних інваріантних відносно дії групи G підпросторів [3, с. 34].

Нехай V_1 — один з таких підпросторів: $gx_1 \in V_1$ для $x_1 \in V_1$, $g\in G$. Розглянемо

$$\operatorname{cls}\{(\varphi_0\cdot t, \Phi(\varphi_0, t)x),\ t\in\mathbb{R},\ x\in V_1\}.$$

Це локально тривіальне розшарування з базою Ω_m та шаром V_1. Дійсно, шар над точкою φ_1 визначається формулою

$$V_{\varphi_1} = \left\{y:\ y=\lim_{t_n\to\infty}\Phi(\varphi_0, t_n)x_1,\ x_1\in V_1,\ \varphi_0\cdot t_n\to\varphi_1,\ t_n\to\infty\right\}.$$

(Розглядаються ті послідовності $\{t_n\}$, для яких границя існує.) Як випливає з [2], $\pi^{-1}(\varphi_1)=AG$, де $A=\lim_{\tau_n\to\infty}\Phi(\varphi_0,\tau_n)$ для деякої послідовності $\{\tau_n\}$ такої, що $\varphi_0\cdot\tau_n\to\varphi_1$ і існує границя $\Phi(\varphi_0,\tau_n)$ при $\tau_n\to\infty$. Тому

$$V_{\varphi_1} = \{Agx_1,\ g\in G,\ x_1\in V_1\}.$$

Доведемо коректність такого означення. Нехай $\Phi(\varphi_0,\tau_n^1)\to A_1$, $\varphi_0\cdot\tau_n^1\to\varphi_1$ при $\tau_n^1\to\infty$. Тоді $A_1=Ag_1$ і

$$V_{\varphi_1} = \{Ag_1gx_1,\ g\in G,\ x_1\in V_1\}.$$

Зокрема, якщо $\varphi_0\cdot t_k\to\varphi_0$, $t_k\to\infty$, то $\Phi(\varphi_0,t_k)\to g_0$ для деякого $g_0\in G$ і $\Phi(\varphi_0,t_k)x_1\to g_0x_1\in V_1$ для $x_1\in V_1$.

З інваріантності розшарування γ_i для відповідного проектора $P_i(\varphi)$ випливає рівність $gP_i(\varphi_0)g^*=P_i(\varphi_0)$ для всіх $g\in G$, $i=\overline{1,n}$. Значення проектора P_i в точках φ і φ_0 пов'язані співвідношенням

$$P_i(\varphi) = \lim_{t_n\to\infty}\Phi(\varphi_0,t_n)P_i(\varphi_0)\Phi^*(\varphi_0,t_n) = AP_i(\varphi_0)A^*,$$

де послідовність $\{t_n\}$ така, що $\varphi_0\cdot t_n\to\varphi$, $\Phi(\varphi_0,t_n)\to A$, $t_n\to\infty$. Розглянемо довільну послідовність $\varphi_s\to\varphi$, $s\to\infty$:

$$P_i(\varphi_s) = \lim_{n\to\infty}\Phi(\varphi_0,t_n^s)P_i(\varphi_0)\Phi^*(\varphi_0,t_n^s) = B_sP_i(\varphi_0)B_s^*,$$

де $\varphi_0\cdot t_n^s\to\varphi_s$, $\Phi(\varphi_0,t_n^s)\to B_s$, $n\to\infty$. Для дистального потоку $(X,\mathbb{R})$ відображення $\pi: X\to\Omega_m$ відкрите і для $A\in\pi^{-1}(\varphi)$ та послідовності $\{\varphi_s\}$,

$\varphi_s \to \infty$, $s \to \infty$ існує послідовність $\{A_s\}$ така, що $\pi(A_s) = \varphi_s$ і $A_s \to A$, $s \to \infty$ [4, с. 500]. Для A_s, $B_s \in \pi^{-1}(\varphi_s)$ існує таке $g_s \in G_s$, що $B_s g_s = A_s$. Тому

$$P_i(\varphi_s) = A_s P_i(\varphi_0) A_s^* \to A P_i(\varphi_0) A^* = P_i(\varphi), \quad s \to \infty.$$

Проектор $P_i(\varphi)$ неперервний.

Покажемо, що $P_i(\varphi) \in C'(\Omega_m, M(n))$:

$$\frac{1}{t}(P(\varphi \cdot t) - P(\varphi)) = \frac{1}{t}\Big(\Phi(\varphi, t)P(\varphi)\Phi^*(\varphi, t) - \Phi(\varphi, t)P(\varphi)\Big) +$$

$$+ \frac{1}{t}(\Phi(\varphi, t)P(\varphi) - P(\varphi)) \to P(\varphi)A^*(\varphi) + A(\varphi)P(\varphi), \quad t \to 0.$$

Лему доведено.

Теорема 1. *Якщо в системі* (1) *група* G *комутативна і існують додатні числа* $T > a^{-1}$ *і*

$$\delta < \frac{(\min_{1 \le i \le m} \omega_i)}{a}, \quad a = \sup_{\varphi \in \Omega_m} \| P(\varphi) \|,$$

такі, що для всіх $\varphi \in \Omega_m$ *виконується співвідношення*

$$\rho(\varphi, \varphi \cdot T) < \delta, \quad \| \Phi(T, \varphi) - I \| < 1, \tag{2}$$

то розшарування γ_i, $i = \overline{1, n}$, *тривіальні і існує заміна змінних* $x = W(\varphi)y$, $W(\varphi) \in C'(\Omega_m, U(n))$, *яка зводить систему* (1) *до діагонального вигляду.*

Доведення. 1. Тор Ω_m запишемо як добуток m кіл одиничної довжини $\Omega_m = S_1 \times \ldots \times S_m$. Через Ω_m^0 позначимо підтор розмірності $(m-1)$ тора Ω_m вигляду $(\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}, 0)$.

Нехай $t = t_1$ — таке значення, що $\omega t_1 + \varphi_0 \in \Omega_m^0$ для $\varphi_0 \in \Omega_m^0$. Тоді потік $\Phi(\varphi, t)$ системи (1) при $\varphi \in \Omega_m^0$, $t = t_1$ відображає множину $\Omega_m^0 \times \mathbb{C}^n$ на себе.

Виберемо натуральне число N таке, що для всіх точок $\varphi \in \Omega_m^0$ точка $\varphi \cdot N t_1$ є найближчою до $\varphi \cdot T$ точкою перетину траєкторії $\varphi \cdot t$ з множиною Ω_m^0. Тоді легко перевірити, що

$$\| \Phi(\varphi, t_1 N) - \Phi(\varphi, T) \| \le \left\| \int_T^{t_1 N} A(\varphi \cdot \tau)\Phi(\varphi, \tau)\, d\tau \right\| \le$$

$$\le a \,|\, t_1 N - T \,| \le \frac{\delta a}{\min \omega_i} < 1.$$

Звідки отримуємо

$$\| \Phi(\varphi, t_1 N) - I \| \le \| \Phi(\varphi, t_1 N) - \Phi(\varphi, T) \| + \| \Phi(T, \varphi) - I \| < 2$$

для всіх точок $\varphi \in \Omega_m^0$. Тому відображення $\Phi(\varphi, N t_1)$ гомотопне тотожному над Ω_m^0.

2. За лемою 1 простір $\Omega_m \in \mathbb{C}^n$ розшаровується на n одновимірних розшарувань $\oplus \gamma_i$. Доведемо, що ці розшарування тривіальні. Розглянемо γ_1.

Над кожним колом S_i одновимірне комплексне розшарування γ_1 тривіальне. Доведемо, що при умові тривіальності розшарування γ_1 над кожним s-вимірним тором

$$S_{i_1} \times \ldots \times S_{i_s}, \quad 1 \le i_1 < \ldots < i_s \le m,$$

воно тривіальне і над $(s+1)$-вимірними торами

$$S_{i_1} \times \ldots \times S_{i_s} \times S_{i_{s+1}}, \quad i_{s+1} \ne i_j, \quad j = \overline{1, s}.$$

Нехай s-вимірний тор Ω_s^0 має вигляд

$$\Omega_s^0 = \left\{ \left(\varphi_1, \ldots, \varphi_s, \varphi_{s+1}^0, \ldots, \varphi_{m-1}^0, 0 \right), \ \varphi_i \in [0,1], \ i = \overline{1, s} \right\}, \qquad \Omega_s^0 \subset \Omega_m^0.$$

При відображенні $\Phi(\varphi, t_1)$ тор Ω_s^0 перейде в тор Ω_s^1 вигляду

$$\Omega_s^1 = \left\{ \left(\varphi_1, \ldots, \varphi_s, \varphi_{s+1}^0 + \omega_{s+1} t_1, \ldots, \varphi_{m-1}^0 + \omega_{m-1} t_1, 0 \right), \ \varphi_i \in [0,1], \ i = \overline{1, s} \right\}.$$

Розглянемо послідовність торів $\Omega_s^0, \Omega_s^1, \ldots, \Omega_s^N$, де Ω_s^l — це образ тора Ω_s^0 при відображенні $\Phi(\varphi, l t_1)$, $l = \overline{1, N}$.

Позначимо через U таку відкриту підмножину тора Ω_m^0, що $\Omega_s^l \subset U$, $l = \overline{0, N}$, і розшарування γ_1 над U тривіальне. Множина U має вигляд $U = S_1 \times \ldots \times S_s \times U_0$, де U_0 — однозв'язна відкрита підмножина $(m-s)$-вимірного тора, якій належать точки $\left(\varphi_{s+1}^0 + \omega_{s+1} l t_1, \ldots, \varphi_{m-1}^0 + \omega_{m-1} l t_1, 0 \right)$, $l = \overline{0, N}$.

Нехай $f \colon U \times \mathbb{C} \to \pi^{-1}(U)$ — координатне відображення для розшарування γ_1 над множиною U, $g_0(\varphi) = f(\varphi, 1)$ — переріз над U, $\varphi \in U$. При відображенні $\Phi(\varphi, t_1)$ переріз $g_0(\varphi)$ перетворюється в переріз $g_1(\varphi)$, $\varphi \in U$, $f^{-1}(g_1(\varphi)) = (\varphi, \alpha_1(\varphi))$, $\varphi \in U$, $\alpha_1(\varphi)$ — неперервна функція $U \to \mathbb{C}$, за якою будуємо функцію

$$\beta_1(\varphi) = \frac{\alpha_1(\varphi)}{|\alpha_1(\varphi)|} \colon U \to S,$$

S — одиничне коло $S = \{ \exp 2\pi i \theta, \ \theta \in [0, 1] \}$.

Обмеження функції $\beta_1(\varphi)$ на тори Ω_s^l гомотопні між собою.

Розглянемо тепер відображення $(\varphi \cdot 2t_1, \Phi(\varphi, 2t_1))$. При цьому відображенні переріз $g_0(\varphi)$ перетворюється у переріз $g_2(\varphi)$. Йому відповідають функції $\alpha_2(\varphi)$ і $\beta_2(\varphi)$:

$$f^{-1}(g_2(\varphi)) = (\varphi, \alpha_2(\varphi)), \qquad \varphi \in U,$$

$$\beta_2(\varphi) = \frac{\alpha_2(\varphi)}{|\alpha_2(\varphi)|} \colon U \to S.$$

Переріз $g_2(\varphi)$ можна розглядати як образ перерізу $g_1(\varphi)$ при відображенні $\Phi(\varphi, t_1)$. Тому над тором Ω_s^i функція $\beta_2(\varphi)$ гомотопна функції $\beta_1^2(\varphi)$.

Аналогічно, функція $\beta_N(\varphi)$, побудована для відображення $\Phi(\varphi, N t_1)$, гомотопна над Ω_s^0 функції $\beta_1^N(\varphi)$. З іншого боку, за першою частиною доведення $\beta_1^N(\varphi)$ гомотопна тотожному відображенню над тором Ω_s^0 і мало відрізняється від тотожного відображення. Тому $\beta_1(\varphi)$ над торами Ω_s^i гомотопні тотожним.

Враховуючи це, переріз $\{\Phi(\varphi, t)g_0(\varphi),\ \varphi \in \Omega_s^0,\ t \in [0, t_1]\}$ розшарування γ_1 можна продовжити до перерізу над множиною $\{\Omega_s^0 \cdot t,\ t \in [0, t_1]\} \cup U$ і зробити висновок про тривіальність розшарування над цією множиною. Нехай γ — це лінія в множині U_0, яка з'єднує точки $(\varphi_{s+1}^0, \ldots, \varphi_{m-1}^0, 0)$ і $(\varphi_{s+1}^0 + \omega_{s+1}t_1, \ldots, \varphi_{m-1}^0 + \omega_{m-1}t_1, 0)$. Тоді на торі Ω_m множини $\Pi_1 = \{\Omega_s^0 \cdot t, t \in [0, t_1]\} \cup S_1 \times \ldots \times S_s \times \gamma$ та $\Pi_2 = \Omega_m^0 \times (\varphi_{s+1}^0, \ldots, \varphi_{m-1}^0) \times S_m$ гомотопні. Над множиною Π_1 як підмножиною множини $\{\Omega_s^0 \cdot t,\ t \in [0, t_1]\} \cup U$ розшарування γ_1 тривіальне, тому воно тривіальне і над множиною Π_2, тобто $(s+1)$-вимірним тором $S_1 \times \ldots \times S_s \times S_m$ [5].

3. Вибираючи інші підтори $\Omega_s' = S_{i_1} \times \ldots \times S_{i_s}$ замість Ω_s^0 і $S_{i_{s+1}}$ замість S_m і повторюючи міркування п. 2, доводимо тривіальність розшарування над $\Omega_s' \times S_{i_{s+1}}$, виходячи з тривіальності розшарування над Ω_s'. При $s = m-1$ отримуємо тривіальність розшарування γ_1 над тором Ω_m. Тривіальність інших розшарувань γ_i, $i = \overline{2, n}$, доводиться аналогічно. У кожному розшаруванні γ_i виберемо переріз $e_i(\varphi)$, $\| e_i \| = 1$, $i = \overline{1, n}$; $P_i(\varphi) \in C'(\Omega_m, M(n))$, тому, використовуючи теореми апроксимації, можна вибрати $e_i(\varphi) \in C'(\Omega_m, \mathbb{C}^n)$. Заміна змінних $x = W(\varphi)y$ з матрицею $W(\varphi) = (e_1(\varphi) \ldots e_n(\varphi))$ приводить систему (1) до діагонального вигляду. Теорему доведено.

Розглянемо тепер систему (1) у дійсному просторі $x \in \mathbb{R}^n$. Матриця $P(\varphi)$ кососиметрична, а фундаментальна система розв'язків $\Phi(t, \varphi) \in O(n)$, $t \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \Omega_m$, $O(n)$ — множина ортогональних матриць n-го порядку.

Теорема 2. *Нехай у системі* (1) $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \Omega_m$, *матриця* $P(\varphi)$ *кососиметрична при всіх* $\varphi \in \Omega_m$. *Якщо в системі* (1) *група* G *комутативна і існують додатні числа* $T > a^{-1}$ *і*

$$\delta < \frac{(\min_{1 \le i \le m} \omega_i)}{a}, \quad a = \sup_{\varphi \in \Omega_m} \| P(\varphi) \|,$$

такі, що для всіх $\varphi \in \Omega_m$ *виконується нерівність*(2), *то розшарування* γ_i, $i = \overline{1, n}$, *тривіальні і система за допомогою ляпуновського перетворення* $x = W(\varphi)y$, $W(\varphi) \in C'(\Omega_m, O(n))$, *зводиться до блочно-діагонального вигляду*

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad \frac{dy}{dt} = \operatorname{diag}(D_1, \ldots, D_k, 0_s)y, \tag{3}$$

де

$$D_j(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -b_j(\varphi) \\ -b_j(\varphi) & 0 \end{pmatrix},$$

$j = \overline{1, k}$, $\varphi \in \Omega_m$, $b_j(\varphi) \in C(\Omega_m, \mathbb{R})$, 0_s — *нульова квадратна матриця розмірності* s, $2k + s = n$.

Доведення. Для системи у дійсному просторі $\pi^{-1}(\varphi_0) = G$ є комутативною замкненою підгрупою групи $O(n)$. Для комутативної групи G простір $\mathbb{R}^n$ є прямою сумою ортогональних незвідних інваріантних відносно дії групи G підпросторів розмірності 2 та 1, причому в одновимірних підпросторах група G діє тривіально. Аналогічно лемі 1 доводимо, що простір $\Omega_m \times \mathbb{R}^n$ є сумою Уітні локально тривіальних інваріантних двовимірних Υ_i^2, $i=\overline{1,k}$, та одновимірних Υ_i^1, $i=\overline{1,l}$, розшарувань. Повторюючи доведення теореми 1, показуємо тривіальність цих розшарувань. У кожному з розшарувань Υ_i^2 вибираємо ортонормований базис. У цьому базисі система (1) набуває вигляду (3).

Наслідок. *Якщо всі розв'язки системи* (1) *рівномірно стійкі за Ляпуновим (або майже періодичні* [6]), *то справедливі твердження теореми* 1 *(у комплексному випадку) і теореми* 2 *(у дійсному випадку).*

Відмітимо, що аналогічні результати отримано в [7, 8].

Доведення. Якщо всі розв'язки системи (1) рівномірно стійкі за Ляпуновим чи майже періодичні, то група G комутативна [9]. Покажемо, що в цьому випадку існують $T>0$ і достатньо мале $\delta>0$ такі, що виконуються умови (2).

Нехай послідовність дійсних чисел $\{t_n\}$ така, що $\varphi_0 \cdot t_n \to \varphi_0$, $\Phi(\varphi_0, t_n) \to I$, $t_n \to \infty$, для деякого $\varphi_0 \in \Omega_m$. Тоді для квазіперіодичного потоку на торі

$$\forall\, \varepsilon>0 \quad \exists\, N_3>0 \quad \forall\, \varphi \in \Omega_m \quad \forall\, n>N_3:\ \rho(\varphi \cdot t_n, \varphi)<\varepsilon.$$

Так само з рівномірної стійкості потоку $\Phi(\varphi, t)$ випливає $\Phi(\varphi, t_n) \to I$ рівномірно для всіх $\varphi \in \Omega_m$. Дійсно, нехай $\varphi = \lim\limits_{\tau_n \to \infty} \varphi_0 \cdot \tau_k$ довільне. Одержимо оцінки

$$\|\Phi(\varphi, t_n)-I\| \le \|\Phi(\varphi, t_n)-\Phi(\varphi_0\cdot\tau_k, t_n)\| + \|\Phi(\varphi_0\cdot\tau_k, t_n)-I\| \le$$

$$\le \|\Phi(\varphi_0, t_n)-\Phi(\varphi_0\cdot\tau_k, t_n)\| + \|\Phi(\varphi_0\cdot t_n, \tau_k)\Phi(\varphi_0, t_n)-\Phi(\varphi_0, \tau_k)\Phi(\varphi_0, t_n)\| +$$

$$+\|\Phi(\varphi_0, \tau_k)\Phi(\varphi_0, t_n)-\Phi(\varphi_0, \tau_k)\|\,. \qquad (4)$$

Ми використали властивість коциклу для потоку $\Phi(\varphi, t)$:

$$\Phi(\varphi, t+\tau) = \Phi(\varphi_0\cdot t, \tau)\Phi(\varphi, \tau), \qquad t, \tau \in \mathbb{R},$$

та те, що норма унітарної матриці $\|\Phi\| = 1$.

Зафіксуємо довільне $\varepsilon>0$. Тоді за означенням рівномірної стійкості існує таке $\delta>0$, що з $\rho(\varphi_1, \varphi_2)<\delta$ випливає $\|\Phi(\varphi_1, t)-\Phi(\varphi_2, t)\|<\varepsilon/3$ для $t>0$. Виберемо τ_k так, щоб $\rho(\varphi_0\cdot\tau_k, \varphi)<\delta$, тоді в (5) перша різниця менша $\varepsilon/3$. Нехай N_1 і N_2 такі, що при $n>N_1$ виконується $\rho(\varphi_0\cdot t_n, \varphi_0)<\delta$, а при $n>N_2$ виконується $\|\Phi(\varphi, t_n)-I\|<\varepsilon/3$. Тоді в формулі (5) друга різниця менша $\varepsilon/3$ при $n>N_1$, а третя різниця менша $\varepsilon/3$ при $n>N_2$.

Таким чином, при $n>\max\{N_1, N_2\}$ для всіх $\varphi \in \Omega_m$ виконується нерівності $\rho(\varphi\cdot t_n, \varphi)<\delta$, $\|\Phi(\varphi, T)-I\|<\varepsilon$. Вибравши $\delta<\min\omega_i/a$, $\varepsilon<1$, одержимо умови теореми 1.

Теорема 3. *У комплексному просторі* $x \in \mathbb{C}^n$ *існує система* (1) *з комутативною групою* G, *яка не зводиться за допомогою ляпуновського перетворення* $x=W(\varphi)y$ *до діагонального вигляду.*

Доведення. У роботі [10] доведено існування над тором Ω_m нетривіальних комплексних одновимірних розшарувань γ_1 і γ_2 таких, що $\gamma_1 \oplus \gamma_2 = \Omega_m \in \mathbb{C}^2$.

Їм відповідають проектори $P_1(\varphi)$ і $P_2(\varphi)$, $P_1(\varphi)+P_2(\varphi)=I$. Скористаємося методом побудови лінійної системи рівнянь, яка має інваріантні підмножини, що визначаються проекторами $P_1(\varphi)$ та $P_2(\varphi)$ [10, 11]. Така система має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = \left(P_1'(\varphi)P_1(\varphi) + P_2'(\varphi)P_2(\varphi)\right)x, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \tag{5}$$

де

$$P'(\varphi) = \frac{d}{dt}P(\varphi\cdot t)\bigg|_{t=0}.$$

Група G для цієї системи комутативна. Нетривіальні одновимірні розшарування γ_1 та γ_2 не мають неперервних відмінних від нуля перерізів. Тому систему (5) не можна за допомогою визначеного на торі Ω_m ляпуновського перетворення звести до діагонального вигляду, що відповідає інваріантним розшаруванням γ_1 і γ_2. Якщо система зводиться до діагонального вигляду, що не відповідає цим розшаруванням, то можна довести тривіальність розшарувань γ_i, що суперечить припущенню.

1. *Coppel W. A.* Almost periodic properties of ordinary differential equations // Ann. Math. Pura Appl. – 1967. – **76**, № 1. – P. 27–49.
2. *Johnson R. A.* On a Floquet theory for almost periodic, two-dimensional linear systems // J. Different. Equats. – 1980. – **37**, № 2. – P. 184–205.
3. *Адамс Дж.* Лекции по группам Ли. – М.: Наука, 1979. – 144 с.
4. *Furstenberg H.* The structure of distal flows // Amer. J. Math. – 1963. – **85**, № 3. – P. 477–515.
5. *Хьюзмоллер Д.* Расслоенные пространства. – М.: Мир, 1970. – 442 с.
6. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.*. Качественная теория дифференциальных уравнений. – М., Л.: Гостехиздат, 1947. – 448 с.
7. *Любарский М. Г.* Об одном обобщении теоремы Флоке – Ляпунова // Докл. АН СССР. – 1973. – **213**, № 4. – С. 780–782.
8. *Любарский М. Г.* О существовании обобщенного базиса Флоке // Функцион. анализ и его прил. – 1984. – **18**, № 3. – С. 88–89.
9. *Ткаченко В. І.* Про лінійні системи з квазіперіодичними коефіцієнтами та обмеженими розв'язками // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 1. – С. 109–115.
10. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Лин В. Я., Локуциевский О. В.* О топологических причинах аномального поведения некоторых почти периодических систем // Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. – Киев: Наук. думка, 1977. – С. 54–61.
11 *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.

Одержано 28.12.94