УДК 519.21

В. А. Коваль (Инж.-технолог. ин-т, Житомир),
Р. Швабе (Свобод. ун-т, Берлин)

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ МАКСИМУМА ЗАВИСИМЫХ ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

The well-known Nisio result on the asymptotic equality for the maximum of real-valued Gaussian random variables is generalized to the case of Gaussian random variables taking values in a Banach space.

Відомий результат Нісіо про асимптотичну рівність для максимуму дійсних гауссових випадкових величин узагальнюється на гауссові випадкові елементи в банаховому просторі.

Основной результат. Известно [1, 2], что если (x_n) — последовательность гауссовских случайных величин с $\mathrm{E}\, x_n = 0$, $\mathrm{E}\, x_n^2 = \sigma_n^2$ и

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = \sigma, \tag{1}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{|i-j| \ge n} \mathrm{E}\, x_i x_j \le 0, \tag{2}$$

то

$$\lim_{N \to \infty} (2 \log N)^{-1/2} \max_{1 \le n \le N} |x_n| = \sigma \quad \text{почти наверное (п. н.)} \tag{3}$$

(здесь E — знак математического ожидания). В [3] показано, что если $(X_n = X_n(t))$ — последовательность независимых одинаково распределенных гауссовских случайных элементов в пространстве $\mathbb{C}\,[0, 1]$ с $\mathrm{E}\, X_n(t) = 0$ и $\sigma = \sigma(t) = (\mathrm{E} X_n^2(t))^{1/2}$, то

$$\lim_{N \to \infty} (2 \log N)^{-1/2} \max_{1 \le n \le N} \|X_n\| = \|\sigma\| \quad \text{п. н.},$$

где $\|\cdot\|$ — sup-норма в $\mathbb{C}\,[0, 1]$. Следующее утверждение обобщает указанные результаты.

Теорема. *Пусть* (X_n) *— последовательность гауссовских случайных элементов в сепарабельном банаховом пространстве* $\mathbb{B}$ *с* $\mathrm{E} X_n = 0$,

$$\sigma_n = \sup_{\|f\| \le 1} \sigma_n(f), \qquad \sigma_n(f) = \left(\mathrm{E} f^2(X_n)\right)^{1/2}, \quad f \in \mathbb{B}^*$$

($\mathbb{B}^*$ *— сопряженное пространство к* $\mathbb{B}$) *и выполнены условия:*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mathrm{E}\|X_n\|}{\log^{1/2} n} = 0, \tag{4}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n(f) = \sigma(f), \tag{5}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = \sup_{\|f\| \le 1} \sigma(f) = \sigma > 0, \tag{6}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{|i-j| \ge n} \mathrm{E} f(X_i) f(X_j) \le 0 \tag{7}$$

для всех $f \in \mathbb{B}^*$, $\|f\| \le 1$. *Тогда*

$$\lim_{N\to\infty} (2\log N)^{-1/2} \max_{1\le n\le N} \|X_n\| = \sigma \quad \textit{п. н.}$$

Замечание. По поводу условий (5) и (7) см. также [4, 5].

Доказательство. Докажем сначала

$$\limsup_{n\to\infty} (2\log n)^{-1/2} \|X_n\| \le \sigma \quad \text{п. н.} \tag{8}$$

Без ограничения общности в силу (6) можно предполагать, что $\sigma_n > 0$, $n \ge 1$. Из ([6], лемма 3.1) следует, что для любого $\varepsilon > 0$

$$P\{|\|X_n\| - M_n| > (1+\varepsilon)\sigma_n(2\log n)^{1/2}\} \le n^{-(1+\varepsilon)^2},$$

где M_n — медиана случайной величины $\|X_n\|$. Тогда в силу леммы Бореля – Кантелли

$$\limsup_{n\to\infty} (2\sigma_n^2 \log n)^{-1/2} |\|X_n\| - M_n| \le 1 \quad \text{п. н.}$$

Так как $M_n \le 2\mathrm{E}\|X_n\|$, то отсюда и из условий (4), (6) следует соотношение (8).

В свою очередь, из соотношения (8) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ и почти всех ω найдется такой номер $N_0 = N_0(\varepsilon, \omega)$, что для всех $N \ge N_0$ выполняется неравенство

$$(2\log N)^{-1/2} \max_{N_0\le n\le N} \|X_n\| < (1+\varepsilon)\sigma.$$

Это означает, что

$$\limsup_{N\to\infty} (2\log N)^{-1/2} \max_{1\le n\le N} \|X_n\| \le \sigma \quad \text{п. н.} \tag{9}$$

Покажем теперь, что

$$\liminf_{N\to\infty} (2\log N)^{-1/2} \max_{1\le n\le N} \|X_n\| \ge \sigma \quad \text{п. н.} \tag{10}$$

Из условий (5), (7) в силу соотношений (1) – (3) следует

$$\liminf_{N\to\infty} (2\log N)^{-1/2} \max_{1\le n\le N} |f(X_n)| = \sigma(f) \quad \text{п. н.}$$

Тогда

$$\liminf_{N\to\infty} (2\log N)^{-1/2} \max_{1\le n\le N} \sup_{\|f\|\le 1} |f(X_n)| \ge \sigma \quad \text{п. н.}$$

Так как в силу теоремы Хана – Банаха

$$\sup_{\|f\|\le 1} |f(X_n)| = \|X_n\|,$$

то отсюда получаем (10). Соотношения (9) и (10) завершают доказательство теоремы.

Из данной теоремы получаем следующее утверждение.

Следствие. *Пусть* (X_n) — *независимые копии гауссовского случайного элемента* X *в* $\mathbb{B}$ *с* $\mathrm{E}X = 0$ и

$$\sigma = \sup_{\|f\|\le 1} (\mathrm{E}f^2(X))^{1/2}.$$

Тогда

$$\lim_{N \to \infty} (2\log N)^{-1/2} \max_{1 \le n \le N} \|X_n\| = \sigma \quad \textit{п. н.}$$

Применение. Рассмотрим одно приложение доказанной теоремы. Пусть имеем рекуррентное уравнение в R

$$x_n = a x_{n-1} + v_n, \quad n \ge 1,$$

где $|a| < 1$, x_0 — случайная величина, (v_n) — последовательность независимых гауссовских случайных величин с $\mathrm{E} v_n = 0$, $\mathrm{E} v_n^2 = \sigma_0^2 > 0$, $n \ge 1$. Тогда

$$\limsup_{N \to \infty} (2\log n)^{-1/2} |x_n| = \sigma_0 (1 - a^2)^{-1/2} \quad \text{п. н.}$$

Обобщим этот результат на более общие пространства. Ограничимся для простоты случаем сепарабельного гильбертова пространства H. Итак, мы рассматриваем в H рекуррентное уравнение

$$X_n = A X_{n-1} + V_n, \quad n \ge 1, \tag{11}$$

где X_0 — случайный элемент в H, (V_n) — независимые копии гауссовского элемента V в H с $\mathrm{E} V = 0$ и ковариационным оператором D. Будем предполагать, что оператор $A \in L(H)$ и удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|A^n\|^2 < \infty \tag{12}$$

(по поводу данного условия см., например, [7]). Это условие, в частности, выполнено, если $\lim\limits_{n \to \infty} \|A^n\|^{1/n} = r < 1$, т. е. спектральный радиус оператора A меньше единицы. Для решений уравнений вида (11) (а именно: для сумм $\left(\sum_{i=1}^{n} X_i,\ n \ge 1\right)$) и значительно более общих в [7 – 14] получены законы больших чисел и повторного логарифма, центральная предельная теорема, сильный и слабый принципы инвариантности. Сейчас мы исследуем предельное поведение непосредственно самого решения (X_n) уравнения (11). Воспользуемся доказанной теоремой. Из нее, в частности, следует, что справедливо соотношение

$$\limsup_{n \to \infty} (2\log n)^{-1/2} \|X_n\| = \sigma \quad \text{п. н.} \tag{13}$$

(Здесь использованы обозначения из условия теоремы.) Без ограничения общности в силу (12) мы можем предполагать, что в (11) $X_0 = 0$. Тогда гауссовский случайный элемент в H

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} A^{n-i} V_i$$

имеет нулевое математическое ожидание и ковариационный оператор

$$T_n = \sum_{i=0}^{n-1} A^i D (A^*)^i,$$

где A^* — оператор, сопряженный к A, $A^0 = I$ — тождественный оператор. В силу условия (12) существует предел

$$T = \sum_{i=0}^{\infty} A^i D(A^*)^i$$

в норме пространства $L(H)$ последовательности $O(T_n)$. Отсюда вытекает, что выполнены условия (5) и (6) с $\sigma = \| T \|^{1/2}$. Кроме того, очевидно, что

$$\sup_n \mathrm{E} \| X_n \| < \infty .$$

Проверим выполнение условия (7). Для любого $f \in H$ и для всех $i < j$ справедлива оценка

$$| \mathrm{E} \langle f, X_i \rangle \langle f, X_j \rangle | \le \| f \|^2 \mathrm{E} \| V \|^2 \sum_{k=0}^{i-1} \| A^k \|^2 \| A^{j-i} \|$$

(здесь $\langle \cdot , \cdot \rangle$ — скалярное произведение в H). Отсюда и из (12) вытекает выполнение условия (7). Таким образом, использовав (13), мы показали, что решение (X_n) уравнения (11) удовлетворяет соотношению

$$\limsup_{n \to \infty} (2 \log n)^{-1/2} \| X_n \| = \left\| \sum_{i=0}^{\infty} A^i D(A^*)^i \right\|^{1/2} \quad \text{п. н.}$$

1. *Nisio M.* On the extreme values of Gaussian processes // Osaka J. Math. – 1967. – **4**. – P. 313–326.
2. *Lai T. L.* Gaussian processes, moving averages and quick detection problems // Ann. Probab. – 1973. – **1**, № 5. – P. 825–837.
3. *Мацак I. К.* Гранична теорема для максимуму гауссівських незалежних випадкових величин у просторі C // Укр. мат. журн.– 1995. – **47**, № 7. – С. 1006–1008.
4. *Carmona R., Kono N.* Convergence en loi et lois du logarithme itere pour les vecteurs gaussines // Z. Wahrscheinlich. verw. Geb. – 1976. – **36**. – P. 241–267.
5. *Mangano G.-C.* On Strassen-type laws of the iterated logarithm for Gaussian elements in abstract spaces // Ibid. – 1976. – **36**. – P. 227–239.
6. *Ledoux M., Talagrand M.* Probability in Banach spaces. – B.-H.: Springer-Verlag, 1991. – 480 p.
7. *Bosq D.* Proprietes asymptotiques des processus autoregressifs banachiques. Applications // C. R. Akad. Sci. Ser. 1. – 1993. – **316**, № 6. – P. 607–610.
8. *Chen H. F., Guo L.* Laws of iterated logarithm for state variables with applications // Acta Math. Sin. New Ser. – 1988. – **4**, № 4. – P. 343–355.
9. *Darling R. W. R.* Infinite-dimensional stochastic difference equations for particle systems and network flows // J. Appl. Probab. – 1989. – **26**, № 2. – P. 325–344.
10. *Коваль В. А.* Законы больших чисел и повторного логарифма для решений стохастических разностных уравнений в банаховом пространстве // Стохастические уравнения и граничные теоремы. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1991. – С. 79–90.
11. *Коваль В. А.* Loglog-принцип инвариантности для решений стохастического разностного уравнения в банаховом пространстве // Случайные процессы и бесконечномерный анализ. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992. – С. 57–62.
12. *Pechtl A.* Arithmetic means and invariance principles in stochastic approximation // J. Theor. Probab. – 1993. – **6**, № 1. – P. 153–173.
13. *Коваль В. А.* Слабый принцип инвариантности для решений стохастического рекуррентного уравнения в банаховом пространстве // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 1. – С. 114–117.
14. *Koval V., Schwabe R.* Grenzwertsätze für Lösungen stochastischer Differenzengleichungen in Banach–Räumen mit Anwendungen. – Berlin, 1995. – 12 s. – (Preprint / Freie Univ. Berlin, Fachbereich Mathematik und Informatik; № A/32/95).

Получено 18.12.95