УДК 519. 41/47

Н. Ю. Верпатова (Укр. пед. ун-т, Київ)

УЗАГАЛЬНЕНО ФАКТОРИЗОВАНІ ГРУПИ З ДИСПЕРСИВНИМИ ПІДГРУПАМИ

We generalize the well-known notion of complementability of subgroups. We describe the structure of generalized factorized nondispersive groups all subgroups of which are dispersive.

Узагальнюється відоме поняття доповнюваності підгруп. Описується будова узагальнено факторизованих груп, які не є дисперсивними, але всі їх підгрупи є такими.

Означення 1. *Підгрупа* A *групи* G *має в* G C*-доповнення* (C_p*-доповнення*), *якщо в* G *існує така підгрупа* B, *що* $G = A \cdot B$ *і перетин* $A \bigcap B$ — *циклічна група (одинична або циклічна група простого порядку).*

Означення 2 [1]. *Група, в якій кожна підгрупа має* C*-доповнення* (C_p*-доповнення*), *називається* C*-факторизованою* (C_p*-факторизованою*).

Коротко такі групи будемо називати DC-, DC_p-групами.

Означення 3. *Скінченна група* G *називається дисперсивною, якщо вона має такий інваріантний ряд*

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_{n-1} \lhd G_n = G,$$

що фактор-група G_i / G_{i-1} — p_i*-група, ізоморфна силовській* p_i*-підгрупі групи* G *(силовський ряд),* p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — *просте число.*

Скінченна група, що не має силовського ряду, називається недисперсивною групою.

Скінченна недисперсивна група називається мінімальною недисперсивною, якщо кожна її власна підгрупа дисперсивна.

В роботі описуються мінімальні недисперсивні DC- та DC_p-групи, які як підгрупи містяться в кожній недисперсивній узагальнено факторизованій групі.

Означення 4. *Ненільпотентна група, кожна власна підгрупа якої нільпотентна, називається групою Шмідта.*

Лема 1. *Скінченні* DC*-групи Шмідта, що розкладаються в напівпрямий добуток* $G = P \leftthreetimes Q$ *своїх інваріантної силовської* p*-підгрупи* P *і неінваріантної циклічної силовської* q*-підгрупи* Q (p, q — *прості числа), вичерпуються групами таких типів:*

1) $|P| = p$, $p > q$;

2) P — *елементарна абелева група порядку* p^2, Q — *максимальна підгрупи групи* G, *при* $p < q$ $p = 2$, $q = 3$;

3) P — *група кватерніонів,* $q = 3$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — скінченна DC-група Шмідта. За теоремою 1.1.1 [2] $G = P \leftthreetimes Q$, де P — інваріантна силовська p-підгрупа, Q — неінваріантна циклічна силовська q-підгрупа (p, q — прості числа), $C_Q(P) = \Phi(Q)$, $C_P(Q) = \Phi(P)$, $\Phi(P) \times Q$ — максимальна підгрупа в G, експонента підгрупи P дорівнює p або 4.

Розглянемо наступні випадки:

1. $\mathrm{Exp}(P) = p$. Тоді якщо $|P| = p$, то одержимо групу G типу 1.

Нехай $|P| > p$. Припустимо, що $|P| > p^2$. Тоді в групі P існує максимальна підгрупа H така, що $|H| \geq p^2$. Оскільки $\exp(P) = p$, то підгрупа H — нециклічна і має власне (відмінне від G) C-доповнення в групі G, тобто $G = H \cdot D$, причому $|H \bigcap D| \leq p$.

Позначимо $P \bigcap D = N$, тоді $N \lhd D$ і $P = H \cdot N$. В силу рівності

$$|G| = \frac{|H|\cdot|D|}{|H \cap D|}$$

підгрупа D містить силовську q-підгрупу Q^*. На підставі того, що G — група Шмідта, маємо $D = N \times Q^*$. Оскільки $\Phi(P) \times Q$ — максимальна підгрупа в G, то $\Phi(P) \times Q / \Phi(P)$ — максимальна підгрупа в $G/\Phi(P)$, а значить, $D \cdot \Phi(P)/\Phi(P)$ —максимальна підгрупа в $G/\Phi(P)$. Звідси випливає, що N міститься в $\Phi(P)$ і оскільки $\Phi(P)$ міститься в H, а $P = H \cdot N$, одержуємо суперечність, яка показує, що $|P| = p^2$. Отже, одержали групу G типу 2.

2. $\operatorname{Exp}(P) = 4$. Відомо, що P містить підгрупу H, яка ізоморфна групі кватерніонів. Як і раніше, підгрупа H має C-доповнення в групі G, тобто $G = H \cdot D$, $H \cap D$ — циклічна група порядку 1, 2 або 4. Зрозуміло, що $H \not\subset D$, D — власна підгрупа з G.

Позначимо $P \cap D = N$, тоді $N \lhd D$ і $P = H \cdot N$. Як і у випадку 1, підгрупа D містить силовську q-підгрупу Q^*, з максимальності в G підгрупи $\Phi(P) \times Q$ випливає, що $N \subseteq \Phi(P)$. Оскільки $P = H \cdot N$, то $H = P$, тобто P — група кватерніонів, $q = 3$. Одержали групу G типу 3.

Достатність. Нехай $G = P \leftthreetimes Q$ — група Шмідта одного з типів 1–3. Покажемо, що G — DC-група.

Нехай H — довільна підгрупа групи G. Якщо $H = G$, то вона доповнюється в групі G одиничною підгрупою. Якщо $H = \langle g \rangle$, то вона C-доповнюється в групі G всією групою G.

Нехай $H \neq \langle g \rangle$, тоді H не може бути нільпотентною з циклічними силовськими підгрупами.

Можливі такі випадки:

1) силовська p-підгрупа групи H нециклічна;

2) силовська p-підгрупа групи H циклічна.

У першому випадку G — група типу тільки 2 та 3. $P \subseteq H$, але P доповнюється в групі G підгрупою Q, тоді H C-доповнюється в групі G підгрупою Q.

У другому випадку H — ненільпотентна. Якщо $P \subseteq H$, то підгрупа H C-доповнюється в G підгрупою Q.

Нехай $P \not\subset H$, тоді H містить підгрупу Шмідта S, а S може бути тільки типу 1, отже, $p > q$. $H \cap P = P_1$, $|P_1| = p$, $p > q \geq 2$. В групах типу 3 це неможливо, а в групі типу 2 $|P| = p$, $q > 2$, $\delta_q\langle p \rangle = 2$. В групі S $\delta_q\langle p \rangle = 1$, що неможливо.

Лему доведено.

***Наслідок* 1.** *Скінченні DC_p-групи Шмідта вичерпуються групами першого і другого типів при додаткових умовах: $|Q| \leq q^2$ для типу 1; $|Q| = q$ для типу 2.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — скінченна DC_p-група Шмідта. Тоді вона є DC-групою одного з типів 1–3 леми 1. Покажемо, що G не може бути групою типу 3.

Нехай це не так. Тоді $G = P \leftthreetimes Q$, P — група кватерніонів, Q — неінваріантна циклічна силовська 3-підгрупа з G. Відомо, що $P = \langle x, y \rangle$, $x^4 = 1$, $y^2 = x^2$, $[x, y] = x^2$. За означенням DC_p-груп $G = \langle x \rangle \cdot Y$, $\langle x \rangle \cap Y = X$, $|X| \in \{1;\ 2\}$. Оскільки $\langle x \rangle$ не доповнюється в P, то $\langle x \rangle$ не доповнюється в G, отже, $|X| \neq 1$. Нехай $|X| = 2$, тоді $[G : Y] = 2$, звідки $Y \lhd G$ і G/Y — циклічна група $G' = P$, але тоді $x \in X$ і $|X| = 4$. Отже, G не може бути групою типу 3.

З того, що підгрупа Фраттіні DC_p-групи є одиничною або групою простого порядку, згідно з [3], випливає, що $|Q| \le q^2$ для групи G типу 1 і $|Q| = q$ для групи G типу 2.

Достатність очевидна.

Наслідок доведено.

Лема 2. *Скінченні мінімальні недисперсивні DC-групи, комутант яких містить хоча б одну примарну силовську підгрупу всієї групи, розкладаються в добуток $G = A \cdot D$ своїх інваріантної 2-підгрупи A і неінваріантної максимальної підгрупи $D = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$, де $|a| = 3^\alpha$, $|b| = 2^\beta$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $A \leftthreetimes \langle a \rangle$ — група Шмідта, і вичерпуються групами таких типів:*

1) $G = A \leftthreetimes D$, *A — елементарна абелева група порядку 4, $\beta = 1$, $A \leftthreetimes \langle b \rangle$ — група діедра;*

2) $G = A \leftthreetimes D$, *A — група кватерніонів, $\beta = 1$, $A \leftthreetimes \langle b \rangle$ — квазідіедральна група порядку 16;*

3) $G = A \cdot D$, *A — група кватерніонів, $\beta = 2$, $\Phi(A) = \Phi(\langle b \rangle) \subseteq Z(G)$, $A \cdot \langle b \rangle$ — узагальнена група кватерніонів.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — досліджувана група, тоді G — розв'язна особлива мінімальна недисперсивна група, яка, за результатами [1], розкладається в добуток $G = A \cdot D$, де A — нормальна p-підгрупа групи G непростого порядку, D — ненільпотентна максимальна підгрупа групи G, неінваріантна в G,

$$D = Q \leftthreetimes \langle b \rangle, \quad |Q| = q^\alpha, \quad a \ge 1, \quad |b| = p^\beta, \quad \beta \ge 1,$$

$$A \cap \langle b \rangle \subseteq \Phi(A), \quad \Phi(A) \cdot \Phi(\langle b \rangle) \subseteq Z(G), \quad A \cdot \langle b \rangle = P$$

— неабелева силовська p-підгрупа групи G, Q — силовська q-підгрупа групи G, $\exp(\Phi(A)) \le p$, $A / \Phi(A)$ — нециклічний мінімальний нормальний дільник групи $G / \Phi(A)$, $A \leftthreetimes Q$ — ненільпотентна підгрупа, $C_Q(A) \subseteq \Phi(Q)$.

Можливі такі випадки: 1) $\Phi(A) \cdot C_D(A) = 1$; 2) $\Phi(A) \cdot C_D(A) \ne 1$.

У першому випадку одержимо $G = A \leftthreetimes D$, A — нециклічна мінімальна нормальна підгрупа з G, D — група Шмідта. Покажемо, що підгрупа D ізоморфна групі S_3.

Якщо $p = 2$, то $\delta_2(q) = 1$. За лемою 1 D — група типу 1, тобто $|Q| = q$, $q \equiv 1 \pmod 2$, $q > p$. Оскільки $A \leftthreetimes Q$ — ненільпотентна група, то вона містить підгрупу Шмідта типу 2 леми 1. Отже, $q = 3$. В DC-групах нециклічна мінімальна нормальна підгрупа є елементарною абелевою групою порядку p^2 (p — просте число, відмінне від 3). Отже, A — елементарна абелева група, $|A| = p^2$, тоді $|A| = 4$. Покладемо $Q = \langle a \rangle$, тоді $|a| = 3$, $A \leftthreetimes \langle a \rangle \cong A_4$. Оскільки $A \leftthreetimes \langle b \rangle$ — неабелева силовська 2-підгрупа з G, то вона є групою Міллера – Морено, $b^{-1}ab = a^{-1}$. Група G ізоморфна групі S_4, тобто група G — типу 1.

За раніше згаданим $p \ne 3$. Нехай $p > 3$. За лемою 1 $p > q$. Але тоді в групі Шмідта D $q < p$, і група D може бути лише типу 2 або 3 згаданої леми. Тобто $q = 2$, $p = 3$, що неможливо.

Отже, у випадку 1 одержимо групу G типу 1.

Розглянемо другий випадок. Нехай $\Phi(A) \cdot C_D(A) = \Phi$. Тоді $\Phi \lhd G$, $\Phi \subseteq \subseteq \Phi(G)$. Фактор-група G / Φ задовольняє умову випадку 1, за яким

$$p = 2, \quad q = 3, \quad Q = \langle a \rangle, \quad |a| = 3^\alpha, \quad |b| = 2^\beta, \quad b^{-1}ab = a^{-1}, \quad A \leftthreetimes \langle a \rangle$$

— ненільпотентна група, тому вона містить підгрупу Шмідта, яка може бути типу 2 або 3 леми 1.

Скінченні DC-групи мають циклічну підгрупу Фраттіні, отже, силовська 2-підгрупа $A \cdot \langle b \rangle$ має циклічну підгрупу Фраттіні. З цього випливає, що $|\Phi(A)| \le 2$.

Нехай $\Phi(A) = 1$. Тоді $A \leftthreetimes \langle a \rangle$ — група Шмідта типу 2 леми 1. Підгрупа Фраттіні силовської 2-підгрупи Міллера – Морено $A \leftthreetimes \langle b \rangle$ співпадає з $[A, \langle b \rangle] \times \langle b^2 \rangle$ і є циклічною. Звідси $b^2 = 1$ і G — група типу 1.

Нехай $|\Phi(A)| = 2$. Група $A \leftthreetimes \langle a \rangle$ містить підгрупу Шмідта $S = P \leftthreetimes Q$, де P — нормальна силовська 2-підгрупа групи S.

Якщо припустити, що S — група типу 2 леми 1, то P — елементарна абелева група порядку 4, $Z(S) \bigcap P = 1$. Оскільки $\Phi(A) = Z(G)$, то $\Phi(A) \not\subset P$ і $A = \Phi(A) \times P$ — елементарна абелева група, що неможливо, оскільки $\Phi(A) \neq 1$.

Отже, S — група типу 3 леми 1. Тоді P — група кватерніонів, $C_{\langle a \rangle}(A) = \langle a^2 \rangle$, тому $S = A \leftthreetimes \langle a \rangle$. За попереднім $A \bigcap \langle b \rangle \subseteq \Phi(A)$, $|b| = 2^{\beta}$, $\beta \geq 1$, $b^{-1}ab = a^{-1}$. Зрозуміло, що $G/\Phi(A)$ — група типу 1. За попереднім

$$\left| \frac{\Phi(A) \cdot \langle b \rangle}{\Phi(A)} \right| = 2.$$

Якщо тепер $\beta = 1$, то силовська 2-підгрупа групи G має вигляд $A \leftthreetimes \langle b \rangle$, $|A \leftthreetimes \langle b \rangle| = 2^4$ і фактор-група $A \leftthreetimes \langle b \rangle / \Phi(A)$ є групою Міллера – Морено порядку 2^3. Звідси випливає $|[A, \langle a \rangle]| = 4$. Отже, група A містить елемент d такий, що $|[d, b]| = 4$, $[d, b] \in Q$. Позначимо $x = d \cdot b$, тоді $x^2 = (db)^2 = dbdb = d^2 \cdot [d, b] = [b, d]$, тобто $|x| = 8$. Отже, $A \leftthreetimes \langle b \rangle = \langle x \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$ — квазідіедральна група. Тоді G — група типу 2.

Нехай $\beta > 1$. Тоді $\langle b^2 \rangle = \Phi(A)$ і $\beta = 2$. Як і раніше, в групі A знайдеться елемент d такий, що $|[d, b]| = 4$. Позначимо $x = d \cdot b$, тоді $x^2 = dbdb = db^2d \cdot [d, b] = [d, b]$. Отже, $A \cdot \langle b \rangle = \langle x \rangle \cdot \langle b \rangle$, $b^{-1}xb = x^{-1}$ і силовська 2-підгрупа з G є узагальненою групою кватерніонів, тобто G — група типу 3.

Достатність. Нехай група G розкладається в добуток $G = A \cdot D$ своїх інваріантної 2-підгрупи A і неінваріантної максимальної підгрупи $D = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$, де $|a| = 3^{\alpha}$, $|b| = 2^{\beta}$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $A \leftthreetimes \langle a \rangle$ — група Шмідта, і є групою одного із типів леми 2. Згідно з [2] G є мінімальною недисперсивною групою, G' містить силовську 3-підгрупу $\langle a \rangle$ з G. Покажемо, що G є DC-групою.

Як і раніше, вважатимемо H власною нециклічною підгрупою групи G. Тоді H не може бути нільпотентною групою з циклічними силовськими підгрупами.

Можливі такі випадки: 1) H — нільпотентна група; 2) H — ненільпотентна група.

У першому випадку $H = P_1 \times Q_1$, де P_1 — силовська 2-підгрупа, Q_1 — силовська 3-підгрупа групи H. Оскільки силовські 3-підгрупи з G циклічні, то нециклічною буде підгрупа P_1. Не порушуючи загальності можна вважати, що P_1 міститься в $P = A \cdot \langle b \rangle$.

Якщо $P_1 = P$, то підгрупа P доповнюється в групі G підгрупою $\langle a \rangle$, отже, підгрупа H C-доповнюється в групі G підгрупою $\langle a \rangle$.

Якщо $P_1 \subset P$, то нехай $P_1 \subseteq A$. Оскільки P_1 — нециклічна група, то $P_1 = A$. Група G факторизується підгрупою A і нормалізатором будь-якої силовської 3-підгрупи з G. Оскільки нормалізатори всіх силовських 3-підгруп із G спряжені між собою, то можна серед них знайти такий, що містить Q_1. Не порушуючи загальності, можна вважати, що $Q_1 \subseteq D$. Для груп кожного з розглядуваних типів $A \bigcap \langle b \rangle = \langle b^2 \rangle$. Підгрупа $A \cdot \langle b^2 \rangle$ є циклічною. Отже, $G = H \cdot D$, $H \bigcap D = Q_1 \times \langle b^2 \rangle$ — циклічна група, тобто підгрупа H має в групі G C-доповнення.

Нехай $P_1 \not\subset A$. Оскільки $[P : A] = 2$, то $P = A \cdot P_1$, $A \not\subset P_1$ і $P_1 = A_1 \cdot \langle d \rangle$, де $A_1 = A \bigcap P_1$, $d \notin A_1$, $d^2 \in A_1$. Тоді $A_1 = \langle x \rangle$ і $\langle x \rangle \lhd P_1$. Для груп всіх трьох типів $[Q_1, A] = 1$. В розглянутому випадку $[P_1, Q_1] = 1$, а тому $[P, Q_1] = 1$. Це можливо лише коли $Q_1 = 1$. Зрозуміло, що група G факторизується підгрупами P_1 і $A \leftthreetimes \langle a \rangle$, перетин яких співпадає з $A_1 = \langle x \rangle$, тобто підгрупа H має в групі G C-доповнення.

Розглянемо випадок 2, тобто H — ненільпотентна група вигляду $H = P_1 \cdot Q_1$, де, не порушуючи загальності, можна вважати $P_1 = H \cap P$, $Q_1 = H \cap Q$, $|P_1| > 1$, $|Q_1| > 1$. Оскільки $H \neq G$, то H є дисперсивною. Можливі такі випадки: 2.1) $P_1 \lhd H$; 2.2) $Q_1 \lhd H$.

У випадку 2.1 $|P_1| > 2$, H містить підгрупу Шмідта $S = P_2 \leftthreetimes Q_2$, де P_2 — інваріантна силовська 2-підгрупа групи S, Q_2 — неінваріантна силовська 3-підгрупа групи S, $S' = P_2$. Неважко бачити, що $G' = A \leftthreetimes \langle a \rangle$, $\langle a^3 \rangle \subseteq Z(G')$, A — силовська 2-підгрупа групи G', що містить P_2. В групі Шмідта S при $p = 2$ підгрупа P_2 не може бути циклічною. Отже, $P_2 = A$, $Q_2 = \langle a \rangle$, група G факторизується підгрупами H і $\langle b \rangle$, причому $H \cap \langle b \rangle = \langle b^2 \rangle$, тобто підгрупа H має в групі G C-доповнення.

Розглянемо випадок 2.2. В цьому випадку $H = Q_1 \leftthreetimes P_1$. Оскільки підгрупа P_1 не інваріантна в H, то вона не може міститися в підгрупі A. Позначимо $F = A \leftthreetimes \langle a \rangle$. Як і раніше, $A \cap P_1 = A_1 = \langle x \rangle$, $[Q_1, A_1] = 1$, а тому $[A_1, \langle a \rangle] = 1$. Звідси випливає, що $H \cap F = Q_1 \times A_1$ — циклічна група і $H \cdot F = G$, тобто підгрупа H має в групі G C-доповнення.

Лему доведено.

Наслідок 2. *Скінченні мінімальні недисперсивні DC_p-групи, комутант яких містить хоча б одну силовську підгрупу всієї групи, вичерпуються групами тільки першого типу при додатковій умові* $\alpha = 1$.

Лема 3. *Скінченні мінімальні недисперсивні DC-групи з комутантом G', що не містить жодної силовської підгрупи всієї групи G, мають вигляд $G = S_1 \cdot S_2$, де S_1 — група Шмідта $i \in \{1, 2\}$, $[S_1, S_2] = 1$, $S_1 = A \leftthreetimes \langle a \rangle$, A — елементарна абелева група порядку 4 чи група кватерніонів, $|a| = 3^\alpha$, $\alpha > 0$; $S_2 = B \leftthreetimes \langle b \rangle$, $|B| = 3$, $|b| = 2^\beta$, $\beta \in \{1, 2\}$, і вичерпуються групами таких типів:*

1) $G = S_1 \times S_2$, A — *елементарна абелева група порядку* 4, $\beta = 1$;
2) $G = S_1 \times S_2$, A — *група кватерніонів*, $\beta = 1$;
3) $G = S_1 \cdot S_2$, A — *група кватерніонів*, $\beta = 2$, $\Phi(A) = \Phi(\langle b \rangle)$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — досліджувана група. Тоді G — скінченна розв'язна мінімальна недисперсивна група і G' не містить жодної силовської підгрупи з G. За результатами [2]

$$G = S_1 \cdot S_2 \cdot \ldots \cdot S_n, \quad n > 1,$$

де $S_i = A_i \leftthreetimes \langle b_{i-1} \rangle$ — нормальна в G підгрупа Шмідта, $A_i \cdot \langle b_i \rangle = P_i$ — силовська p_1-підгрупа групи G, при $i = 1$ $b_{i-1} = b_n$, при $i \neq j$ $[S_i, S_j] = 1$.

Не порушуючи загальності, вважатимемо, що p_1 — найменший простий дільник порядку групи G, тоді $S_1 = A_1 \leftthreetimes \langle b_n \rangle$, $p_1 < p_n$. З того, що група G є DC-групою, випливає, що всі підгрупи S_i, а отже, і S_1, є DC-групами Шмідта. За лемою 1 S_1 — група одного з типів 2, 3 цієї леми, тобто $p_1 = 2$, $p_n = 3$ і A_1 — елементарна абелева група порядку 4 чи група кватерніонів.

В DC-групі Шмідта S_n A_n — її силовська 3-підгрупа, яка може бути тільки групою типів 1, 2 леми 1, $p_n = 3$, отже, $|A_n| = 3$ і $p_{n-1} = 2 = p_1$. Звідси випливає, що $n = 2$ і $G = S_1 \cdot S_2$, де $[S_1, S_2] = 1$.

Введемо позначення: $A_1 = A$, $A_2 = B$, $b_1 = b$, $b_2 = a$. Тоді $S_1 = A \leftthreetimes \langle a \rangle$, $S_2 = B \leftthreetimes \langle b \rangle$, A — елементарна абелева група порядку 4 чи група кватерніонів, $|a| = 3^\alpha$, $\alpha > 0$, $|B| = 3$, $|b| = 2^\beta$, $\beta > 0$.

Оскільки в групі Шмідта S_2 $B \cap Z(S_2)=1$, а $[\langle a\rangle, S_2]=1$, то $\langle a\rangle \cap S_2 = 1$ і $P_2=\langle a\rangle \times B$. Зрозуміло, що $P_1=A\cdot\langle b\rangle$, $\langle b\rangle \subseteq Z(P_1)$.

Нехай $A\cap\langle b\rangle=1$, тоді $P_1=A\times\langle b\rangle$ і $G=S_1\times S_2$. Покажемо, що $|b|=2$.

Якщо A — група кватерніонів, то $\Phi(A)\times\Phi(\langle b\rangle)\subseteq\Phi(P_1)$, $\Phi(P_1)$ — циклічна група, отже, $\Phi(\langle b\rangle)=1$, тобто $|b|=2$. Тоді G — група типу 2 леми.

Якщо A — елементарна абелева група, то $A=\langle x\rangle\times\langle y\rangle$, $|x|=|y|=2$. Припустимо, що $|b|>2$, тоді підгрупа $\langle b^2\rangle$ містить елемент c такий, що $|c|=2$, $c\in Z(G)$. В групі G існує підгрупа $C=\langle x\rangle\times\langle c\rangle$ За означенням DC-груп підгрупа C має C-доповнення в групі G, тобто $G=C\cdot Y$ і $C\cap Y=X$ — циклічна група, отже, $|X|\in\{1,2\}$. Відомо, що в групі Шмідта S_1, яка є групою Міллера – Морено, підгрупа $\langle x\rangle$ не доповнюється, а тому підгрупа $\langle x\rangle$ не доповнюється і в групі G. Якщо припустити, що $X\subseteq\langle c\rangle$, то з умови $\langle c\rangle\subseteq Z(G)$ випливає $\langle c\rangle\cap Y=1$. В групі G знайдеться підгрупа $V=\langle c\rangle\cdot Y$, що доповнює підгрупу $\langle x\rangle$ в групі G, що неможливо. Отже, $|X|=2$ і $X\cap\langle c\rangle=1$. Але тоді $G=\langle c\rangle\times Y$, тобто підгрупа $\langle c\rangle$ доповнюється в групі G, а отже, вона доповнюється в підгрупі $\langle b\rangle$, що неможливо, оскільки $c\in\Phi(\langle b\rangle)$. Таким чином, $\Phi(\langle b\rangle)=1$, $|b|=2$. Тоді G — група типу 1.

Нехай далі $A\cap\langle b\rangle\neq 1$. Оскільки $\langle b\rangle\subseteq Z(S_1\cdot\langle b\rangle)$, то $A\cap\langle b\rangle\subseteq\Phi(A)$, де $\Phi(A)\neq 1$. Оскільки група Шмідта S_1 може бути тільки групою типів 1–3 леми 1, то A — група кватерніонів, $|b|=2^\beta$, $\beta>1$, $\Phi(A)=\langle b^{2^{\beta-1}}\rangle=\langle c\rangle$, $|c|=2$. Відомо, що $A=\langle x\rangle\cdot\langle y\rangle$, де $|x|=|y|=4$, $x^2=y^2=[x,y]$. Зрозуміло, що підгрупа $\langle b\rangle$ містить елемент z порядку 4, а підгрупа P_1 містить елемент $d=x\cdot z$, тоді $|d|=2$ і $A\cap\langle d\rangle=1$. Підгрупа P_1 містить підгрупу $U=\langle b^2\rangle\times\langle d\rangle$, $|U|=2^\beta$, яка C-доповнюється в групі G. Тобто $G=U\cdot V$ і $U\cap V=X$ — циклічна група, $|X|=2^\gamma$. Оскільки U — нециклічна група, то X — власна підгрупа з U і V — власна підгрупа з G, тому підгрупа V є дисперсивною.

Якщо $X\cap\langle b^2\rangle=1$, то підгрупа $\langle b^2\rangle$ доповнюється в групі G підгрупою V, а тому підгрупа $\langle b^2\rangle$ доповнюється в підгрупі $\langle b\rangle$, що неможливо. Отже, $X\cap\langle b^2\rangle\neq 1$.

Тоді $X\cap\langle d\rangle=1$ і $U=X\times\langle d\rangle$, $\gamma=\beta-1$. Не порушуючи загальності, вважатимемо, що $V=P\cdot C$, де C — силовська 2-підгрупа з V. Тоді $P_1=U\cdot C$, $U\cap C=X$. Зрозуміло, що $[G:V]=2$, тоді $|C|=2^{\beta+1}$, $V\lhd G$, $G'\subseteq V$, а тому $A\subseteq V$. Оскільки P — силовська 3-підгрупа з G, не інваріантна в групі G, то P — неінваріантна в підгрупі V і $V=C\leftthreetimes P$. Зрозуміло, що $P_1=C\leftthreetimes\langle d\rangle$. Оскільки $A\subseteq C\subset P_1$, а $P_1=A\ \langle d\rangle$, то $C=A\cdot\langle b^p\rangle$. Тоді $d=v\cdot b^j$, де $v\in A$ (j — ціле число). Тоді $d^2=v^2\cdot b^{2j}=1$, звідки з урахуванням умови $|b^{2j}|>1$ випливає $v^2=b^{2j}\neq 1$. Отже, $|v|=|b|=4$, тобто $\beta=2$. Тоді G — група типу 3.

Достатність. Нехай $G=S_1\cdot S_2$ — група одного з типів 1–3 леми, де $S_1==A\leftthreetimes\langle a\rangle$ — групи Шмідта, $S_2=B\leftthreetimes\langle b\rangle$ — група Міллера – Морено, A — елементарна абелева група порядку 4 або група кватерніонів. Групу G можна зобразити у вигляді $G=T\cdot D$, де $T=\langle a\rangle\times B$ — силовська 3-підгрупа групи G, $D=A\cdot\langle b\rangle$ — силовська 2-підгрупа групи G, $\langle b\rangle\subseteq Z(D)$. За результатами [1] $G=T\cdot D$ — біпримарна недисперсивна група, комутант G' якої не містить жодної силовської підгрупи групи G. Покажемо, що G є DC-групою.

Нехай H — довільна власна нециклічна підгрупа групи G. Не порушуючи загальності, вважатимемо, що $H=T_0\cdot D_0$, де $T_0=T\cap H$, $D_0=D\cap H$.

Якщо $T\subseteq H$, то підгрупа D_0 має C-доповнення V в групі D, тобто

$D_0 \cdot V = D$. Тоді $H \cdot V = (T_0 \cdot D_0) \cdot V = T_0 \cdot (D_0 \cdot V) = T \cdot D = G$, тобто підгрупа V є C-доповненням підгрупи H в групі G.

Отже, можна вважати, що T_0 не є силовською підгрупою групи G. Аналогічно і D_0 — власна підгрупа групи D. Тоді можливі такі випадки:

1) T_0 — циклічна група; 2) T_0 — нециклічна група.

У першому випадку, якщо $A \subseteq D_0$, то в групі G існує підгрупа $T \leftthreetimes \langle b \rangle$, що є C-доповненням підгрупи H в групі G. Якщо $A \not\subset D_0$, то в групі G існує підгрупа $A \leftthreetimes T$, яка є C-доповненням підгрупи H в групі G. Отже, в цьому випадку G є DC-групою.

У другому випадку підгрупа T_0 містить підгрупу $\langle a^{3^{\alpha-1}} \rangle \times B$. Підгрупа $\langle a \rangle$ є C-доповненням підгрупи T_0 в групі T. Нехай $A \not\subset D_0$ тоді підгрупа $A \leftthreetimes \langle a \rangle$ є C-доповненням підгрупи H в групі G. Таким чином, G є DC-групою.

Лему доведено.

***Наслідок* 3.** *Скінченні мінімальні недисперсивні DC_p-групи з комутантом, що не містить жодної силовської підгрупи всієї групи, вичерпуються групами тільки першого типу при додатковій умові* $\alpha = 1$.

Теорема 1. *Скінченні мінімальні недисперсивні DC-групи вичерпуються групами таких типів*:

1) $G = A \leftthreetimes (\langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle)$, *де* A — *елементарна абелева група порядку* 4, $|a| = 3^{\alpha}$, $|b| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $A \leftthreetimes \langle a \rangle$ — *група Шмідта*, $A \leftthreetimes \langle b \rangle$ — *група діедра*;

2) $G = A \leftthreetimes (\langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle)$, *де* A — *група кватерніонів*, $|a| = 3^{\alpha}$, $|b| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $A \leftthreetimes \langle a \rangle$ — *група Шмідта*, $A \leftthreetimes \langle b \rangle$ — *квазідіедральна група порядку* 16;

3) $G = A \cdot (\langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle)$, *де* A — *група кватерніонів*, $|a| = 3^{\alpha}$, $|b| = 4$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $A \leftthreetimes \langle a \rangle$ — *група Шмідта*, $A \cdot \langle b \rangle$ — *узагальнена група кватерніонів*, $\Phi(A) = \Phi(\langle b \rangle) \subseteq Z(G)$;

4) $G = (A \leftthreetimes \langle a \rangle) \times (B \leftthreetimes \langle b \rangle)$, *де* A — *елементарна абелева група порядку* 4, $|a| = 3^{\alpha}$, $|B| = 3$, $|b| = 2$, $A \leftthreetimes \langle a \rangle$, $B \leftthreetimes \langle b \rangle$ — *групи Шмідта*;

5) $G = (A \leftthreetimes \langle a \rangle) \times (B \leftthreetimes \langle b \rangle)$, *де* A — *група кватерніонів*, $|a| = 3^{\alpha}$, $|B| = 3$, $|b| = 2$, $A \leftthreetimes \langle a \rangle$, $B \leftthreetimes \langle b \rangle$ — *групи Шмідта*;

6) $G = (A \leftthreetimes \langle a \rangle) \cdot (B \leftthreetimes \langle b \rangle)$, *де* A — *група кватерніонів*, $|a| = 3^{\alpha}$, $|B| = 3$, $|b| = 4$, $A \leftthreetimes \langle a \rangle$, $B \leftthreetimes \langle b \rangle$ — *групи Шмідта*, $\Phi(A) = \Phi(\langle b \rangle)$.

***Наслідок* 4.** *Якщо порядок біпримарної DC-групи не ділиться на* 6, *то вона є дисперсивною.*

Теорема 2. *Скінченні мінімальні недисперсивні DC_p-групи вичерпуються групами таких типів*:

1) $G = A \leftthreetimes (\langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle)$, *де* A — *елементарна абелева група порядку* 4, $|a| = 3$, $|b| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $A \leftthreetimes \langle a \rangle$ — *група Шмідта*, $A \leftthreetimes \langle b \rangle$ — *група діедра*;

2) $G = (A \leftthreetimes \langle a \rangle) \times (B \leftthreetimes \langle b \rangle)$, *де* A — *елементарна абелева група порядку* 4, $|a| = 3$, $|B| = 3$, $|b| = 2$, $A \leftthreetimes \langle a \rangle$, $B \leftthreetimes \langle b \rangle$ — *групи Шмідта*;

***Наслідок* 5.** *Якщо порядок біпримарної DC_p-групи не ділиться на* 6, *то вона є дисперсивною.*

1. *Можаровская Л. С.* Конечные нильпотентные DC-группы // Некоторые вопросы теории групп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1975. – С. 141–159.
2. *Левищенко С. С., Кузенный Н. Ф.* Группы с условиями дисперсивности для подгрупп. – Киев: Киев. пед. ин-т, 1985. – 96 с.
3. *Верпатова Н. Ю.* Конструктивное описание конечных примарных групп с обобщенно дополняемыми подгруппами. – Киев, 1992. – 7 с. – Деп. в УкрИНТЭИ, № 1167.

Одержано 24.12.96