УДК 513. 88

М. И. Кадец (Харьк. акад. гор. хоз-ва)

ОБ АБСОЛЮТНОЙ, СОВЕРШЕННОЙ И БЕЗУСЛОВНОЙ СХОДИМОСТИ ДВОЙНЫХ РЯДОВ В ПРОСТРАНСТВАХ БАНАХА*

We prove that, in the case of double series, perfect and unconditional convergences coincide, while absolute and perfect convergences do not coincide even for numerical series.

Доведено, що у випадку подвійних рядів досконала та безумовна збіжності співпадають і абсолютна та досконала збіжності не співпадають навіть для числових рядів.

Цель настоящей статьи — распространить на двойные ряды некоторые понятия и, по возможности, результаты, связанные с перестановками (простых) рядов в пространствах Банаха. Для определенности будем рассматривать вещественные пространства.

Напомним, что ряд $\sum x_n$ в пространстве Банаха называется абсолютно сходящимся, если сходится числовой ряд $\sum \|x_n\|$. Ряд называется совершенно сходящимся, если для любого набора коэффициентов $\alpha_n = \pm 1$ (обозначение: $\alpha \in D$) сходится ряд $\sum \alpha_n x_n$. Ряд называется безусловно сходящимся, если для любой перестановки натурального ряда $\pi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ сходится переставленный ряд $\sum x_{\pi(n)}$. Понятия совершенной и безусловной сходимости эквивалентны. Каждый абсолютно сходящийся ряд сходится совершенно. Обратное верно в том и только в том случае, когда пространство конечномерно. Развернутое изложение теории перестановок рядов в пространствах Банаха дано в монографии [1].

Перейдем к рассмотрению двойных рядов. Прежде всего примем следующее определение сходимости двойного ряда, несколько усиливающее общепринятое определение сходимости по Принсгейму.

Определение 1. *Двойной ряд* $\sum x_{ij}$ *в банаховом пространстве* X *сходится к сумме* S, *если:* a) *сходится последовательность „прямоугольных" частных сумм:*

$$S = \lim_{m,n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}; \tag{1}$$

b) *сходится каждый „ряд-строка"* $\sum_j x_{ij}$ *и* c) *сходится каждый „ряд-столбец"* $\sum_i x_{ij}$.

Понятия абсолютной, совершенной и безусловной сходимости, согласованные со структурой двойного ряда, можно ввести следующим образом.

Определение 2. *Ряд* $\sum x_{ij}$ *называется абсолютно сходящимся, если сходится числовой ряд* $\sum \|x_{ij}\|$.

Определение 3. *Ряд называется совершенно сходящимся, если для любых наборов коэффициентов* $\alpha, \beta \in D$ *сходится ряд* $\sum \alpha_i \beta_j x_{ij}$.

Определение 4. *Ряд называется безусловно сходящимся, если для любых перестановок натурального ряда* π *и* σ *сходится ряд* $\sum x_{\pi(i), \sigma(j)}$.

Покажем, что в случае совершенной сходимости условия b) и c) в определении 1 следуют из условия a).

---

* Выполнена при частичной поддержке Международного научного фонда (грант № U9H000).

Предложение 1. *Пусть двойной ряд* $\sum x_{ij}$ *таков, что для любого набора коэффициентов* $\alpha, \beta \in D$ *последовательность прямоугольных частных сумм оказывается сходящейся:*

$$S(\alpha, \beta) = \lim S_{m,n}(\alpha, \beta) = \lim_{m,n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}. \tag{1a}$$

Тогда совершенно сходится каждый ряд-столбец и каждый ряд-строка.

Доказательство. Пусть α и β — произвольные наборы коэффициентов. Образуем новый набор $\alpha' = \{\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3, \ldots\}$. Тогда полусумма рядов $\sum \alpha_i \beta_j x_{ij}$ и $\sum \alpha'_i \beta_j x_{ij}$ будет сходящимся простым рядом $\sum_j x_{1j} \beta_j$. В силу произвольности $\beta \in D$ ряд-строка $\sum_j x_{1j} \beta_j$ сходится совершенно. Аналогично устанавливается совершенная сходимость остальных рядов-строк и всех рядов-столбцов.

Таким образом, при рассмотрении совершенной сходимости можно ограничиться сходимостью по Принсгейму. Как будет видно из дальнейшего, для безусловно сходящихся рядов определение 1 оказывается более естественным.

Сформулируем основные результаты статьи.

Теорема 1. *Для двойного ряда* $\sum x_{ij}$ *в пространстве Банаха* X *следующие утверждения эквивалентны:* A) *ряд сходится совершенно:* B) *векторнозначная матрица* $A = (x_{ij})$ *порождает линейный компактный оператор* A, *отображающий банахово пространство* c_0 *в банахово пространство* $\operatorname{Perf}(X)$ *всех совершенно сходящихся простых рядов и действующий по формуле*

$$A e_j = \bar{x}_j = \{x_{ij}\}_{i=1}^{\infty}, \quad j \in \mathbb{N},$$

где (e_j) — *канонический базис пространства* c_0.

Теорема 2. *Каждый абсолютно сходящийся двойной ряд сходится совершенно. Обратное неверно даже для числовых рядов: существует числовой двойной совершенно сходящийся ряд* $\sum a_{ij}$, *не являющийся абсолютно сходящимся.*

Теорема 3. *Двойной ряд сходится безусловно в том и только в том случае, когда он сходится совершенно.*

Введем некоторые понятия и рассмотрим некоторые вспомогательные утверждения.

Для простых совершенно сходящихся рядов справедлива следующая теорема.

Теорема Гельфанда [1, с. 9]. *Если ряд* $\sum x_n$ *совершенно сходится, то ряд* $\sum \alpha_n x_n$ *сходится равномерно на* D, *т. е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall m > n, \quad \forall \alpha \in D \quad \left\| \sum_m \alpha_i x_i \right\| < \varepsilon.$$

При этом множество сумм $S(\alpha) = \sum \alpha_n x_n$ *оказывается компактом в* X. *Обратное утверждение также верно.*

Пространство $\operatorname{Perf}(X)$. Банахово пространство $\operatorname{Perf}(X)$ всех совершенно сходящихся рядов в X определяется как линейное пространство всех таких последовательностей $\bar{x} = \{x_n\}_1^{\infty} \subset X$, которые порождают совершенно сходящиеся ряды, с покоординатным сложением и умножением на скаляры, наделенное нормой

$$\| \bar{x} \| = \| \{x_n\}_1^{\infty} \| = \sup \{ \| S(\alpha) \| : \alpha \in D \}.$$

Теореме Гельфанда можно придать теперь следующую эквивалентную форму.

Предложение 2. *Ряд* $\sum x_n$ *сходится совершенно в том и только в том случае, когда линейный оператор* $A: c_0 \to X$, *определенный формулой* $A e_j = x_j$, $j \in \mathbb{N}$, *компактен. Иначе говоря, для любого банахова пространства* X *будет* $\operatorname{Perf}(X) = K(c_0, X)$, *где* $K(c_0, X)$ *— банахово пространство всех компактных операторов.*

Отметим, что пространство $\operatorname{Perf}(X)$ может быть также представлено в виде тензорного произведения [2, с. 148]

$$\operatorname{Perf}(X) = K(c_0, X) = l_1 \otimes_\varepsilon X.$$

Приведем еще два вспомогательных утверждения.

Лемма 1 (Калтон [3]). *Пространство* $\operatorname{Perf}(X)$ *содержит подпространство, изоморфное* c_0, *в том и только в том случае, когда* X *содержит такое подпространство.*

Лемма 2. *Если банахово пространство* Y *не содержит подпространств, изоморфных* c_0, *то каждый ограниченный линейный оператор* $A: c_0 \to Y$ *компактен.*

Доказательство. Так как c_0 изоморфно пространству всех непрерывных функций на одноточечной компактификации натурального ряда, а Y не содержит c_0, то согласно теореме Пелчиньского [4] оператор A слабо компактен. Поскольку пространство c_0 не содержит подпространств, изоморфных l_1, то согласно теореме Розенталя [5] каждая ограниченная последовательность в нем содержит слабо фундаментальную подпоследовательность. Согласно теореме 4 из [6, с. 532] каждый слабо компактный оператор, действующий из c_0 в любое банахово пространство, переводит слабо фундаментальные последовательности в сильно сходящиеся. На основании изложенного получаем, что оператор A отображает единичный шар c_0 в сильно компактное подмножество пространства Y. Лемма доказана.

Компакт D^2. Множество всех пар последовательностей „знаков" $\alpha = (\alpha_i)$, фигурирующих в определении совершенной сходимости, оказывается метризуемым компактом, если фундаментальную систему окрестностей каждой точки определить как

$$O_{mn}(\alpha^0, \beta^0) = \{(\alpha, \beta) \in D^2 \colon \alpha_i = \alpha_i^0,\ \beta_j = \beta_j^0 \text{ при } 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n\}.$$

Теперь каждому совершенно сходящемуся ряду $\sum x_{ij}$ можно сопоставить функцию $S(\alpha, \beta) = \sum \alpha_i \beta_j x_{ij}$ на компакте D^2, принимающую значения в X. Каждая частная сумма $S_{mn}(\alpha, \beta)$ из (1a) является при этом непрерывной функцией. Введенные функции будут использованы при доказательстве предложения 3.

Функционал $M(A)$. Для матрицы $A_{mn} = (x_{ij})$ размера $m \times n$, составленной из элементов банахова пространства X, определим функционал

$$M(A_{mn}) = \sup\left\{\left\|\sum \alpha_i \beta_j x_{ij}\right\| \colon \alpha_i, \beta_j = \pm 1\right\}.$$

Для бесконечной матрицы $A_{mn} = (x_{ij})$, составленной из членов совершенно сходящегося ряда $\sum x_{ij}$, значение функционала $M(A)$ можно определить путем предельного перехода:

$$M(A) = \lim_{m,n \to \infty} M(A_{mn}) = \sup\left\{\left\|\sum \alpha_i \beta_j x_{ij}\right\| \colon (\alpha, \beta) \in D^2\right\}.$$

Ниже (при доказательстве предложения 3) будет показано, что $M(A) < \infty$ для любой матрицы A, порожденной совершенно сходящимся рядом.

Лемма 3. *Функционал $M(A)$ — норма на пространстве всех двойных совершенно сходящихся рядов. Если из матрицы A удалить какую-нибудь строку или столбец (т. е. положить соответствующие ее элементы равными нулю), то значение функционала не увеличится. Если в матрице A выделить некоторую подматрицу B, то $M(A-B) \leq 2M(A)$.*

Доказательство. То, что $M(A)$ — норма, проверяется непосредственно. Ниже (при доказательстве теоремы 1) будет установлено, что пространство всех двойных совершенно сходящихся рядов полно относительно нормы $M(A)$. Удаление из матрицы A строки (или столбца) можно осуществить, вычисляя полусумму матрицы A и матрицы A', полученной из A умножением элементов этой строки (или столбца) на -1. Так как $M(A) = M(A')$, то $M((A + A')/2) \leq M(A)$. Каждая подматрица B получается из матрицы A путем вычеркивания тех строк и столбцов, которые не участвуют в образовании матрицы B. Поэтому $M(B) \leq M(A)$ и, значит, $M(A-B) \leq M(A) + M(B) \leq 2M(A)$.

Докажем утверждение, распространяющее теорему Гельфанда на двойные ряды.

Предложение 3. *Если ряд $\sum x_{ij}$ сходится совершенно, то множество сумм рядов $\sum \alpha_i \beta_j x_{ij}$, $(\alpha, \beta) \in D^2$ есть компакт в X.*

Доказательство. Из определения 3 следует, что последовательность непрерывных функций (частных сумм) $S_{mn}(\alpha, \beta)$ поточечно сходится на компакте D^2 к функции $S(\alpha, \beta)$. Значит, $S(\alpha, \beta)$ — функция первого класса Бэра и, следовательно, имеет точку непрерывности $(\alpha^0, \beta^0) \in D^2$. Задавшись $\varepsilon > 0$, определим индексы m и n так, чтобы функция $S(\alpha, \beta)$ мало изменялась в пределах окрестности $O_{mn}(\alpha^0, \beta^0)$:

$$\| S(\alpha, \beta) - S(\alpha^0, \beta^0) \| < \varepsilon/8 \quad \forall (\alpha, \beta) \in O_{mn}(\alpha^0, \beta^0) \tag{2}$$

и достаточно хорошо приближалась соответствующей частной суммой в точке (α^0, β^0):

$$\| S(\alpha^0, \beta^0) - S_{mn}(\alpha^0, \beta^0) \| < \varepsilon/8. \tag{3}$$

Зафиксируем точку $(\alpha, \beta) \in O_{mn}(\alpha^0, \beta^0)$ и образуем еще одну точку $(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$, изменив знаки координат α_i при $i > m$ и β_j при $j > n$ и оставив остальные знаки без изменения; ясно, что $(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) \in O_{mn}(\alpha^0, \beta^0)$. Рассмотрим элемент x, определенный равенством

$$x = S(\alpha^0, \beta^0) - [S(\alpha, \beta) + S(\overline{\alpha}, \overline{\beta})]/2,$$

что эквивалентно следующему:

$$x = [S(\alpha^0, \beta^0) - S_{mn}(\alpha^0, \beta^0)] + \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} \alpha_i \beta_j x_{ij}.$$

Из условий (2) и (3) получаем, что $\| x \| < \varepsilon/8$ и

$$\left\| \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} \alpha_i \beta_j x_{ij} \right\| < \varepsilon/4, \tag{4}$$

где в соответствии с определением окрестности O_{mn} коэффициенты α_i и β_j произвольны: $(\alpha, \beta) \in D^2$. Согласно условиям b) и c) определения 1 совершенно сходятся каждый ряд-строка и каждый ряд-столбец. Значит, согласно теореме Гельфанда

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \forall\, m \in \mathbb{N} \quad \exists\, q \in \mathbb{N} \quad \forall\, (\alpha, \beta) \in D^2 : \left\| \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=q+1}^{\infty} \alpha_i \beta_j x_{ij} \right\| < \varepsilon/8, \quad (5)$$

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, p \in \mathbb{N} \quad \forall\, (\alpha, \beta) \in D^2 : \left\| \sum_{i=p+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j x_{ij} \right\| < \varepsilon/8. \quad (6)$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $p > m$ и $q > n$. Сложив неравенства (4), (5) и (6), получим

$$\sup_{\alpha, \beta} \left\| \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=q+1}^{\infty} + \sum_{i=p+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} + \sum_{i=p+1}^{\infty} \sum_{j=q+1}^{\infty} \right) \alpha_i \beta_j x_{ij} \right\| \le \varepsilon,$$

или

$$\sup_{\alpha, \beta} \| S(\alpha, \beta) - S_{pq}(\alpha, \beta) \| \le \varepsilon. \quad (7)$$

Итак, мы видим, что последовательность непрерывных функций $S_{pq}(\alpha, \beta)$ сходится к $S(\alpha, \beta)$ равномерно на D^2. Значит, функция $S_{pq}(\alpha, \beta)$ непрерывна на компакте D^2 и, следовательно, множество ее значений — компакт в X.

Перейдем к доказательству основных результатов статьи.

***Доказательство теоремы* 1.** Докажем импликацию $(A) \Rightarrow (B)$. Норма произвольного линейного оператора $A : c_0 \to Y$ может быть вычислена по формуле

$$\| A \| = \sup_{\beta} \left\| \sum \beta_j A e_j \right\|,$$

где верхняя грань берется по всевозможным наборам коэффициентов $\beta_j = \pm 1$. Распространим наш оператор A, заданный пока лишь на ортах e_j, на линейные комбинации ортов вычислим его норму:

$$\| A \| = \sup_{\beta} \left\| \sum \beta_j A e_j \right\| = \sup \left\{ \left\| \sum \alpha_i \beta_j x_{ij} \right\| : \alpha \in D, \ \beta_j = \pm 1 \right\}.$$

Распространив верхнюю грань на все $\beta \in D$, получим оценку $\| A \| \le M(A)$. (Ниже мы увидим, что $\| A \| = M(A)$.) Докажем теперь компактность оператора A. Рассмотрим конечномерные операторы $A_{mn} : c_0 \to \operatorname{Perf}(X)$, определенные формулами

$$A_{mn} e_j = \{ x_{ij} \}_{i=1}^{m} \text{ при } 1 \le j \le n,$$

$$A_{mn} e_j = 0 \text{ при } j > n.$$

Покажем, что эти операторы аппроксимируют A с любой степенью точности, откуда будет следовать его компактность. Имеем

$$\| A - A_{mn} \| \le M(A - A_{mn}) = \sup_{\alpha, \beta} \| S(\alpha, \beta) - S_{mn}(\alpha, \beta) \|,$$

а последнее выражение стремится к нулю при $m, n \to \infty$ согласно (7). В силу доказанной компактности оператора A можно доопределить его на пространство $l_\infty = (c_0)^{**}$ с сохранением области значений: $A^{**} : l_\infty \to \operatorname{Perf}(X)$. Отсюда получаем, что в действительности $\| A \| = M(A)$.

Докажем импликацию $(B) \Rightarrow (A)$. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ образуем множество $C_m \subset c_0$, положив

$$C_m = \{\gamma = (\gamma_i) \in c_0 : \gamma_i = 0 \text{ при } 1 \le i \le m,$$

$$\gamma_i = \pm 1 \text{ для } m < i \le m_1 \text{ с произвольным } m_1,\ \gamma_i = 0 \text{ при } i > m_1\}.$$

Ясно, что любая последовательность „представителей" $\gamma^{(m)} \in C_m$ слабо сходится к нулю при $m \to \infty$. Так как оператор A компактен, то последовательность образов $A\gamma^{(m)}$ сильно сходится к нулю. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое m, что множество AC_m (и все множества AC_k при $k > m$) попадают в $\varepsilon/2$-окрестность нуля в $\mathrm{Perf}(X)$; то же относится и к слабому* замыканию $\overline{C}_m$ множества C_m в l_∞:

$$\sup\{\|A\gamma\| : \gamma \in C_m\} = \sup_{\alpha, \beta} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \sum_{i=m+1}^{\infty} \alpha_i x_{ij} \right\| < \varepsilon/2.$$

Это означает, в частности, что, удаляя из матрицы A все строки, начиная с номера $i = m + 1$, получаем матрицу

$$A_m = \{ x_{ij}^{(m)} = x_{ij} \text{ при } 1 \le j \le m, \quad x_{ij}^{(m)} = 0 \text{ при } i > m;\ j \in \mathbb{N} \},$$

мало отличающуюся от исходной матрицы: $\|A - A_m\| < \varepsilon/2$. Если теперь к конечному числу ненулевых рядов-строк применить теорему Гельфанда, то при соответствующем выборе n получим конечную матрицу

$$A_{mn} = \{ x_{ij}^{(mn)} = x_{ij} \text{ при } 1 \le i \le m,$$

$$1 \le j \le m, \quad x_{ij}^{(mn)} = 0 \text{ — в противном случае} \},$$

мало отличающуюся от матрицы A:

$$\|A - A_{mn}\| < \varepsilon/2. \tag{8}$$

Иначе говоря, двойные ряды $\sum \alpha_i \beta_j x_{ij}$ сходятся по некоторой возрастающей последовательности прямоугольных частных сумм равномерно относительно $(\alpha, \beta) \in D^2$. Покажем, наконец, что ряд $\sum x_{ij}$ совершенно сходится. Для данного $\varepsilon > 0$ возьмем m и n такие, чтобы выполнялось неравенство (8). Пусть теперь $p > m$ и $q > n$ произвольны. Матрица $A - A_{pq}$ получается из матрицы $A - A_{mn}$ путем удаления подматрицы $A_{pq} - A_{mn}$. Согласно лемме 4 имеем

$$\|A - A_{pq}\| < \varepsilon$$

для всех $p > m$ и $q > n$. В соответствии с предложением 1 ряд $\sum x_{ij}$ сходится совершенно. Импликация $(B) \Rightarrow (A)$ доказана.

***Следствие* 1.** *Если банахово пространство X не содержит подпространств, изоморфных c_0 (в частности, если $X = \mathbb{R}$), то достаточным условием совершенной сходимости ряда $\sum x_{ij}$ в X является ограниченность оператора $A : c_0 \to \mathrm{Perf}(X)$, определенного в условии теоремы* 1.

Доказательство. Согласно лемме 1 пространство $\mathrm{Perf}(X)$ не содержит подпространств, изоморфных c_0. Согласно лемме 2 каждый ограниченный оператор $A: c_0 \to \mathrm{Perf}(X)$ компактен. Остается воспользоваться импликацией $(B) \Rightarrow (A)$ из теоремы 1.

***Доказательство теоремы* 2.** Первая часть теоремы очевидна: абсолютная сходимость ряда влечет „любую" его сходимость. Вторую часть докажем, построив соответствующий пример. Напомним, что матрицей Уолша W_n, $n \in \mathbb{N}$, называется ортогональная матрица порядка $m = 2^n$, все элементы которой равны ± 1. Последовательность матриц Уолша можно определить по индукции:

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad W_2 = \begin{pmatrix} W_1 & W_1 \\ W_1 & -W_1 \end{pmatrix}, \quad W_2 = \begin{pmatrix} W_2 & W_2 \\ W_2 & -W_2 \end{pmatrix}, \ldots .$$

Сумма модулей элементов матрицы Уолша равна $N(W_n) = m^2$. Оценим сверху значения функционала $M(W_n)$:

$$M(W_n) = \max\left\{\sum \alpha_i \beta_j w_{ij} : \alpha, \beta \in D\right\} = \max_{\beta} \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{j=1}^{m} \beta_j w_{ij} \right|.$$

К последнему выражению применим неравенство Коши:

$$M(W_n) \le \max_{\beta} \sqrt{m} \left(\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} \beta_j w_{ij} \right)^2 \right)^{1/2} = \sqrt{m} \max_{\beta} \left(\sum_{i,j,k} \beta_j \beta_k w_{ij} w_{ik} \right)^{1/2}.$$

Воспользуемся ортогональностью матрицы Уолша:

$$M(W_n) \le \sqrt{m} \max_{\beta} \left(\sum_{j,k} \beta_j \beta_k \left(\sum_{i} w_{ij} w_{ik} \right) \right)^{1/2} = \sqrt{m} \left(\sum_{i,j} w_{ij}^2 \right)^{1/2} = m^{3/2}.$$

Введем теперь матрицы $A_n = 2^{-2n} W_n$. Ясно, что

$$N(A_n) = 1, \quad M(A_n) \le 2^{-n/2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Образуем бесконечную матрицу $A = (a_{ij})$, поставив на ее диагонали матрицы A_n и положив все остальные элементы равными нулю. Так как $M(A) \le \sqrt{2} + 1$, то согласно следствию 1 двойной ряд $\sum a_{ij}$ сходится совершенно. Он не является абсолютно сходящимся, так как $N(A) = \infty$.

***Доказательство теоремы* 3.** Пусть ряд $\sum x_{ij}$ сходится совершенно. Наряду с компактным оператором $A: c_0 \to \mathrm{Perf}(X)$, порожденным рядом $\sum x_{ij}$, введем для произвольной перестановки натурального ряда σ оператор $S: c_0 \to \to c_0$, переставляющий орты пространства: $Se_j = e_{\sigma(j)}$, а для перестановки π — оператор P, переставляющий „координаты" каждого элемента $\bar{x} = \{x_i\}_1^\infty$: $P\bar{x} = \left\{x_{\pi(i)}\right\}_1^\infty$. Ясно, что S и P — сюръективные изометрии соответствующих пространств. Тогда оператор $PAS: c_0 \to \mathrm{Perf}(X)$ также компактен и, значит, переставленный ряд $\sum x_{\pi(i),\sigma(j)}$ (совершенно) сходится. В силу произвольности перестановок π и σ ряд $\sum x_{ij}$ сходится безусловно. Перейдем к доказательству обратного утверждения. Допустим, что ряд $\sum x_{ij}$ не является совершенно сходящимся. Если при этом окажется не совершенно сходящимся какой-нибудь ряд-столбец или ряд-строка, то в силу совпадения совершенной и безусловной сходимости простых рядов ряд $\sum x_{ij}$ не будет и безусловно сходящимся. Допустим теперь, что ряд не является совершенно сходящимся, но каждый его ряд-столбец и ряд-строка совершенно сходятся. Благодаря такому допущению мы можем определить оператор A, по крайней мере, на линейной оболочке ортов пространства c_0. Рассмотрим ряд в $\operatorname{Perf}(X)$, составленный из образов ортов c_0: $\sum A e_j = \sum \bar{x}_j$. Допустим, что он сходится совершенно. Тогда по теореме Гельфанда суммы рядов $\sum \beta_j \bar{x}_j$, $\beta \in D$, образуют компакт. Так как образ единичного шара пространства c_0 оказывается подмножеством замкнутой выпуклой оболочки указанного компакта, то A — компактный оператор и, значит, ряд $\sum x_{ij}$ совершенно сходящийся. Противоречие. Итак, ряд $\sum \bar{x}_j$ не является совершенно сходящимся. Значит, он и не безусловно сходящийся. Значит, существует расходящаяся его перестановка. Сохраним за этой перестановкой и за соответствующей перестановкой двойного ряда прежние обозначения: $\sum \bar{x}_j$ и $\sum x_{ij}$. Поскольку ряд $\sum \bar{x}_j$ расходится, то найдется последовательность его отрезков

$$\bar{y}_k = \sum_{j=p_k}^{q_k} x_j, \quad 1 \le p_1 < q_1 < p_2 < q_2 < \ldots,$$

ограниченная снизу по норме положительным числом a:

$$\| \bar{y}_k \| = \sup_{\alpha,\beta} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=p_k}^{q_k} \alpha_i \beta_j x_{ij} \right\| \ge a. \tag{9}$$

Проведем следующий индуктивный процесс. *Первый шаг.* Воспользовавшись тем, что все ряды-столбцы совершенно сходятся, найдем для первой пары индексов (p_1, q_1) такое m_1, что

$$\sup_{\alpha,\beta} \left\| \sum_{i=m_1+1}^{\infty} \sum_{j=p_1}^{q_1} \alpha_i \beta_j x_{ij} \right\| < a/3.$$

Сопоставляя полученное неравенство с неравенством (9), получаем

$$\sup_{\alpha,\beta} \left\| \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=p_1}^{q_1} \alpha_i \beta_j x_{ij} \right\| > 2a/3 > a/3. \tag{10_1}$$

Второй шаг. В последовательности пар индексов (p_k, q_k) выберем такую пару (для упрощения выкладок обозначим ее (p_2, q_2)), что $p_2 > q_1$ и

$$\sup_{\alpha,\beta} \left\| \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=p_2}^{q_2} \alpha_i \beta_j x_{ij} \right\| < a/3.$$

Воспользовавшись тем, что все ряды-строки совершенно сходятся, определим индекс $m_2 > m_1$ так, чтобы

$$\sup_{\alpha,\beta} \left\| \sum_{i=m_2+1}^{\infty} \sum_{j=p_2}^{q_2} \alpha_i \beta_j x_{ij} \right\| < a/3.$$

Сопоставляя полученные неравенства с неравенством (9), имеем

$$\sup_{\alpha,\beta} \left\| \sum_{i=m_1+1}^{m_2} \sum_{j=p_2}^{q_2} \alpha_i \beta_j x_{ij} \right\| > a/3. \tag{10_2}$$

Третий шаг. В последовательности пар индексов (p_k, q_k) выберем такую пару (для упрощения выкладок обозначим ее (p_3, q_3)), что $p_3 > q_2$ и

$$\sup_{\alpha,\beta} \left\| \sum_{i=1}^{m_2} \sum_{j=p_3}^{q_3} \alpha_i \beta_j x_{ij} \right\| < a/3.$$

Определим индекс $m_3 > m_2$ так, чтобы

$$\sup_{\alpha,\beta} \left\| \sum_{i=m_3+1}^{\infty} \sum_{j=p_3}^{q_3} \alpha_i \beta_j x_{ij} \right\| < a/3.$$

Сопоставляя полученные неравенства с неравенством (9), имеем

$$\sup_{\alpha,\beta} \left\| \sum_{i=m_2+1}^{m_3} \sum_{j=p_3}^{q_3} \alpha_i \beta_j x_{ij} \right\| > a/3. \tag{10_3}$$

Продолжая этот процесс неограниченно (используя каждый раз совершенную сходимость рядов-строк и рядов-столбцов), получаем дизъюнктную последовательность матриц

$$B_k = \{x_{ij} \text{ при } m_{k-1} < i \le m_k \text{ и } p_k \le j \le q_k;$$

$$0 \text{ для всех остальных пар индексов } (i, j)\},$$

нормы которых допускают равномерную оценку снизу:

$$\| B_k \| > a/3.$$

Зафиксируем теперь знаки $(\alpha^0, \beta^0) \in D^2$, которые реализуют нормы матриц B_k:

$$\| B_k \| = \sup_{\alpha,\beta} \left\| \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \sum_{j=p_k}^{q_k} \alpha_i^0 \beta_j^0 x_{ij} \right\| > a/3$$

и приступим к построению расходящейся перестановки ряда $\sum x_{ij}$. Каждое множество

$$H_k = \{m_{k-1} < i \le m_k,\ p_k \le j \le q_k\}$$

пар индексов (i, j) можно представить в виде объединения четырех подмножеств

$$H_k = H_k(+,+) \cup H_k(+,-) \cup H_k(-,+) \cup H_k(-,-)$$

в соответствии со значением кэффициентов α_i^0 и β_j^0. Тогда сумма $\sum_{i,j} \alpha_i^0 \beta_j^0 x_{ij}$ при $(i, j) \in H_k$ также представится в виде суммы четырех слагаемых, одно из которых (обозначим его $H_k(\gamma_k, \delta_k)$) будет по норме не меньше, чем четверть нормы общей суммы:

$$\left\{ \left\| \sum_{i,j} \alpha_i^0 \beta_j^0 x_{ij} \right\| \text{ при } (i, j) \in H_k(\gamma_k, \delta_k) \right\} > a/12.$$

Образуем, наконец, расходящуюся перестановку ряда $\sum x_{ij}$. Для этого индексы i в каждом отрезке $m_{k-1} < i \le m_k$ переставим так, чтобы на первом месте оказались индексы из $H_k(\gamma_k, \delta_k)$; аналогично поступим с индексом j. Индексы, не попавшие во множества H_k, оставим на месте. Полученные „блочные" перестановки натурального ряда обозначим соответственно π и σ. В переставленном ряде $\sum x_{\pi(i),\sigma(j)}$, который для упрощения обозначений мы запишем как $\sum x_{ij}^*$, образовалась последовательность прямоугольных сумм

$$S^{(k)} = \sum x_{ij}^* \text{ при } m_{k-1} < i \le r_k \le m_k \text{ и } p_k \le j \le s_k \le q_k,$$

нормы которых, как уже было отмечено, оцениваются снизу числом $a/12$. Каждую сумму $S^{(k)}$ можно выразить через прямоугольные частные суммы переставленного ряда следующим образом:

$$S^{(k)} = \left[S_{r_k s_k} - S_{r_k p_k}\right] - \left[S_{m_{k-1} s_k} - S_{m_{k-1} p_k}\right].$$

Значит, одна из разностей частных сумм оценивается снизу по норме числом $a/24$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Отсюда следует расходимость переставленного ряда. Теорема 3 доказана.

1. *Kadets V. M., Kadets M. I.* Rearrangements of series in Banach spaces // Trans. Math. Monographs. – 1991. – **86**.
2. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. – М.: Мир, 1971.
3. *Kalton N. J.* Spaces of compact operators // Math. Ann. – 1974. – **208**. – P. 267–278.
4. *Pelczynski A.* Projections in certain Banach spaces // Stud. math. – 1960. – **19**. – P. 209–228.
5. *Rosenthal H. P.* A characterization of Banach spaces containing l_1 // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1974. – **71**.– P. 2411–2413.
6. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

Получено 30.10.95