УДК 517.9

Т. А. Мельник (Одес. ун-т)

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ КОШИ

We construct an iterative method for solving the Cauchy problems for systems of singularly perturbed equations with fast time.

Побудовано ітераційний метод розв'язання задач Коші для систем сингулярно збурених рівнянь, що мають швидкий час.

Для приближенного решения систем сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений вида

$$\varepsilon\frac{dz}{d\tau} = F(z, y, \tau), \qquad \frac{dy}{d\tau} = f(z, y, \tau)$$

был предложен итерационный метод [1], модификация [2] которого была применена к линейным сингулярно возмущенным задачам управления.

В данной работе предложен итерационный метод приближенного решения задач Коши для систем сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, содержащих быстрое время, асимптотика которых была построена в [3].

1. Постановка задачи. Рассмотрим сингулярно возмущенную задачу Коши, содержащую быстрое время, вида

$$\varepsilon\frac{dz}{d\tau} = F(z, y, \tau/\varepsilon, \tau), \qquad \frac{dy}{d\tau} = f(z, y, \tau/\varepsilon, \tau), \tag{1}$$
$$z(0, \varepsilon) = z^0, \qquad y(0, \varepsilon) = y^0,$$

где $\tau \in [0, L]$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $z \in R^{m_1}$, $y \in R^{m_2}$. Заменой переменной $t = \tau/\varepsilon$ задача сводится к задаче

$$\frac{dz}{dt} = F(z, y, t, \varepsilon t), \qquad \frac{dy}{dt} = \varepsilon f(z, y, t, \varepsilon t), \tag{2}$$
$$z(0, \varepsilon) = z^0, \qquad y(0, \varepsilon) = y^0,$$

где $t \in [0, L/\varepsilon]$.

Пусть выполняются условия:

1) функции $F \in C^2(Q)$, $f \in C^1(Q)$, где открытая область $Q \subset R^{m_1+m_2+2}$;

2) для любых параметров $(y, \tau) \in \overline{Q_0}$, где $\overline{Q_0}$ — некоторая замкнутая и ограниченная область в R^{m_2+1}, присоединенная система

$$\frac{d\tilde{z}}{dt} = F(\tilde{z}, y, t, \tau)$$

имеет определенное для всех $t \geq 0$ решение $\tilde{z} = \varphi(t, \tau, y)$ такое, что:

а) кривая $(\varphi(t, \tau, y), y, t, \tau)$ лежит в Q вместе со своей ρ-окрестностью при $t \geq 0$ и $(y, \tau) \in \overline{Q_0}$;

б) функция $\varphi(t, \tau, y)$ удовлетворяет условию Липшица по y с константой $\lambda > 0$;

в) точка z^0 принадлежит области влияния решения $\varphi(t, 0, y^0)$, т. е. для решения $\tilde{Z}_0(t)$ задачи

$$\frac{d\tilde{Z}_0}{dt} = F(\varphi(t, 0, y^0) + \tilde{Z}_0, y^0, t, 0) - F(\varphi(t, 0, y^0), y^0, t, 0), \tag{3}$$
$$\tilde{Z}_0(0) = z^0 - \varphi(0, 0, y^0),$$

точка $(\tilde{Z}_0(t) + \varphi(t, 0, y^0), y^0, t, 0) \in Q$ при $t \geq 0$ и

$$\lim_{t \to \infty} \tilde{Z}_0(t) = 0;$$

3) система в вариациях

$$\frac{d\Phi}{dt} = F_z(\varphi(t, \tau, y), y, t, \tau)\Phi \tag{4}$$

экспоненциально устойчива равномерно по $(y, \tau) \in \overline{Q}_0$, т. е. для фундаментальной матрицы $\Phi(t, \tau, y)$ выполняется неравенство

$$\| \Phi(t, \tau, y)\Phi^{-1}(s, \tau, y)\| \leq C\exp[-\alpha(t-s)] \tag{5}$$

для $0 \leq s \leq t$, $(y, \tau) \in \overline{Q}_0$ и некоторых $C > 0$ и $\alpha > 0$;

4) для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ при $t \in [0, L/\varepsilon]$ существует решение $y_0(t, \varepsilon)$ задачи

$$\frac{dy_0}{dt} = \varepsilon f(\varphi(t, \varepsilon t, y_0) + \tilde{Z}_0(t), y_0, t, \varepsilon t), \tag{6}$$

$$y_0(0, \varepsilon) = y^0$$

и при $t \in [0, L/\varepsilon]$ точка $(y_0(t, \varepsilon), \varepsilon t) \in \overline{Q}_0$ вместе со своей ρ-окрестностью.

2. Итерационный метод. Решение задачи (2) ищется в виде [1]

$$z = \varphi(t, \varepsilon t, y(t, \varepsilon)) + \tilde{Z}_0(t) + Z(t, \varepsilon). \tag{7}$$

Подставляя выражение (7) в систему (2), получаем

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dt} = {} & [F(\varphi(t, \varepsilon t, y) + \tilde{Z}_0 + Z, y, t, \varepsilon t) - F(\varphi(t, \varepsilon t, y), y, t, \varepsilon t)] - \\ & - [F(\varphi(t, 0, y^0) + \tilde{Z}_0, y^0, t, 0) - F(\varphi(t, 0, y^0), y^0, t, 0)] - \\ & - \varepsilon[\varphi_y(t, \varepsilon t, y) f(\varphi(t, \varepsilon t, y) + \tilde{Z}_0 + Z, y, t, \varepsilon t) + \varphi_\tau(t, \varepsilon t, y)], \end{aligned} \tag{8}$$

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon f(\varphi(t, \varepsilon t, y) + \tilde{Z}_0 + Z, y, t, \varepsilon t),$$

$$Z(0, \varepsilon) = 0, \qquad y(0, \varepsilon) = y^0.$$

Рассмотрим итерационный процесс

$$\begin{aligned} \frac{dZ_i}{dt} = {} & [F(\varphi(t, \varepsilon t, y_{i-1}) + \tilde{Z}_0 + Z_i, y_{i-1}, t, \varepsilon t) - F(\varphi(t, \varepsilon t, y_{i-1}), y_{i-1}, t, \varepsilon t)] - \\ & - [F(\varphi(t, 0, y^0) + \tilde{Z}_0, y^0, t, 0) - F(\varphi(t, 0, y^0), y^0, t, 0)] - \\ & - \varepsilon[\varphi_y(t, \varepsilon t, y_{i-1}) f(\varphi(t, \varepsilon t, y_{i-1}) + \tilde{Z}_0 + Z_{i-1}, y_{i-1}, t, \varepsilon t) + \varphi_\tau(t, \varepsilon t, y_{i-1})], \end{aligned} \tag{9}$$

$$Z_i(0, \varepsilon) = 0,$$

$$\frac{dy_i}{dt} = \varepsilon f(\varphi(t, \varepsilon t, y_i) + \tilde{Z}_0 + Z_i, y_i, t, \varepsilon t), \tag{10}$$

$$y_i(0, \varepsilon) = y^0.$$

Здесь $i = 1, 2, \ldots$, $Z_0(t, \varepsilon) \equiv 0$. Введем замену $\tilde{Z}_i = \tilde{Z}_0 + Z_i$, тогда задачи (9), (10) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{dZ_i}{dt} = {} & [F(\varphi(t, \varepsilon t, y_{i-1}) + \tilde{Z}_i, y_{i-1}, t, \varepsilon t) - F(\varphi(t, \varepsilon t, y_{i-1}), y_{i-1}, t, \varepsilon t)] - \\ & - \varepsilon[\varphi_y(t, \varepsilon t, y_{i-1}) f(\varphi(t, \varepsilon t, y_{i-1}) + \tilde{Z}_{i-1}, y_{i-1}, t, \varepsilon t) + \varphi_\tau(t, \varepsilon t, y_{i-1})], \end{aligned}$$

$$\tilde{Z}_i(0, \varepsilon) = y^0, \tag{11}$$

$$\frac{dy_i}{dt} = \varepsilon f(\varphi(t, \varepsilon t, y_i) + \tilde{Z}_i, y_i, t, \varepsilon t),$$

$$y_i(0, \varepsilon) = y^0.$$

Здесь $i = 1, 2, \ldots$, $t \in [0, L/\varepsilon]$.

3. Теорема. Для итерационных процессов (9), (10) и (11) справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть выполняются условия* $1-4$. *Тогда существуют* $\varepsilon_0 > 0$ *и* $C > 0$ *такие, что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *и* $t \in [0, L/\varepsilon]$ *решение* $z(t, \varepsilon)$, $y(t, \varepsilon)$ *задачи* (2) *существует, единственно и выполняются оценки*

$$\| z(t, \varepsilon) - z_n(t, \varepsilon) \| \le C (C\varepsilon)^{n+1},$$
$$\| y(t, \varepsilon) - y_n(t, \varepsilon) \| \le C (C\varepsilon)^{n+1}, \tag{12}$$

где

$$z_n(t, \varepsilon) = \varphi(t, \varepsilon t, y_n) + \tilde{Z}_n(t, \varepsilon) = \varphi(t, \varepsilon t, y_n(t, \varepsilon)) + \tilde{Z}_0(t) + Z_n(t, \varepsilon).$$

***Замечание* 1.** В силу теоремы [3] об асимптотическом представлении следует, что существуют $\varepsilon_0 > 0$, $C > 0$ такие, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $t \in [0, L/\varepsilon]$ решение $z(t, \varepsilon)$, $y(t, \varepsilon)$ задачи (2) существует, единственно и справедливы оценки

$$\| z(t, \varepsilon) - z_0(t, \varepsilon) \| \le C\varepsilon,$$
$$\| y(t, \varepsilon) - y_0(t, \varepsilon) \| \le C\varepsilon, \tag{13}$$
$$\| \tilde{Z}_0(t) \| \le C \exp(-\alpha t).$$

Для нулевого приближения вместо системы (6) можно рассматривать усредненную систему [4]

$$\frac{dy_0}{dt} = \varepsilon \bar{f}(y_0, \varepsilon t),$$

если существует предел

$$\bar{f}(y, \tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi(t, \tau, y) + \tilde{Z}_0(t), y, t, \tau)\, dt.$$

4. ***Доказательство теоремы.*** В дальнейшем через C и ε_0 будем обозначать положительные константы.

Рассмотрим задачи (9), (10) при $i = 1$. Согласно теореме о среднем имеем

$$F(\varphi(t, \varepsilon t, y_{i-1}) + \tilde{Z}_0 + Z_i, y_{i-1}, t, \varepsilon t) - F(\varphi(t, \varepsilon t, y_{i-1}), y_{i-1}, t, \varepsilon t) =$$
$$= F_z(\varphi(t, \varepsilon t, y_{i-1}) + \tilde{Z}_0, y_{i-1}, t, \varepsilon t) Z_i +$$
$$+ F_z(\varphi(t, \varepsilon t, y_{i-1}) + \Theta\tilde{Z}_0, y_{i-1}, t, \varepsilon t) \tilde{Z}_0 + G(\tilde{Z}_0, t, Z_i, y_{i-1}), \tag{14}$$

где $\| G(\tilde{Z}_0, t, Z_i, y_{i-1}) \| \le C \| Z_i \|^2$, координаты Θ^k вектора $\Theta(\tilde{Z}_0, t, \varepsilon t, y_{i-1})$ удовлетворяют неравенству

$$0 \le \Theta^k(\tilde{Z}_0, t, \varepsilon t, y_{i-1}) \le 1, \quad k = \overline{1, m_1}.$$

Таким образом,

$$F(\varphi(t, 0, y^0) + \tilde{Z}_0, y^0, t, 0) - F(\varphi(t, 0, y^0), y^0, t, 0) =$$
$$= F_z(\varphi(t, 0, y^0) + \tilde{\Theta}\tilde{Z}_0, y^0, t, 0) \tilde{Z}_0, \tag{15}$$

где $\tilde{\Theta} = \Theta(\tilde{Z}_0, t, 0, y^0)$.

Тогда систему (9) с учетом представлений (14) и (15) запишем в виде

$$\frac{dZ_i}{dt} = F_z(\varphi(t, \varepsilon t, y_{i-1}) + \tilde{Z}_0, y_{i-1}, t, \varepsilon t) Z_i +$$
$$+ [F_z(\varphi(t, \varepsilon t, y_{i-1}) + \Theta\tilde{Z}_0, y_{i-1}, t, \varepsilon t) -$$
$$- F_z(\varphi(t, 0, y^0) + \tilde{\Theta}\tilde{Z}_0, y^0, t, 0)]\tilde{Z}_0 +$$
$$+ G(\tilde{Z}_0, t, Z_i, y_{i-1}) - \varepsilon\psi(Z_{i-1}, y_{i-1}, t). \tag{16}$$

Здесь $Z_i(0, \varepsilon) = 0$, $\psi(Z_{i-1}, y_{i-1}, t) = [\varphi_\tau(t, \varepsilon t, y_{i-1}) + \varphi_y(t, \varepsilon t, y_{i-1}) \times \times f(\varphi(t, \varepsilon t, y_{i-1}) + \tilde{Z}_0 + Z_{i-1}, y_{i-1}, t, \varepsilon t)]$.

Как вытекает из леммы 3 [3] и леммы 3.2 [5], фундаментальная матрица Φ_i системы (16) удовлетворяет неравенству

$$\|\Phi_i(t, \varepsilon)\Phi_i^{-1}(s, \varepsilon)\| \le C_0 \exp[-\alpha_0(t-s)] \tag{17}$$

при $0 \le s \le t \le L/\varepsilon$, $C_0 > 0$, $0 < \alpha_0 < \alpha$.

Заметим, что $\|\psi(Z_{i-1}, y_{i-1}, t)\| \le C$, а $\|G(Z_0, t, p, y_{i-1})\| \le o(\|p\|)$ при $\|p\| \to 0$. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы при $\|p\| \le \delta$ выполнялось неравенство

$$\|G(Z_0, t, p, y_{i-1})\| \le \frac{\alpha_0}{2C_0}\|p\|.$$

На некотором промежутке $[0, t_0]$ согласно теореме существования и единственности решения $Z_i(t, \varepsilon)$ задачи (16) существует, единственно и $\|Z_i(t, \varepsilon)\| \le \le \delta$.

Из системы (16) и неравенств (13) и (17) получим

$$\|Z_i(t, \varepsilon)\| \le \int_0^t \exp[-\alpha_0(t-s)]\Big\{C\varepsilon +$$
$$+ C\varepsilon(1+s)\exp(-\alpha s) + \frac{\alpha_0}{2}\|Z_i(s, \varepsilon)\|\Big\} ds \le$$
$$\le R + \frac{\alpha_0}{2}\int_0^t \exp[-\alpha_0(t-s)]\|Z_i(s, \varepsilon)\| ds,$$

где

$$R = C\varepsilon \frac{\exp(-\alpha_0 t) - \exp(-\alpha t)}{\alpha - \alpha_0}\left(1 + t + \frac{C}{\alpha - \alpha_0}\right) \le$$
$$\le C(C+t)\varepsilon\exp(-\alpha_0 t) \le C\varepsilon + C\varepsilon t\exp(-\alpha_0 t).$$

Очевидно, что

$$\sup_{t \in [0, L/\varepsilon]} C\varepsilon t\exp(-\alpha_0 t) = \sup_{\tau \in [0, L]} C\tau\exp(-\alpha_0\tau/\varepsilon) \le C\varepsilon,$$

тогда $R \le C\varepsilon$ и

$$\|Z_i(t, \varepsilon)\| \le C\varepsilon\frac{\alpha_0}{2}\int_0^t \exp[-\alpha_0(t-s)]\|Z_i(s, \varepsilon)\| ds.$$

Обозначим $r(t, \varepsilon) = \exp(-\alpha_0 t)\|Z_i(t, \varepsilon)\|$. Тогда

$$r(t, \varepsilon) \le C\varepsilon\exp(\alpha_0 t) + \frac{\alpha_0}{2}\int_0^t r(s, \varepsilon) ds.$$

Применяя лемму Гронуолла – Беллмана [6], заключаем, что

$$r(t,\varepsilon) \le C\varepsilon \exp(\alpha_0 t) + \frac{\alpha_0}{2} C\varepsilon \int_0^t \exp\left(\frac{\alpha_0(t+s)}{2}\right) ds =$$

$$= C\varepsilon \exp(\alpha_0 t) + C\varepsilon\left[\exp(\alpha_0 t) - \exp\left(\frac{\alpha_0 t}{2}\right)\right],$$

откуда

$$\| Z_i(t,\varepsilon)\| \le C\varepsilon + C\varepsilon\left[1 - \exp\left(\frac{-\alpha_0 t}{2}\right)\right] \le C\varepsilon \tag{18}$$

при $i=1$ и $t \le L/\varepsilon$; величину $t_0 > 0$ можно взять равной L/ε.

Методом математической индукции легко показать, что при $i = 1, 2, \ldots$, из существования разрешающего задачу (10) оператора $y_{i-1} = T(Z_{i-1})$ следует существование разрешающего задачу (9) оператора $Z_i = U(Z_{i-1})$, отображающего $C\varepsilon$-окрестность нуля в себя. Для $i=1$ это доказано. Пусть для $i=j$ существует разрешающий задачу (9) оператор $Z_i = U(Z_{i-1})$, для которого выполняется неравенство (18). Тогда из неравенства (18) и условия 4 следует существование решения $y_i(t,\varepsilon)$ задачи (10) и справедливость неравенства

$$\| y_i(t,\varepsilon) - y_0(t,\varepsilon)\| \le C\varepsilon, \tag{19}$$

которое позволяет повторить те же рассуждения для $i=j+1$, что и для $i=1$.

Докажем, что оператор $Z_i = U(Z_{i-1})$ сжимающий. Для этого рассмотрим $\Delta = U(Z'') - U(Z')$ для произвольных Z' и Z'' из $C\varepsilon$-окрестности нуля. Обозначим $y' = T(Z')$, $y'' = T(Z'')$.

По теореме о среднем имеем

$$[F(\varphi(t,\varepsilon t, y'') + \tilde{Z}_0 + U(Z''), y'', t, \varepsilon t) - F(\varphi(t,\varepsilon t, y''), y'', t, \varepsilon t)] -$$

$$- [F(\varphi(t,\varepsilon t, y') + \tilde{Z}_0 + U(Z'), y', t, \varepsilon t) - F(\varphi(t,\varepsilon t, y'), y', t, \varepsilon t)] =$$

$$= F_z(\varphi(t,\varepsilon t, y'') + \tilde{Z}_0 + \Theta_2 U(Z''), y'', t, \varepsilon t) U(Z'') -$$

$$- F_z(\varphi(t,\varepsilon t, y') + \tilde{Z}_0 + \Theta_1 U(Z'), y', t, \varepsilon t)[U(Z') \pm U(Z'')] =$$

$$= F_z(\varphi(t,\varepsilon t, y') + \tilde{Z}_0 + \Theta_1 U(Z'), y', t, \varepsilon t)\Delta + p(t,\varepsilon) U(Z''),$$

где

$$p(t,\varepsilon) = [F_z(\varphi(t,\varepsilon t, y'') + \tilde{Z}_0 + \Theta_2 U(Z''), y'', t, \varepsilon t) -$$

$$- F_z(\varphi(t,\varepsilon t, y') + \tilde{Z}_0 + \Theta_1 U(Z'), y', t, \varepsilon t)],$$

координаты векторов Θ_l, $l = \overline{1,2}$, удовлетворяют неравенству $0 \le \Theta_l^k \le 1$, $k = \overline{1, m_1}$.

Разность $\Delta(t,\varepsilon)$ решений системы (9) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Delta}{dt} = F_z(\varphi(t,\varepsilon t, y') + \tilde{Z}_0 + \Theta_1 U(Z'), y', t, \varepsilon t)\Delta +$$

$$+ p(t,\varepsilon) U(Z'') + \varepsilon[\psi(Z', y', t) - \psi(Z'', y'', t)], \tag{20}$$

$$\Delta(0,\varepsilon) = 0,$$

причем решения $y'(t,\varepsilon)$ и $y''(t,\varepsilon)$ задачи (10) удовлетворяют на сегменте $[0, L/\varepsilon]$ неравенствам (19). Очевидно, что выполняются неравенства

$$\|y'' - y'\|_c \le C\|Z'' - Z'\|_c,$$

$$\|U(Z'')\|_c \le C\varepsilon, \tag{21}$$

$$\|p(t,\varepsilon)\| \le C\|y''(t,\varepsilon)-y'(t,\varepsilon)\| + C\|\Theta_2 U(Z''(t,\varepsilon)) - \Theta_1 U(Z'(t,\varepsilon))\| \le$$
$$\le C\|\Delta(t,\varepsilon)\| + C\|Z''-Z'\|_c,$$

где $\|a\| = \max\limits_{1\le k\le n} |a^k|$ для произвольного n-мерного вектора a, $\|a\|_c = \max\limits_{0\le t\le L/\varepsilon} \|a(t)\|$ для произвольной непрерывной вектор-функции $a(t)$.

Из леммы 3 [3] и леммы 3.2 [5] следует, что фундаментальная матрица $\tilde{\Phi}(t,\varepsilon)$ системы (20) удовлетворяет оценке

$$\|\tilde{\Phi}(t,\varepsilon)\,\tilde{\Phi}^{-1}(s,\varepsilon)\| \le C\exp[-\alpha(t-s)], \tag{22}$$

где $C>0$, $\alpha>0$. Тогда из (20) – (22) получаем оценку

$$\|\Delta\|_c \le \max_{0\le t\le L/\varepsilon} \int_0^t \|\tilde{\Phi}(t,\varepsilon)\,\tilde{\Phi}^{-1}(s,\varepsilon)\|\,\{\|p(s,\varepsilon)\|\,\|U(Z'')\|_c +$$
$$+ \varepsilon\|\psi(Z',y',t) - \psi(Z'',y'',t)\|\}\,ds \le$$
$$\le \max_{0\le t\le L/\varepsilon} C\varepsilon \int_0^t \exp[-\alpha(t-s)]\,\{\|\Delta\|_c + \|Z''-Z'\|_c\}\,ds \le$$
$$\le C\varepsilon\{\|\Delta\|_c + \|Z''-Z'\|_c\},$$

откуда

$$\|U(z'') - U(z')\| \le C\varepsilon\|z''-z'\|.$$

Это означает, что оператор U — сжимающий. Из принципа сжатых отображений вытекает, что при $t\in[0,L/\varepsilon]$

$$\|Z_n(t,\varepsilon) - Z(t,\varepsilon)\| \le \frac{(C\varepsilon)^n}{1-C\varepsilon}\|z_1 - z_0\|_c \le C(C\varepsilon)^{n+1},$$

тогда при $t\in[0,L/\varepsilon]$

$$\|y_n(t,\varepsilon) - y(t,\varepsilon)\| \le C(C\varepsilon)^{n+1}$$

и

$$\|z_n(t,\varepsilon) - z(t,\varepsilon)\| \le C(C\varepsilon)^{n+1}.$$

Теорема доказана.

Замечание 2. В отличие от итерационного метода [1] задачи (9), (10) и (11) требуют меньше вычислений для достижения одинаковой точности.

1. *Боглаев Ю. П.* Итерационный метод приближенного решения сингулярно возмущенных задач // Докл. АН СССР. – 1976. – **227**, № 5. – С. 1033–1036.
2. *Дмитриев М. Г.* Итерационное решение задач оптимального управления с медленными и быстрыми движениями // Докл. АН СССР. – 1983. – № 2. – С. 1145–1149.
3. *Щитов И. Н.* Асимптотика решений систем с медленными и быстрыми переменными // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 5. – С. 631–637.
4. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
5. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 273 с.
6. *Флеминг У., Ришел Р.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. – М.: Мир, 1978. – 316 с.

Получено 17.04.96