УДК 511. 336

І. В. Решетуха (Ін-т кібернетики НАН України, Київ)

ТРИ ЗАДАЧІ З ПРОБЛЕМИ КУММЕРА

A short review of the principal results on the individual Kummer problem is presented, in particular, new results by the author concerning this problem are described.

Наведено короткий огляд основних результатів з індивідуальної проблеми Куммера, а також нові результати автора з цієї проблеми.

Проблема Куммера стосується гауссової суми кубічного характеру. Коротко пояснимо суть цієї проблеми.

Будемо вважати відомими закони розкладу на прості множники всіх цілих чисел ейзенштейнового поля $\mathbb{Q}(\rho)$, що складають кільце $\mathbb{Z}[\rho]$, $\rho = e^{2\pi i/3}$, а також деякі загальні положення полів поділу круга.

Нехай p — просте раціональне число вигляду $p = 3m + 1$, $m \in \mathbb{Z}$, ω — простий дільник числа p в $\mathbb{Q}(\rho)$, нормований умовами

$$\omega \equiv -1 \,(\mathrm{mod}\, 3), \qquad \mathrm{Im}(\omega) > 0, \tag{1}$$

і χ — кубічний характер на $\mathbb{Z}$, співставлений простому модулю ω узагальненим критерієм Ейлера:

$$\chi(x) \equiv x^m \,(\mathrm{mod}\, \omega), \qquad x \in \mathbb{Z}, \qquad m = \frac{p-1}{3}.$$

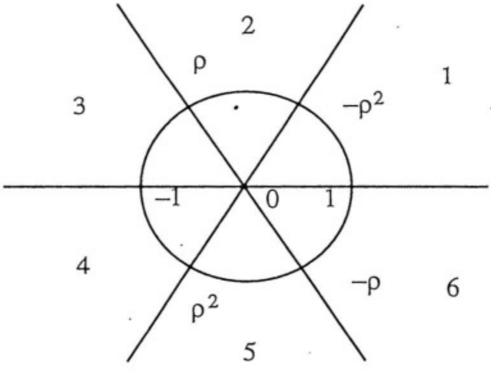
Для гауссової суми

$$\tau(\chi; \zeta) = \sum_{x \bmod p} \chi(x) \zeta^x, \tag{2}$$

де $\zeta = e^{2\pi i/p}$ — корінь p-го степеня з 1, відомі (див., наприклад, [1]) співвідношення

$$\begin{gathered} \tau(\chi; \zeta)^3 = p\omega, \\ \tau(\chi; \zeta^r) = \overline{\chi}(r)\tau(\chi; \zeta), \\ \tau(\chi; \zeta)\overline{\tau}(\chi; \zeta) = \tau(\chi; \zeta)\tau(\overline{\chi}; \zeta) = p. \end{gathered} \tag{3}$$

З цих рівностей і нормування (1) випливає, що гауссова сума $\tau(\chi; \zeta)$ лежить у середині 1-го, або 3-го, або 5-го сектанта комплексної площини, тобто $0 < \arg\tau < \pi/3$, або $2\pi/3 < \arg\tau < \pi$, або $-2\pi/3 < \arg\tau < -\pi/3$ (малюнок).



Оминаючи щільнісні проблеми [1–3], будемо розглядати проблему Куммера для індивідуального простого $p \equiv 1 \pmod 3$, як вона трактується в роботах [1–3]. Суть проблеми Куммера полягає в наступному: вимагається знайти арифметичний закон, за яким для кожного простого $p \equiv 1 \pmod 3$ можно було б визначити в якому з указаних трьох секстантів лежить $\tau(\chi;\zeta)$.

Проблема Куммера є кубічним аналогом добре відомої теореми Гаусса про знак квадратичної суми

$$\tau = \sum_{x \bmod q} \left(\frac{x}{q}\right) \xi^{x},$$

де q — довільне просте раціональне число, $\left(\frac{x}{q}\right)$ — символ Лежандра (квадратичний характер), $\xi = e^{2\pi i/q}$ — корінь q-го степеня з 1. За цією теоремою маємо

$$\tau = \begin{cases} \sqrt{q}, & \text{якщо } q \equiv 1; \\ i\sqrt{q}, & \text{якщо } q \equiv -1 \pmod 4). \end{cases} \tag{4}$$

Існує багато різних доведень рівностей (4). При проведенні досліджень проблеми Куммера природно орієнтуватись на доведення Кронекера, в якому застосовується зображення гауссової суми у вигляді спорідненого йому добутку δ:

$$\tau = (-1)^{(p-1)/2}\delta, \quad \delta = \prod_{x=1}^{(p-1)/2} \left(\xi^{x(p+1)/2} - \xi^{-x(p+1)/2}\right) =$$

$$= (2i)^{(p-1)/2} \prod_{x=1}^{(p-1)/2} \sin\left(\frac{\pi x}{p} + \pi x\right). \tag{5}$$

Грунтовне викладення кронекерового доведення теореми Гаусса див. в [1].

Переломним роком в дослідженні проблеми Куммера з використанням ідеї Кронекера став 1970 рік. В цьому році Касселс [3] вказав напрямок в дослідженні проблеми Куммера, ввівши добуток, складений із значень еліптичної функції Вейєрштрасса $\mathcal{P}(z)$.

В цьому ж році незалежно від роботи [3] в [4] вказано напрямок в дослідженні проблеми Куммера з використанням спорідненого гауссовій сумі (2) добутку

$$\delta(\chi;\zeta) = \delta(\chi;\zeta;\mathfrak{G}) = \prod_{r \in \mathfrak{G}} \left(\zeta^{r} + \rho\zeta^{rf} + \rho^{2}\zeta^{rf^{2}}\right), \tag{6}$$

де $f \in \mathbb{N}$ — корінь конгруенції $X^3 \equiv 1 \pmod p$, для якого виконується умова $f \equiv \rho \pmod \omega$, $\mathfrak{G}$ — $1/3$-системи лишків за модулем p, тобто така система, для якої множина $\{o, \mathfrak{G}, f\mathfrak{G}, f^{2}\mathfrak{G}\}$ складає повну систему лишків за модулем p.

Зауважимо, що для кубічного добутку (6) виконуються співвідношення [4], на які ми будемо посилатись далі:

$$\begin{gathered} \delta(\chi;\zeta^{r}) = \overline{\chi}(r)\delta(\chi;\zeta), \quad r \in \mathbb{Z},\ r \neq 0, \\ \delta(\chi;\zeta) = \alpha\tau(\chi;\zeta), \quad \alpha \in \mathbb{Z}[\rho], \end{gathered} \tag{7}$$

$$\delta(\chi;\zeta)^{3} = \prod_{r=1}^{p-1} \left(\zeta^{r} + \rho\zeta^{rf} + \rho^{2}\zeta^{rf^{2}}\right) = p\Omega, \tag{8}$$

де $\Omega = \alpha^{3}\omega$.

В роботі [4] проведено також розчленування проблеми Куммера на три більш прості задачі.

В даній статті проводиться аналіз всього того, що зроблено в світі до цього часу по кожній з цих задач.

1. Задача про розміщення в комплексній площині числа Ω. Спочатку попередимо, що ціле число Ω, яке входить в рівність (8), не може бути дійсним. Справді, якщо припустити, що для деякого $p \equiv 1 \pmod 3$ число Ω є дійсним, то з урахуванням конгруенції $\Omega \equiv 0 \pmod{\omega}$ мали б $\Omega \equiv 0 \pmod{p}$ і $\Omega \equiv 0 \pmod{\overline{\omega}}$. Але, як показано в роботі [4], насправді справедлива конгруенція

$$\Omega \equiv 1 \pmod{\overline{\omega}}.$$

Тепер якщо проблему Куммера для гауссової суми (2) підміняти аналогічною проблемою для спорідненого добутку (6), з урахуванням нормування (1) виникає запитання: в якій півплощині знаходиться число Ω в рівності (8)? На основі чисельного експерименту [4, 5] була висунута гіпотеза, за якою завжди число Ω в рівності (8), як і число ω в рівності (3), лежать в верхній комплексній півплощині.

В 1974 р. з цього приводу, використовуючи спеціально розроблені формули підсумовування, Локстон [6] отримав результат, за яким вірні співвідношення

$$\arg \delta(\chi;\zeta)^3 \equiv -\arg\omega + \pi + O\left(p^{-\frac{1}{2}+2\varepsilon}\right) \pmod{2\pi},$$

$$\arg\left(-\omega\,\delta(\chi;\zeta)^3\right) = O\left(p^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\right), \tag{9}$$

де $p \to \infty$ і константа залежить лише від $\varepsilon > 0$.

З цих співвідношень випливає, що для достатньо великих p дійсно $\arg\delta(\chi;\zeta)^3 > 0$.

В 1985 р. у статті [5] була наведена лема, з якої можна зробити припущення, що задача про розміщення $\delta(\chi;\zeta)^3$ в комплексній площині і кубічний закон взаємності для модулів ω, $\overline{\omega}$ мають спільну математичну основу. В 1983 р. у роботі [7] доведення цієї леми було проведене за допомогою циклічних матриць (циркулянтів). Наведемо цю лему.

Лема. *Нехай l_0^*, l_1^*, l_2^* — трійка натуральних чисел, що є розв'язком системи*

$$\begin{cases} u+v+w=p; \\ u+v\rho^2+w\rho=\omega^*; \\ u+v\rho+w\rho^2=\overline{\omega}^*, \qquad \omega^*=-\overline{\omega}, \end{cases}$$

$$\mathscr{L} = \Big\{(l_0,l_1,l_2)\in\mathbb{R}^3 \;\Big|\; 0<l_\nu<p,\, l_\nu\in\mathbb{N},$$

$$l_0+l_1+l_2=p,\, l_0l_0^*+l_1l_1^*+l_2l_2^*\equiv 0 \pmod p\Big\},$$

D — циклічний детермінант — поліном порядку p, що визначається таким першим рядком: всі елементи першого рядка дорівнюють 0, окрім елементів з стовпцевими індексами $j_0 = l_0^*+1$, $j_1 = l_1^*+1$, $j_2 = l_2^*+1$, які відповідно дорівнюють змінним u, v, w. Тоді для числа Ω вірна рівність

$$\Omega = 1 + \tilde{\Omega} + \mu. \tag{10}$$

Тут

$$\tilde{\Omega} = h\omega^*, \quad h = \frac{M-1}{p}, \quad M = \prod_{r=1}^{p-1}\left(\zeta^r + \zeta^{rf} + \zeta^{rf^2}\right), \quad M, h \in \mathbb{N},$$

$$\mu = \omega^*(\rho - 1) \sum_{(l_0, l_1, l_2) \in \mathcal{S}} \frac{d(l_0, l_1, l_2)}{p}(t_0 + t_1\rho^2 + t_2\rho),$$

де $d(l_0, l_1, l_2)$ — *коефіцієнти полінома* D, *що стоять при* $u^{l_0} v^{l_1} w^{l_2}$ *(всі інші коефіцієнти полінома* D *рівні* 0*),* t_0, t_1, t_2 — *трійка чисел, що визначаються за формулами*

$$t_0 = \frac{q_1 - q_0 + p}{3p},$$

$$t_1 = \frac{q_0 - q_2 - p}{3p},$$

$$t_2 = \frac{q_2 - q_1}{3p},$$

в свою чергу,

$$q_0 = l_0 l_0^* + l_1 l_1^* + l_2 l_2^*, \quad q_1 = l_0 l_1^* + l_2 l_2^* + l_2 l_0^*,$$

$$q_2 = l_0 l_2^* + l_1 l_0^* + l_2 l_1^*,$$

Коефіцієнт h *в другому додапку рівності* (10) *є додатним і сильно зростає з ростом* p.

Лема дає явну рівність, з якої випливає кубічний закон взаємності для модулів ω, $\overline{\omega}$: $\left(\frac{\omega}{\overline{\omega}}\right)_3 = \left(\frac{\overline{\omega}}{\omega}\right)_3 = 1$.

2. Зв'язок між проблемою Куммера для $\tau(\chi;\zeta)$ і аналогічною проблемою для добутку $\delta(\chi;\zeta)$. Цю задачу з проблеми Куммера можна сформулювати це так: вказати арифметичний закон, за яким можна визначити в якому сектанті комплексної площини лежить гауссова сума $\tau(\chi;\zeta)$, коли відомо в якому сектанті лежить добуток $\delta(\chi;\zeta)$.

Підхід до розв'язання поставленої в цьому пункті задачі випливає з досліджень Локстона і Хіроші Іто. В 1978 р. Локстон опублікував гіпотезу [9], перевірену для всіх $p < 5000$, згідно з якою вірне співвідношення

$$\arg(-\chi(3)\tau(\chi;\zeta)P) \to 0 \ \text{ при } \ p \to \infty, \tag{11}$$

де P відрізняється від добутку $\delta(\chi;\zeta)$ кубічним коренем $\hat{\rho}$ з 1, який задовольняє конгруенцію

$$\prod_{r \in \mathfrak{S}} r \equiv -\hat{\rho} \pmod{\omega}.$$

(Що такий корінь існує — випливає з означення $1/3$-системи $\mathfrak{S}$ і теореми Вільсона.)

В 1989 р. Хіроші Іто [9] наводить доведення співвідношення (11). Цього йому вдалося досягти з допомогою подання добутку (6) у вигляді добутку

$$\prod_{r \in \mathfrak{S}} g\left(\frac{r}{\hat{\omega}}\right),$$

де

$$g(z) = e(z) + \rho\, e(\rho z) + \rho^2 e(\rho^2 z), \quad e(z) = \exp\left(2\pi \frac{z - \overline{z}}{\sqrt{3}}\right), \quad \hat{\omega} = -\omega,$$

і подальшого наближення функції $g(z)$ спеціально сконструйованою еліптичною функцією

$$f(z) = \frac{\sigma\left(\left(z-\frac{1}{3}\right)\theta\right)\sigma\left(\left(z-\frac{\rho}{3}\right)\theta\right)\sigma\left(\left(z-\frac{\rho^2}{3}\right)\theta\right)}{\sigma(z\theta)\sigma\left(\left(z-\frac{1}{\lambda}\right)\theta\right)\sigma\left(\left(z+\frac{1}{\lambda}\right)\theta\right)}, \quad \theta > 0, \tag{12}$$

де $\sigma(z)$ — σ-функція Вейєрштрасса, $\lambda = \rho - \rho^2$.

З співвідношення (11) випливає, що для достатньо великих p гауссова сума $\tau(\chi;\zeta)$ лежить в тому ж сектанті комлексної площини, що і добуток $\chi(3)P$.

3. Задача про розміщення добутку $\delta(\chi;\zeta)$ в комплексній площині. Необхідно встановити арифметичний закон, за яким визначається в якому сектанті комплексної площини лежить кубічний добуток $\delta(\chi;\zeta)$. Поставлена задача є важкою, однак значно простішою від аналогічної задачі для гауссової суми $\tau(\chi;\zeta)$. Від її позитивного розв'язання залежить розв'язок проблеми Куммера для гауссової суми $\tau(\chi;\zeta)$. Якщо виявиться, що такого закону для добутку $\delta(\chi;\zeta)$ не існує (що мало ймовірно), то це буде означати, що і для гауссової суми $\tau(\chi;\zeta)$ такого закону не існує.

Розглянемо два можливі підходи до розв'язання поставленої в цьому пункті задачі. Перший підхід можна угледіти з досліджень Хіроші Іто [9]. Якщо звернутись до рівностей (5), які дають доведення теореми Гаусса про знак квадратичної гауссової суми, то побачимо, що спочатку робиться перехід до добутку, що є числом того ж поля, якому належить гауссова сума, а далі розглядається цей добуток як добуток значень тригонометричної аналітичної функції $\sin x$. Аналогічний перехід очевидно треба здійснити і для добутку $\delta(\chi;\zeta)$, апроксимуючи його деякою мероморфною еліптичною функцією. Можливо такою функцією і є функція (12), сконструйована Хіроші Іто.

Другий підхід пов'язаний з новим більш простим, ніж в [4, 5], обчислювальним алгоритмом, розробленим автором даної статті, для визначення сектанта, в якому лежить добуток $\delta(\chi;\zeta)$ з спеціально вибраною $1/3$-системою $\mathfrak{S}$, що застосовувалась і в роботах [4, 5]. Наведемо цей алгоритм. Нехай $\Psi(r)$, $r \in \mathbb{Z}$, — арифметична функція, значенням якої є лишок числа r за модулем p, який лежить в інтервалі $[0, p)$. Кожному цілому $r_0 \in (0, p)$ поставлено у відповідність числа $r_1 = \Psi(r_0 f)$, $r_2 = \Psi(r_0 f^2)$, де f — число, що задовольняє умову $f \equiv \rho \pmod{\omega}$. За $1/3$-систему $\mathfrak{S}_0$ приймається множина тих цілих $r_0 \in (0, p)$, для яких трійки r_0, r_1, r_2 мають властивості: r_0 лежить в одному з інтервалів $(0, p/3)$, $(p/3, 2p/3)$, $(2p/3, p)$, а r_1 і r_2 обидва лежать в деякому іншому з цих інтервалів.

Нехай

$$R_0 = \{(r_0, r_1, r_2) \in \mathbb{R}^3 \mid r_0 \in \mathfrak{S}_0,\ r_1 = \Psi(r_0 f),\ r_2 = \Psi(r_0 f^2)\}.$$

Тоді

$$\delta(\chi;\zeta) = \delta(\chi;\zeta;\mathfrak{S}_0) = \prod_{(r_0, r_1, r_2) \in R_0} \left(\zeta^{r_0} + \rho\zeta^{r_1} + \rho^2\zeta^{r_2}\right) \tag{13}$$

і, як показано в [5], цей добуток можна подати у вигляді

$$\delta(\chi;\zeta) = 2^n \prod_{(s_0,s_1,s_2)\in S_0} \theta(s_0,s_1,s_2), \qquad n = \frac{m}{2} = \frac{p-1}{6}, \tag{14}$$

де

$$S_0 = \{(s_0,s_1,s_2)\in\mathbb{R}^3 \mid s_j\in\mathbb{N},\ s_0+s_1+s_2=p,$$

$$s_1=\Psi(s_0f^2),\ s_2=\Psi(s_0f),\ 1\le s_0\le m,\ s_0<s_1,s_2\},$$

$$\theta(s_0,s_1,s_2) = \cos\frac{2\pi s_0}{p} + \rho\cos\frac{2\pi s_1}{p} + \rho^2\cos\frac{2\pi s_2}{p}.$$

Всі множники $\theta(s_0,s_1,s_2)$ добутку (14) з $s_1<s_2$ лежать всередині 1-го сектанта, а всі інші з $s_1>s_2$ — всередині 6-го сектанта.

В силу припущення, що $\delta(\chi;\zeta)^3$ лежить в верхній комплексній півплощині, суму

$$\varphi = \sum_{(s_0,s_1,s_2)\in S_0} \arg\theta(s_0,s_1,s_2), \tag{15}$$

що відповідає добутку $\delta(\chi;\zeta)$, можна однозначно подати у вигляді

$$\varphi = \frac{2\pi}{3}L+\varphi_1, \qquad L\in\mathbb{Z}, \qquad 0<\varphi_1<\frac{\pi}{3}. \tag{16}$$

В подальшому символом $s(z)$ будемо позначати номер сектанта, в якому лежить число $z\in\mathbb{C}$, яке не належить ні одній з трьох прямих, що проходять через точку 0 і відповідно точки 1, ρ, ρ^2.

В силу (16) для добутку (13) маємо

$$s(\delta(\chi;\zeta)) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } L\equiv 0;\\ 3, & \text{якщо } L\equiv 1;\\ 5, & \text{якщо } L\equiv 2 \pmod 3).\end{cases}$$

При знаходженні $s(\delta(\chi;\zeta))$ обчислювальними засобами доданки суми (15) знаходяться (див. [5]) за формулою

$$\arg\theta(s_0,s_1,s_2) = \operatorname{arctg}\frac{t\sqrt{3}}{2-t}, \tag{17}$$

де

$$t = t(s_0,s_1,s_2) = \frac{\cos\dfrac{2\pi s_1}{p} - \cos\dfrac{2\pi s_2}{p}}{\cos\dfrac{2\pi s_0}{p} - \cos\dfrac{2\pi s_2}{p}} = \frac{\sin\dfrac{\pi s_0}{p}\sin\dfrac{\pi(s_2-s_1)}{p}}{\sin\dfrac{\pi s_1}{p}\sin\dfrac{\pi(s_2-s_0)}{p}}. \tag{18}$$

Вказаний алгоритм для знаходження $s(\delta(\chi;\zeta))$ не є арифметичним, адже приходиться проводити обчислення функцій (17), (18).

Покажемо, що обчислення досить складної функції (17), що містить ірраціональність $\sqrt{3}$, можна уникнути.

Розіб'ємо область

$$D = \left\{z\in\mathbb{C} \,\middle|\, -\frac{\pi}{3}\le\arg z<\frac{\pi}{3}\right\}$$

на $m\ (=(p-1)/3)$ конгруентних секторів D_ν, додатковими променями

$$z_j = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \arg z = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi j}{3n} \right\}, \quad (j = 1, \ldots, m-1), \text{ де } n = \frac{m}{2} = \frac{p-1}{6}.$$

Тоді матимемо

$$D_\nu = \left\{ z \in D \,\middle|\, -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi\nu}{3n} \le \arg z < -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi(\nu+1)}{3n} \right\}, \quad \nu = 0, \ldots, m-1,$$

$$D = \bigcup D_\nu.$$

Означимо на D функцію $j(z)$, покладаючи $j(z) = j$, якщо $z \in D_j$. Виникає питання: якщо при нормуванні (1) числа ω кубічний добуток $\tau(\chi;\zeta)^3$ лежить в верхній комплексній площині, то чи не визначається число L, що входить в (16), заданням всіх значень $j(\theta(s_0, s_1, s_2))$. Нехай $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ — пронумеровані множники добутку (14) і $j_\nu = j(\theta_\nu)$. Тоді

$$\arg\theta_\nu = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi j_\nu}{3n} + \beta_\nu, \quad 0 \le \beta_\nu < \frac{\pi}{3n},$$

і для суми (15) маємо

$$\varphi = -\frac{\pi n}{3} + \frac{\pi J}{3n} + \beta, \text{ де } J = \sum_{\nu=1}^{n} j_\nu, \quad \beta = \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu, \quad 0 \le \beta < \frac{\pi}{3}.$$

Нехай $l = [n/2]$ і $J = mk + r$, $k, r \in \mathbb{Z}$, $0 \le r < m$. Тоді

$$\varphi = \frac{2\pi}{3}(k - l) + \hat{\varphi}_1, \tag{19}$$

де

$$\hat{\varphi}_1 = \varphi_0 - \frac{\pi}{3}(n - 2l), \quad \varphi_0 = \frac{2\pi}{3}\frac{r}{m} + \beta, \quad 0 \le \varphi_0 < \pi. \tag{20}$$

Якщо $n \equiv 1 \pmod 2$, то маємо $\hat{\varphi}_1 = \varphi_0 - \pi/3$, $-\pi/3 \le \hat{\varphi}_1 < 2\pi/3$, і оскільки $\delta(\chi;\zeta)$ лежить всередині 1- чи 3-, чи 5-го сектанта, то $0 < \hat{\varphi}_1 < \pi/3$. Порівнюючи тепер формули (16), (19), одержуємо $\hat{\varphi}_1 = \varphi_1$, $L = k - l$, і, отже, в цьому випадку число L дійсно визначається заданням значень $j(\theta(s_0, s_1, s_2))$.

Якщо $n \equiv 0 \pmod 2$, то $\hat{\varphi}_1 = \varphi_0$ і в цьому випадку вирішальне значення має величина числа r в рівності (20): якщо $r \le n$, то

$$0 < \hat{\varphi}_1 < \frac{2\pi}{3}\frac{n}{2n} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \quad \text{і} \quad 0 < \hat{\varphi}_1 < \pi/3, \; L = k - l;$$

якщо $r > n$, то

$$\hat{\varphi}_1 > \frac{2\pi}{3}\frac{n}{2n} + 0 = \frac{\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{3} < \varphi_1 < \frac{2\pi}{3}, \quad L = k - l + 1.$$

Таким чином, число L дійсно визначається заданням чисел j_ν і, отже, проблема Куммера для добутку $\delta(\chi;\zeta)$ зводиться до знаходження чисел j_ν за допомогою простого арифметичного алгоритму, або знаходження явного виразу для їх суми.

Наведемо таблицю значень описаних вище параметрів k, r, l і L для всіх $p \equiv 1 \pmod 3$ з $p < 200$.

p	k	r	l	L	p	k	r	l	L	p	k	r	l	L
7	0	1	0	0	67	5	10	5	0	139	11	12	11	0
13	0	3	1	0	73	6	2	6	0	151	11	30	12	–1
19	0	4	1	–1	79	6	10	6	0	157	12	48	13	0
31	2	5	2	0	97	8	7	8	0	163	12	39	13	–1
37	1	11	3	–1	103	7	21	8	–1	181	15	2	15	0
43	3	6	3	0	109	8	0	9	–1	193	16	53	16	1
61	5	19	5	1	127	8	15	10	–2	199	16	29	16	0

Вкажемо тепер один простий обчислювальний алгоритм для знаходження чисел $j(\theta(s_0, s_1, s_2))$.

Числа $z \in D$ однозначно можна подати у вигляді $z = x + y\rho$, $x, y \in \mathbb{R}$. Нехай $t(z) = y/x$. Легко переконатися, що коли $\arg z = \gamma$, то $t(z) = F(\gamma)$, де

$$F(\gamma) = \frac{\sin\gamma}{\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \gamma\right)}.$$

На інтервалі $(-\pi/3, \pi/3)$ функція монотонно зростає, бо $F'(\gamma) > 0$. Звідси випливає, що $j(z) = j$, коли

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi(j-n)}{3n}\right)}{\sin\frac{\pi j}{3n}} \le t(z) < \frac{\sin\left(\frac{\pi(j+1-n)}{3n}\right)}{\sin\frac{\pi(j+1)}{3n}}. \tag{21}$$

(При $j = 0$ вираз, що стоїть зліва, покладається рівним $-\infty$.)

Для $z = \theta(s_0, s_1, s_2)$ значення $j(\theta(s_0, s_1, s_2))$ отримуємо знаходженням такого цілого j, для якого умови (21) виконуються. При цьому значення $t(s_0, s_1, s_2)$ обчислюємо за формулою (18).

Запропонований алгоритм показує, що для розв'язання проблеми Куммера відносно добутку $\delta(\chi; \zeta)$ важливо перейти до арифметичного алгоритму для знаходження чисел $j(\theta(s_0, s_1, s_2))$. Як і у випадку квадратичного добутку (5), ми прийшли до необхідності вивчення відповідних значень функції $\sin x$, $x \in \mathbb{R}$. Арифметичний алгоритм мабуть потрібно шукати шляхом розкладу всіх синусів, що входять у рівність (18) і нерівності (21), у нескінченні добутки і апроксимуванням їх раціональними виразами.

1. *Хассе Г.* Лекции по теории чисел. – М.: Изд-во иностр. лит., 1953. – 527 с.
2. *Дэвенпорт Г.* Мультипликативная теория чисел. – М.: Наука, 1971. – 198 с.
3. *Cassels J. W. S.* On Kummer sums // Proc. London Math. Soc. – 1970. –**21**. – P. 19–27 (рус. пер.: Математика. – 1972. – **16**, № 1. – С. 156–164).
4. *Решетуха И. В.* Один вопрос теории кубических вычетов // Мат. заметки. – 1970. – **2**, № 4. – С. 469–476.
5. *Решетуха И. В.* О произведении, родственном кубической гауссовой сумме // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 6. – С. 745–751.
6. *Loxton J. H.* Products related to Gauss sums // J. reine und angew. Math. – 1974. – **268/269**. – P. 53–67.
7. *Решетуха И. В.* Применение одного циклического определителя в теории кубических вычетов // Мат. заметки. – 1983. – **34**, вып. 5. – С. 783–795.
8. *Loxton J. H.* Some conjectures concerning Gauss sums // J. reine und angew. Math. – 1978. – **297**. – P. 153–158.
9. *Hiroshi Ito.* On a product related to the cubic Gauss sum // Ibid. – 1989. – **395**. – P. 202–213.

Одержано 30.05.96