УДК 517. 91

Т. В. Горбачук, М. О. Перестюк (Київ. ун-т)

ПРО ІСНУВАННЯ РОЗРИВНИХ ГРАНИЧНИХ ЦИКЛІВ ОДНІЄЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНИМ ЗБУРЕННЯМ

For a certain system of differential equations with impulse perturbation, we establish conditions under which a positive root of equation of stationary amplitudes found from equations of first approximations generates a disconnected limit cycle. We construct improved first approximations for the system under consideration.

Для однієї системи з імпульсним збуренням встановлено умови, за яких додатний корінь рівняння стаціонарних амплітуд, отриманого з рівнянь перших наближень, породжує розривний граничний цикл. Побудовано покращені перші наближення для цієї системи.

Розглянемо питання дослідження траєкторій, що описуються точкою, яка рухається за законом

$$\frac{dx}{dt} = \omega y + \varepsilon f(x, y)y, \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\omega x + \varepsilon g(x, y) \text{ при } y \neq 0, \tag{2}$$

$$\Delta y\big|_{y=0} = \varepsilon I(x),$$

тобто піддається імпульсному збуренню кожен раз при проходженні положення $y = 0$.

При дослідженні даної системи використаємо асимптотичний метод Крилова – Боголюбова – Митропольського [1, 2] та чисельно-аналітичний метод для періодичних систем звичайних диференціальних рівнянь А. М. Самойленка. В [3] було обгрунтовано застосування методу усереднення для диференціальних рівнянь з імпульсним впливом типу

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \text{ при } x \neq x_0, \tag{3}$$

$$\Delta\frac{dx}{dt} = \dot{x}_+ - \dot{x}_- = \begin{cases} \varepsilon I(\dot{x}_-) & \text{при } x = x_0, \ \dot{x}_- \geq 0; \\ 0 & \text{при } x = x_0, \ \dot{x}_- < 0 \end{cases}$$

на нескінченному часовому інтервалі. Інакше кажучи, було з'ясовано питання існування і точності знайдених періодичних режимів системи (3), виходячи з відповідних цій системі рівнянь перших наближень.

Основний результат даної роботи полягає в тому, що при певних *умовах* додатний корінь рівняння

$$\int_0^{2\pi} [f(a\cos\varphi, a\sin\varphi)a\cos\varphi + g(a\cos\varphi, a\sin\varphi)]\sin\varphi\, d\varphi = 0,$$

що співпадає з рівнянням стаціонарних амплітуд, отриманого з системи перших наближень, породжує при малих значеннях параметра ε розривний граничний цикл.

Перейдемо до викладення цього результату. Зробивши в системі (1), (2) заміну змінних $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, де $\varphi = -\omega t + \theta$, приведемо систему (1) до вигляду

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon[f(a\cos\varphi, a\sin\varphi)a\cos\varphi + g(a\cos\varphi, a\sin\varphi)]\sin\varphi,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\varepsilon}{a}[g(a\cos\varphi, a\sin\varphi)\cos\varphi - f(a\cos\varphi, a\sin\varphi)a\sin^2\varphi],$$

а умову (2) до вигляду

$$\Delta a|_{a\sin\varphi=0} = \frac{I^2(a\cos\varphi)}{2a}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^3),$$

$$\Delta\varphi|_{a\sin\varphi=0} = \frac{I(a\cos\varphi)}{a}\varepsilon + o(\varepsilon^2).$$

Розв'яжемо рівняння $a\sin(-\omega t + \theta) = 0$ відносно t:

$$t_k = \frac{1}{\omega}(\theta + \pi k), \qquad k \in \mathbb{Z},$$

$$t_0 = \frac{\theta}{\omega}, \qquad t_1 = \frac{\theta}{\omega} + \frac{\pi}{\omega}, \qquad t_{i+1}(\theta) = t_i(\theta) + \frac{\pi}{\omega}.$$

Отже, система (1), (2) запишеться так:

$$\begin{gathered}\frac{da}{dt} = \varepsilon[f(a\cos\varphi, a\sin\varphi)a\cos\varphi + g(a\cos\varphi, a\sin\varphi)]\sin\varphi,\\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{\varepsilon}{a}[g(a\cos\varphi, a\sin\varphi)\cos\varphi - f(a\cos\varphi, a\sin\varphi)a\sin^2\varphi],\\ \Delta a|_{t=t_k(\theta)} = \frac{I^2\big((-1)^k a\big)}{2a}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^3),\\ \Delta\theta|_{t=t_k(\theta)} = \frac{I\big((-1)^k a\big)}{a}\varepsilon + o(\varepsilon^2).\end{gathered} \tag{4}$$

Позначимо

$$\frac{I^2\big((-1)^k a\big)}{2a} = I_k^{(1)}(a), \qquad \frac{I\big((-1)^k a\big)}{a} = I_k^{(2)}(a).$$

Тоді для будь-якого $k \in \mathbb{Z}$, $I_{k+2}^{(1)}(a) = I_k^{(1)}(a)$, $I_{k+2}^{(2)}(a) = I_k^{(2)}(a)$. Значить, система (4) періодична по φ з періодом 2π і періодична по t з періодом $2\pi/\omega$. Для неї вірне таке твердження.

Теорема. *Нехай функції $f(x, y)y$, $g(x, y)$, $I(x)$, що характеризують систему*

$$\frac{dx}{dt} = \omega y + \varepsilon f(x, y)y,$$

$$\frac{dy}{dt} = -\omega x + \varepsilon g(x, y) \text{ при } y \neq 0,$$

$$\Delta y|_{y=0} = \varepsilon I(x),$$

визначені, неперервні і задовольняють умову Ліпшіца відносно x, y *для* x, y *з області* $\alpha^2 \leq x^2 + y^2/\omega^2 \leq \beta^2$, *де* α, β — *деякі сталі, що задовольняють умови*

$$\beta > \alpha > 0.$$

Припустимо, що рівняння

$$A(a) = \int_0^{2\pi} [f(a\cos\varphi, a\sin\varphi)a\cos\varphi + g(a\cos\varphi, a\sin\varphi)]\sin\varphi\, d\varphi = 0 \qquad (5)$$

має розв'язок $a = a_0$, *що належить відрізку* $\alpha \leq a \leq \beta$ *разом з деяким своїм* ρ*-околом і такий, що цей розв'язок не перетворює ліву частину рівняння* $A(a) = 0$ *ні в максимум, ні в мінімум.*

Тоді можна вказати таке $\varepsilon_0 > 0$, *що для всіх* $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ *система* (1), (2) *має однопараметричну сім'ю періодичних розв'язків*

$$x = x_0(\omega_1(t+\tau), \varepsilon) = a(\omega_1(t+\tau))\cos\varphi(\omega_1(t+\tau)),$$

$$y = y_0(\omega_1(t+\tau), \varepsilon) = a(\omega_1(t+\tau))\sin\varphi(\omega_1(t+\tau)),$$

що задовольняє нерівність $|a(t) - a_0| + |\omega_1 - \omega - \varepsilon\overline{\Delta}(a_0)| \leq \eta(\varepsilon)$, *в якій* τ — *довільна стала,* $\eta(\varepsilon)$ — *стала, що прямує до нуля при* ε *прямує до нуля,*

$$\overline{\Delta}(a_0) = -\frac{B(a_0)}{a_0} - \frac{\big(I(a_0) - I(-a_0)\big)\omega}{2\pi a_0}, \qquad (6)$$

$$B(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [g(a\cos\varphi, a\sin\varphi)\cos\varphi - f(a\cos\varphi, a\sin\varphi)a\sin^2\varphi]\, d\varphi, \qquad (7)$$

Доведення. Припустимо, що система (1), (2) має періодичний розв'язок. Завдяки автономності системи (1), (2) функція, отримана з цього розв'язку шляхом заміни t на $t+\tau$, теж є періодичним розв'язком. Тому можна вважати, що для періодичного розв'язку (1), (2) $y(0) = 0$, $x(0) > 0$.

Позначимо через ν частоту цього розв'язку. Моменти t_k імпульсного впливу визначаються співвідношеннями

$$\nu t_{k_+} = 2k\pi, \quad \nu t_{k_-} = \pi + 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2 \ldots,$$

а стрибки в ці моменти визначаються рівністю

$$\Delta y = \varepsilon I(x) = \begin{cases} \varepsilon I_+ & \text{при } x > 0; \\ \varepsilon I_- & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

В силу періодичності розв'язку системи I_+, I_- — сталі для всіх t_{k_+}, t_{k_-} відповідно.

Таким чином, періодичний розв'язок (1), (2) задовольняє систему

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = \omega y + \varepsilon f(x, y)y \\ & && \text{при } \nu t \neq k\pi, \\ &\frac{dy}{dt} = -\omega x + \varepsilon g(x, y) \\ &\Delta y = \varepsilon I_+ && \text{при } \nu t = 2k\pi, \\ &\Delta y = \varepsilon I_- && \text{при } \nu t = \pi + 2k\pi, \end{aligned} \qquad (8)$$

де $k = 0, 1, 2 \ldots$.

З іншого боку, якщо система (8) має для деяких ν і I_+, I_- періодичні розв'язки з періодом 2π відносно νt

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases} \tag{9}$$

то (9) буде розв'язком (1), (2), якщо

$$\begin{gathered} y(0-0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{\nu}-0\right) = 0, \\ I_+ = I(x_+), \quad x_+ = x\left(\frac{2\pi}{\nu}\right) > 0, \\ I_- = I(x_-), \quad x_- = x\left(\frac{\pi}{\nu}\right) < 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Таким чином, щоб відшукати періодичний розв'язок системи (1), (2), потрібно знайти 2π-періодичні відносно νt розв'язки системи (8) і підібрати параметри ν, I_+, I_- так, щоб вони задовольняли (10).

Періодичні розв'язки потрібно шукати при умові, що $\nu \approx \omega$. Подамо ν у вигляді $\nu = \omega + \varepsilon\overline{\Delta}$, де $\overline{\Delta}$ — параметр, який треба визначити.

Систему (8) перепишемо у вигляді

$$\begin{gathered} \frac{dx}{dt} = \nu y + \varepsilon f(x,y)y - \varepsilon\overline{\Delta} y, \\ \frac{dy}{dt} = -\nu x + \varepsilon g(x,y) + \varepsilon\overline{\Delta} x \ \text{ при } \nu t \neq k\pi, \\ \Delta y|_{\nu t = 2k\pi} = \varepsilon I_+, \\ \Delta y|_{\nu t = \pi + 2k\pi} = \varepsilon I_-, \quad k = 0, 1, 2 \ldots . \end{gathered} \tag{11}$$

Зробимо в (11) заміну змінних: $x = \tilde{x} + \varepsilon I_+ \psi_+(\nu t) + \varepsilon I_- \psi_-(\nu t)$, де

$$\psi_+(\nu t) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos k\nu t}{k^2-1}\right), \quad \psi_-(\nu t) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos k\nu t}{k^2-1}\right),$$

$$y = z + \varepsilon I_+ \phi_+(\nu t) + \varepsilon I_- \phi_-(\nu t),$$

де

$$\phi_+(\nu t) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k \sin k\nu t}{k^2-1}, \quad \phi_-(\nu t) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k k \sin k\nu t}{k^2-1}.$$

Одержимо систему (12), рівносильну (11):

$$\begin{gathered} \frac{d\tilde{x}}{dt} = \nu z + \varepsilon f \cdot (z + \varepsilon I_+ \phi_+ + \varepsilon I_- \phi_-) - \varepsilon\overline{\Delta}(z + \varepsilon I_+ \phi_+ + \varepsilon I_- \phi_-), \\ \frac{dz}{dt} = -\nu \tilde{x} + \varepsilon g + \varepsilon\overline{\Delta}(\tilde{x} + \varepsilon I_+ \psi_+ + \varepsilon I_- \psi_-) + \frac{\varepsilon}{\pi}(I_+ - I_-) \cos \nu t. \end{gathered} \tag{12}$$

Співвідношення (10) запишуться так:

$$\begin{gathered} z(0-0) - \frac{\varepsilon I_+}{2} = 0, \quad z\left(\frac{\pi}{\nu}-0\right) - \frac{\varepsilon I_-}{2} = 0, \quad I_+ = I(x_+), \quad I_- = I(x_-), \\ x_+ = \tilde{x}(0) + \frac{5\varepsilon I_+}{4\pi} + \frac{3\varepsilon I_-}{4\pi} > 0, \quad x_- = \tilde{x}\left(\frac{\pi}{\nu}\right) + \frac{3\varepsilon I_+}{4\pi} + \frac{5\varepsilon I_-}{4\pi} < 0. \end{gathered} \tag{13}$$

Отже, треба знайти періодичний розв'язок системи (12) періода 2π відносно

νt, що задовольняє співвідношення (13). Для цього зробимо заміну змінних у системі (12), відкинувши в ній попередньо члени порядку ε^2.

Покладемо $\tilde{x} = a\cos\varphi$, $z = a\sin\varphi$, $\varphi = -\nu t + \theta$. В результаті заміни одержимо таку систему рівнянь:

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon(fa\sin\varphi\cos\varphi + g\sin\varphi) + \frac{\varepsilon\nu}{\pi}(I_+ - I_-)\cos\nu t\sin\varphi,$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\varepsilon}{a}(g\cos\varphi - fa\sin^2\varphi) + \varepsilon\overline{\Delta} + \frac{\varepsilon\nu}{\pi a}(I_+ - I_-)\cos\nu t\cos\varphi. \tag{14}$$

Співвідношення (13) з точністю до ε набирають вигляду

$$a_0\sin\theta_0 = 0, \quad I_+ = I(x_+), \quad I_- = I(x_-),$$
$$x_+ = a_0\cos\theta_0 + \frac{\varepsilon}{4\pi}(5I_+ + 3I_-), \quad x_- = -a_0\cos\theta_0 + \frac{\varepsilon}{4\pi}(3I_+ + 5I_-) < 0, \tag{15}$$

де $a_0 = a(0)$, $\theta_0 = \theta(0)$.

За умовою теореми функції $f(x, y)y$, $g(x, y)$, $I(x)$ в деякій області $\nu^2\alpha^2 \leq \leq \nu^2x^2 + y^2 \leq \beta^2\nu^2$ задовольняють умову Ліпшіца відносно x, y і неперервні по всіх аргументах. Тоді, згідно з [4], система (14) є при малих ε T-системою ($T = = 2\pi/\nu$) у смузі

$$0 < \alpha \leq a \leq \beta. \tag{16}$$

Тому будь-яка внутрішня точка смуги (16) має Δ-сталу (див. [4], теорема 1) і ця стала визначається з точністю до величини ε^2 з системи

$$\Delta_1 = \varepsilon A(a_0) + \frac{\varepsilon\nu}{2\pi}(I_+ - I_-)\sin\theta_0 + \varepsilon^2\ldots,$$

де

$$A(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[f(a\cos\varphi, a\sin\varphi)a\cos\varphi + g(a\cos\varphi, a\sin\varphi)]\sin\varphi\, d\varphi,$$

$$\Delta_2 = \varepsilon\overline{\Delta} + \frac{\varepsilon}{a_0}B(a_0) + \frac{\varepsilon\nu}{2\pi a_0}(I_+ - I_-)\cos\theta_0 + \varepsilon^2\ldots,$$

де

$$B(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[g(a\cos\varphi, a\sin\varphi)\cos\varphi - f(a\cos\varphi, a\sin\varphi)a\sin^2\varphi]\, d\varphi.$$

Згідно з [4] розв'язок системи (14) є періодичним з періодом 2π відносно νt, якщо a_0, θ_0 задовольняють співвідношення

$$\varepsilon A(a_0) + \frac{\varepsilon\nu}{2\pi}(I_+ - I_-)\sin\theta_0 + \varepsilon^2\ldots = 0, \tag{17}$$

$$\varepsilon\overline{\Delta} + \frac{\varepsilon}{a_0}B(a_0) + \frac{\varepsilon\nu}{2\pi a_0}(I_+ - I_-)\cos\theta_0 + \varepsilon^2\ldots = 0. \tag{18}$$

Крім того, в силу того ж наслідку з [4], вказаний періодичний розв'язок є границею такої послідовності:

$$a_n(t) = a_0 + \varepsilon\int_0^t\left(F_1(t, a_{n-1}(t), \theta_{n-1}(t), \varepsilon) - \overline{F_1(t, a_{n-1}(t), \theta_{n-1}(t), \varepsilon)}\right)dt,$$

$$\theta_n(t) = \theta_0 + \varepsilon\int_0^t (F_2(t, a_{n-1}(t), \theta_{n-1}(t), \varepsilon) - \overline{F_2(t, a_{n-1}(t), \theta_{n-1}(t), \varepsilon))}\,dt,$$

де $\varepsilon F_1(t, a, \theta)$ і $\varepsilon F_2(t, a, \theta)$ — праві частини відповідно першого і другого рівнянь системи (14)

$$\overline{F(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\,dt, \qquad T = \frac{2\pi}{\nu}, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Зокрема, при $n = 1$ з точністю до величин порядку ε^2 знаходимо

$$a(t) = a_0 + \varepsilon\int_{\theta_0}^{-\nu t+\theta_0} (f a_0 \sin\varphi\cos\varphi + g\sin\varphi - A(a_0))\,d\varphi +$$

$$+ \frac{\varepsilon\nu}{\pi}\int_0^t (I_+ - I_-)\left[\cos\nu\tau\sin(-\nu\tau+\theta_0) - \frac{1}{2}\sin\theta_0\right]d\tau =$$

$$= a_0 + \varepsilon\int_{\theta_0}^{-\nu t+\theta_0} (f a_0 \sin\varphi\cos\varphi + g\sin\varphi - A(a_0))\,d\varphi +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{\pi}(I_+ - I_-)\frac{\cos(2\nu t-\theta_0) - \cos\theta_0}{4},$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \varepsilon\int_{\theta_0}^{-\nu t+\theta_0}\left(\frac{1}{a_0}g\cos\varphi - f\sin^2\varphi - \frac{1}{a_0}B(a_0)\right)d\varphi +$$

$$+ \frac{\varepsilon\nu}{\pi a_0}\int_0^t (I_+ - I_-)\left[\cos\nu\tau\cos(-\nu\tau+\theta_0) - \frac{1}{2}\cos\theta_0\right]d\tau =$$

$$= \theta_0 + \varepsilon\int_{\theta_0}^{-\nu t+\theta_0}\left(\frac{1}{a_0}g\cos\varphi - f\sin^2\varphi - \frac{1}{a_0}B(a_0)\right)d\varphi +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{\pi a_0}(I_+ - I_-)\frac{\sin(2\nu t-\theta_0) - \sin\theta_0}{4}.$$

З рівняння (18) маємо

$$\overline{\Delta}(a_0, \theta_0, I_+, I_-) = -\frac{B(a_0)}{a_0} - \frac{(I_+ - I_-)\omega}{2\pi a_0}\cos\theta_0.$$

Періодичними розв'язками вихідної системи (1), (2) є лише ті періодичні розв'язки (14), початкові значення яких задовольняють співвідношення (15), (17). Відшукаємо ці початкові значення, розв'язавши систему співвідношень (15), (17) сумісно. Із (15) випливає

$$\sin\theta_0 = 0, \qquad \cos\theta_0 > 0,$$

тому

$$\cos\theta_0 = 1. \tag{19}$$

Підставляючи (19) в (15), одержуємо рівняння

$$I_+ = I\left(a_0 + \frac{\varepsilon}{4\pi}(5I_+ + 3I_-)\right), \tag{20}$$

$$I_- = I\left(-a_0 + \frac{\varepsilon}{4\pi}(3I_+ + 5I_-)\right). \tag{21}$$

Внаслідок того, що $I(y)$ задовольняє умову Ліпшіца, з (20), (21) видно, що з точністю до величини порядку ε

$$I_+ = I(a_0), \quad I_- = I(-a_0). \tag{22}$$

Підставляючи (22), (19) в (17), одержуємо рівняння $A(a_0) = 0$.

Отже, система (1), (2) має періодичний розв'язок, коли $A(a_0) = 0$ на інтервалі $\alpha < a_0 < \beta$. Для частоти отримаємо співвідношення

$$\nu \approx \omega - \varepsilon\left(\frac{B(a_0)}{a_0} + \frac{(I(a_0) - I(-a_0))\omega}{2\pi a_0}\right).$$

Згідно з заміною, періодичні розв'язки системи визначаються з точністю до величини порядку $\delta(\varepsilon)$, $\delta(\varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0$, таким чином:

$$x(t) = \frac{\varepsilon}{\pi}\left(I(a_0)\left(\frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\cos k\nu(t+\tau)}{k^2-1}\right) + I(-a_0)\left(\frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k\cos k\nu(t+\tau)}{k^2-1}\right)\right) +$$
$$+ a(t+\tau)\cos(-\nu(t+\tau) + \theta(t+\tau)),$$

$$y(t) = \frac{\varepsilon}{\pi}\left(I(a_0)\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k\sin k\nu(t+\tau)}{k^2-1}\right) + I(-a_0)\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k k\sin k\nu(t+\tau)}{k^2-1}\right)\right) +$$
$$+ a(t+\tau)\sin(-\nu(t+\tau) + \theta(t+\tau)),$$

де $a(t)$, $\theta(t)$ — знайдені функції, a_0 — додатний корінь рівняння $A(a_0) = 0$, τ — довільна стала. Теорему доведено.

Зауваження **1.** Користуючись результатами роботи [5], із системи (4) можна одержати рівняння першого наближення

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A(a_0),$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon\theta_0(a) + \frac{(I(a) - I(-a))\varepsilon\omega}{2\pi a}, \tag{23}$$

де

$$A_0(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[f(a\cos\varphi, a\sin\varphi)a\cos\varphi + g(a\cos\varphi, a\sin\varphi)]\sin\varphi\, d\varphi,$$

$$\theta_0(a) = \frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi}[g(a\cos\varphi, a\sin\varphi)\cos\varphi - f(a\cos\varphi, a\sin\varphi)a\sin^2\varphi]\, d\varphi.$$

Згідно із схемою методу усереднення, періодичними розв'язками (1), (2), що піддаються імпульсному впливу двічі за період, в першому наближенні будуть

$$x = a_0\cos(-\omega t + \varepsilon\Delta(a_0)t + \varphi_0),$$
$$y = a_0\sin(-\omega t + \varepsilon\Delta(a_0)t + \varphi_0), \tag{24}$$

де a_0 — додатні корені рівняння стаціонарних амплітуд:

$$\int_0^{2\pi}[f(a\cos\varphi, a\sin\varphi)a\cos\varphi + g(a\cos\varphi, a\sin\varphi)]\sin\varphi\, d\varphi = 0, \tag{25}$$

$\Delta(a_0)$ — поправки до частоти власних коливань, що відповідають кореням a_0. Вони визначаються з рівняння

$$\Delta(a_0) = \frac{1}{2\pi a_0}\int_0^{2\pi}[g(a_0\cos\varphi, a_0\sin\varphi)\cos\varphi - f(a_0\cos\varphi, a_0\sin\varphi)a_0\sin^2\varphi]\,d\varphi +$$

$$+\frac{\omega}{2\pi a_0}[I(a_0)-I(-a_0)], \qquad (26)$$

φ_0 — довільна стала.

Порівнюючи (25) і (5), переконуємось у співпаданні правих частин цих формул з точністю до величин порядку ε. Порівнюючи також (26) та (6), бачимо, що при виконанні умов теореми корені (5) породжують періодичні розв'язки (1), (2) близькі до (24). Таким чином, доведена теорема обгрунтовує схему методу усереднення, розроблену в [5] для систем типу (1), (2).

Зауваження 2. Рівняння першого наближення (23) дають усереднену картину коливань, але не виявляють явищ, що виникають завдяки наявності миттєвого збурення. Для відшукання таких явищ потрібно розглянути щонайменше покращений наближений перший розв'язок.

Якщо $a = a(t)$, $\theta = \theta(t)$ — розв'язок системи (23), тобто усередненої системи, то згідно з [6] покращений наближений перший розв'язок системи (1), (2) запишеться у вигляді

$$\overline{a} = a + \varepsilon\overline{A}(a,\varphi),$$

$$\overline{\theta} = \theta + \varepsilon\overline{\theta}(a,\varphi) + \frac{\varepsilon I(a)}{\pi a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k(t-t_0(\theta))}{k} + \frac{\varepsilon I(-a)}{\pi a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k(t-t_1(\theta))}{k},$$

де $\overline{A}(a,\varphi)$ — первісна функції

$$[f(a\cos\varphi, a\sin\varphi)a\cos\varphi + g(a\cos\varphi, a\sin\varphi)]\sin\varphi$$

з нульовим середнім по φ; $\overline{\theta}(a,\varphi)$ — первісна функції

$$\frac{1}{a}[f(a\cos\varphi, a\sin\varphi)a\cos\varphi + g(a\cos\varphi, a\sin\varphi)]\cos\varphi - f(a\cos\varphi, a\sin\varphi)$$

з нульовим середнім по φ. Оскільки сума

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\varphi}{k}$$

є рядом Фур'є функції $(\pi-\varphi)/2$, $0<\varphi<2\pi$, то формули (5) визначають $\overline{a}$ і $\overline{\theta}$ як розривні функції з точками розриву $t-t_0(\theta)=2k\pi$, $t-t_1(\theta)=2k\pi$, $k\in$ $\in\mathbb{Z}$.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 502 с.
2. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1971. – 440 с.
3. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* К вопросу обоснования метода усреднения для дифференциальных уравнений второго порядка с импульсами // Укр. мат. журн. – 1974. – **24**, № 3. – С. 411–418.
4. *Самойленко А. М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. I // Там же. – 1965. – **17**, № 4. – С. 82–93.
5. *Самойленко А. М.* Метод усреднения в системах с толчками // Мат. физика. – 1971. – **8**, № 9. – С. 101–117.
6. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. – World Scientific, 1995. – 462 p.

Одержано 31.07.96