УДК 517.919

В. А. Еременко (Терноп. акад. нар. хоз-ва)

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ ВЫРОЖДЕННЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

We consider a scalar linear ordinary differential equation of second order, whose coefficient of the second derivative may change the sign when vanishing. For this equation, we obtain sufficient conditions for the existence of a periodic solution in the case of arbitrary periodic nonhomogeneity.

Для скалярного лінійного звичайного диференціального рівняння другого порядку, коефіцієнт при другій похідній якого, набуваючи нульового значення, може змінювати знак, одержано достатні умови існування періодичного розв'язку для довільної періодичної неоднорідності.

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка, неразрешенные относительно второй производной, недостаточно изучены. В то же время информация о решениях таких уравнений важна не только в теоретическом плане.

В работе [1] получены достаточные условия существования периодического решения, а также приближенного построения его для системы вида

$$x^{(2)} = A(t)x + f(t, x, x^{(1)}, x^{(2)}), \qquad x \in R^n. \tag{1}$$

В работе [2] обоснован метод Галеркина приближенного построения периодического решения системы вида

$$A(t)x^{(2)} + B(t)x^{(1)} + C(t)x = f(t) \tag{2}$$

при произвольном периодическом векторе неоднородности $f(t)$, где матрица $A(t)$ вырождается на множестве произвольной структуры, $(A^{(1)}(t))^* \equiv A^{(1)}(t)$, $B^*(t) \equiv B(t)$; звездочкой обозначена операция транспонирования матрицы. В частности, для скалярного уравнения (2) достаточные условия существования периодического решения состоят в достаточной гладкости коэффициентов, выполнении неравенств $A(t) \le 0$, $C(t) > 0$, $\forall\, t \in R$, а также в определенной зависимости величины $C(t)$ от $|A^{(2)}(t)|$ и $|B^{(1)}(t)|$.

В связи с этим результатом естественно возникает вопрос: имеет ли скалярное уравнение (2) периодическое решение, если $A(t)$ меняет знак или когда $B(t)$ по модулю больше $C(t)$? Положительный ответ вместе с обоснованием метода Галеркина построения периодического решения является содержанием данной работы.

Отметим, что уравнение (2) можно записать в виде (1), однако нетрудно убедиться в том, что условие 2 работы [1] невыполнимо даже в том случае, когда $B(t)$ и $C(t)$ будут удовлетворять каким угодно условиям. С другой стороны, скалярное уравнение (2) эквивалентно некоторой системе первого порядка, однако последняя не является положительной симметричной системой (см., например, [3, 4]), для которой построена содержательная теория. Тем не менее оказалось возможным получение характерных для этой теории априорных оценок для дифференциального оператора, порожденного системой первого порядка, которая эквивалентна уравнению (2).

2. Введем необходимые обозначения и сформулируем вспомогательные результаты.

Следуя [3], обозначим через $C^r(\Gamma_m)$ пространство r раз непрерывно дифференцируемых векторных или матричных функций, определенных на m-мерном торе Γ_m, через $H^r(\Gamma_m)$ пространство функций, суммируемых с квадратом на Γ_m вместе с обобщенными производными до порядка r включительно, через $(\cdot,\cdot)_r$ скалярное произведение в $H^r(\Gamma_m)$, а через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ скалярное произведение в R^n.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор

$$L = \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi_\nu} - P(\varphi),$$

где $P(\varphi)$ — $(n\times n)$-мерная матричная, $a_\nu(\varphi)$, $\nu=\overline{1,m}$, — скалярные функции, принадлежащие $C^r(\Gamma_m)$. В [3] (гл. III, §15) доказано, что выполнение неравенства $\beta_0(\varphi)+s\alpha_0(\varphi)-\mu(\varphi)/2\geq\gamma$, $s=0,1,\ldots,r$, где γ — сколь угодно малое положительное число,

$$\min_{\|\Psi\|=1}\left\langle\frac{\partial a(\varphi)}{\partial\varphi}\Psi,\Psi\right\rangle \geq \alpha_0(\varphi), \qquad \max_{\|x\|=1}\langle P(\varphi)x,x\rangle \leq -\beta_0(\varphi),$$

$$\mu(\varphi) = \sum_{\nu=1}^{m}\frac{\partial a_\nu(\varphi)}{\partial\varphi_\nu}, \qquad \varphi\in\Gamma_m,$$

для каждого s, $1\leq s\leq r$, и произвольного $u\in H^{s+1}(\Gamma_m)$ влечет справедливость оценок

$$(Lu,u)_s \geq \gamma_1\|u\|_s^2-\delta_1\|u\|_0^2. \tag{3}$$

Здесь γ_1 и δ_1 — положительные постоянные, не зависящие от u.

Для линейного дифференциального оператора

$$L_1 = a(t)\frac{d}{dt}+b(t), \tag{4}$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — $(n\times n)$-мерные матрицы, используя технику получения априорных оценок (3), можно доказать следующее утверждение.

Лемма. *Пусть оператор L_1 удовлетворяет таким условиям:*

1) $a,b\in C^r(\Gamma_1)$; $a^*(t)\equiv a(t)$ $\forall\, t\in\Gamma_1$;

2) *для любого целого s, $s=0,1,\ldots,r$, выполняется неравенство*

$$\min_{\|\xi\|=1}\left\langle\left(b(t)+\frac{1}{2}(2s-1)a^{(1)}(t)\right)\xi,\xi\right\rangle \geq \gamma, \qquad \gamma=\mathrm{const}>0. \tag{5}$$

Тогда для любого $u(\varphi)\in H^1(\Gamma_1)$

$$(L_1u,u)_0 \geq \gamma\|u\|_0^2 \tag{6}$$

и для каждого s, $1\leq s\leq r$, и произвольного $u\in H^{s+1}(\Gamma_1)$ справедливо неравенство

$$(L_1u,u)_s \geq \gamma_1\|u\|_s^2-\delta_1\|u\|_0^2, \tag{7}$$

где положительные постоянные γ_1 и δ_1 не зависят от u.

Обозначим через S_n оператор, ставящий в соответствие интегрируемой с квадратом функции $g(t)$ отрезок ее ряда Фурье длины n:

$$S_n g(t) = \sum_{|k|\leq n} g_k e^{ikt}, \qquad g_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)e^{-ikt}dt.$$

3. Сформулируем основное утверждение.

Теорема. *Пусть относительно скалярного уравнения* (2) *выполняются такие условия:*

1) $A, B, C, f \in C^r(\Gamma_1)$, $r \geq 2+k$, $k \geq 1$;

2) *для всех* $t \in \Gamma_1$

$$B(t)C(t) \neq 0, \quad |C(t)| > \max\left\{\frac{1}{2}|B(t)|, |A(t)|\right\}; \tag{8}$$

3) *существует положительное число* γ *такое, что для всех* $t \in \Gamma_1$ *и любого целого* s, $s = 1, 2, \ldots, r$, *справедливы неравенства*

$$\frac{2|a_2(t)| - a_2^2(t)}{1 + a_1(t)} - \frac{1}{2}\left(a_1^{(1)}(t)\operatorname{sign} a_2(t) + \Delta(t)\right) \geq \gamma, \tag{9}$$

$$\frac{2|a_2(t)| - a_2^2(t)}{1 + a_1(t)} + \left(s - \frac{1}{2}\right)\left(a_1^{(1)}(t)\operatorname{sign} a_2(t) - \Delta(t)\right) \geq \gamma, \tag{10}$$

где

$$\Delta = \left(\left(a_1^{(1)}(t)\right)^2 + 4\left(\left(\frac{a_1|a_2|}{1+a_1}\right)^{(1)}\right)^2\right)^{1/2}, \tag{11}$$

$$a_1 = AC^{-1}, \quad a_2 = BC^{-1}. \tag{12}$$

Тогда уравнение (2) *имеет единственное решение* $x = x_0(t) \in C^{k+1}(\Gamma_1)$. *Приближения к* x_0 *находятся из системы уравнений*

$$S_n\tilde{L}_1 u_n(t) = S_n g(t), \tag{13}$$

где

$$\tilde{L}_1 u = \tilde{a}(t)u^{(1)} + \tilde{b}(t)u, \tag{14}$$

$$\tilde{a} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} fC^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$u_n(t) = \sum_{|k| \leq n} u_k e^{ikt}. \tag{16}$$

Система (13) *имеет решение* $u_n(t)$ *для всех* $n \geq 0$, *а последовательность* $\{y_{1,n}(t)\}$ *при* $n \to \infty$ *сходится в пространстве* $C^k(\Gamma_1) \cap H^{r-1}(\Gamma_1)$ *к функции* $x_0(t)$, *причем скорость сходимости определяется неравенством*

$$|x_0(t) - y_{1,n}(t)|_s \leq \alpha n^{-(k-s-1)}\|f\|_r, \quad 0 \leq s \leq k, \tag{17}$$

где α — *некоторая положительная постоянная, не зависящая от* n *и* f, $0 \leq s \leq r-1$.

Доказательство. Разделив уравнение (2) на $C(t)$ и совершив замену $y_1 = x$, $y_2 = x^{(1)}$, получим с учетом (12), (14), (15) равносильную уравнению (2) систему

$$\tilde{L}_1 u = g(t). \tag{18}$$

Используя лемму, установим априорные оценки для оператора $\tilde{L}_1$. С этой целью введем в рассмотрение матрицу

$$V(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) & a_1(t)v_2(t) \\ v_2(t) & v_1(t) \end{pmatrix}, \tag{19}$$

неизвестные элементы v_1 и v_2 которой определим из условия положительной определенности матрицы $V(t)\tilde{b}(t)$. С учетом (15) и (19) получим

$$a = V\tilde{a} = \begin{pmatrix} a_1v_1 & a_1v_2 \\ a_1v_2 & v_1 \end{pmatrix}, \quad b = V\tilde{b} = \begin{pmatrix} a_2v_1 - a_1v_2 & v_1 \\ a_2v_2 - v_1 & v_2 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Минимальное собственное значение матрицы $\frac{1}{2}(b+b^*)$ имеет вид

$$\lambda_{\min}\left(\frac{1}{2}(b+b^*)\right) = \frac{1}{2}\left(a_2v_1 + (1-a_1)v_2 - \sqrt{D}\right), \tag{21}$$

где

$$D = (a_2v_1 + (1-a_1)v_2)^2 - 4a_2v_1v_2 + (4a_1 + a_2^2)v_2^2.$$

Выбором v_1 и v_2 минимизируем $D(t)$ в (21). С этой целью представим $D(t)$ в виде

$$D(t) = (a_2v_1 - (1+a_1)v_2)^2 + a_2^2v_2^2. \tag{22}$$

Поэтому если в (22) положить

$$v_2(t) = \frac{a_2(t)v_1}{1+a_1(t)}, \quad v_1 = \operatorname{sign} a_2(t), \tag{23}$$

то

$$\lambda_{\min}\left(\frac{1}{2}(b+b^*)\right) = \frac{2|a_2(t)| - a_2^2(t)}{2(1+a_1(t))}. \tag{24}$$

Отметим, что матрица $V(t)$ невырожденная, так как согласно (23), (8) и (12)

$$\det V(t) \geq \left(\frac{1-a_1(t)}{1+|a_1(t)|}\right)^2 > 0 \quad \forall\, t \in \Gamma_1.$$

С учетом (20), (23) и (11) характеристические корни матрицы $a^{(1)}(t)$ имеют вид $\lambda_{1,2}(a^{(1)}) = 1/2\left(a_1^{(1)} \operatorname{sign} a_2 \pm \Delta\right)$. Из (20) и (24) следует, что матрица $a(t)$ симметричная, а матрица $b(t)$ положительно определенная, если $0 < |a_2(t)| < 2$, $|a_1(t)| < 1$. Поэтому для оператора L_1, определенного (4), где $a(t)$ и $b(t)$ имеют вид (20), выполняются все условия леммы каждый раз, когда справедливы условия теоремы. При этом, в частности, выполнение неравенства (9) влечет выполнение (5) для $s = 0$, а (10) для $s \geq 1$.

В соответствии с леммой для оператора L_1 выполняются априорные неравенства (6) и (7) или

$$(V(t)\tilde{L}_1 u, u)_0 \geq \gamma \|u\|_0^2 \quad \forall\, u \in H^1(\Gamma_1), \tag{25}$$

$$(V(t)\tilde{L}_1 u, u)_s \geq \gamma_1 \|u\|_s^2 - \delta_1 \|u\|_0^2 \quad \forall\, u \in H^{s+1}(\Gamma_1), \quad 1 \leq s \leq r, \tag{26}$$

где постоянные γ, γ_1 и δ_1 не зависят от u. Применяя неравенство Шварца к левым частям (25) и (26), получаем оценки

$$\| \tilde{L}_1 u \|_0 \geq \gamma_0 \| u \|_0 \quad \forall\, u \in H^1(\Gamma_1), \tag{27}$$

$$\nu\| \tilde{L}_1 u \|_s \| u \|_s \geq \gamma_1 \|u\|_s^2 - \delta_1 \|u\|_0^2 \quad \forall\, u \in H^{s+1}(\Gamma_1), \quad 1 \leq s \leq r, \tag{28}$$

где

$$\gamma_0 = \gamma\left(\max_t \lambda_{\max}\left(V^*(t)V(t)\right)\right)^{-1/2} =$$

$$= \frac{\gamma}{2}\left(\max_t\left(2 + \frac{(1+a_1^2)a_2^2}{(1+a_1)^2} + \sqrt{\frac{a_2^4(1+a_1^2)^2}{(1+a_1)^4} + 4a_2^2}\right)\right)^{-1/2},$$

$$\nu = \nu(|V(t)|_r) > 0.$$

Согласно методу Галеркина n-мерное приближение к периодическому решению системы (18) будем искать в виде (16), определяя коэффициенты u_k из системы уравнений (13). Для обоснования этого метода по схеме доказательства леммы 1, теоремы 1 из [3] (гл. III, §14) с использованием оценок (27), (28) показывается разрешимость системы уравнений (13) для всех $n \geq 0$ и сходимость последовательности $\{u_n(t)\}$ к точному решению $u^0(t)$ системы (18) при $n \to \infty$. Аналогично выводится неравенство (17), определяющее скорость сходимости. В соответствии с заменой переменных при переходе от уравнения (2) к системе (18) компонента y_1 вектора $u^0(t)$ и будет единственным решением $x_0(t)$ уравнения (2). При этом из включения $u^0(t) \in C^k(\Gamma_1)$ следует, что $x_0(t) \in C^{k+1}(\Gamma_1)$, а предполагаемая в теореме гладкость коэффициентов уравнения обусловлена необходимостью привлечения теоремы вложения С. Л. Соболева.

4. Рассмотрим пример, иллюстрирующий теорему.

Для уравнения

$$(p\sin t)x^{(2)} - (1 + 0{,}1\cos t)x^{(1)} - x = f(t) \tag{29}$$

найдем значения положительного параметра p, при которых оно имеет для любой неоднородности $f(t) \in C^3(\Gamma_1)$ периодическое решение из $C^2(\Gamma_1)$.

Очевидно, что первые два условия теоремы выполняются, если $p < 1$. В соответствии с (11) и (12) $a_1(t) = -p\sin t$, $a_2(t) = 1 + 0{,}1\cos t$,

$$\frac{2|a_2(t)| - a_2^2(t)}{1 + a_1(t)} = \frac{1 - 0{,}01\cos^2 t}{1 - p\sin t}, \tag{30}$$

$$\Delta(t) \leq p\left(|\cos t| + \frac{2\left|\cos t + 0{,}1\cos 2t + 0{,}1p\sin^3 t\right|}{(1 - p\sin t)^2}\right). \tag{31}$$

Из оценки снизу функции (30) и сверху правой части (31) следует, что для выполнения условия 3 теоремы можно положить $p \leq 0{,}07$. Тогда

$$\frac{2|a_2(t)| - a_2^2(t)}{1 + a_1(t)} > 0{,}9252, \qquad \Delta(t) < 3{,}5599p$$

и усиленные неравенства (9) и (10) с $s = 3$ примут соответственно вид

$$0{,}9252 - 0{,}5(-\cos t + 3{,}5599)p \geq \gamma,$$

$$0{,}9252 + 2{,}5(-\cos t - 3{,}5599)p \geq \gamma.$$

Следовательно, для $p \leq 0{,}07$ существует положительное число $\gamma = \min(0{,}7656;\ 0{,}1272)$, фигурирующее в условии теоремы, и уравнение (29) имеет, согласно теореме, периодическое решение $x_0(t, p) \in C^2(\Gamma_1)$ для произвольной функции $f(t) \in C^3(\Gamma_1)$; при этом методом Галеркина можно найти его приближение с наперед заданной точностью.

Отметим, что в рамках указанного подхода повышение гладкости достигается ценой уменьшения параметра p.

1. *Елисеенко М. Н.* О периодических решениях обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, не разрешенных относительно производной // Дифференц. уравнения. – 1985. – **21,** № 9. – С. 1618–1621.
2. *Еременко В. А.* Периодические решения вырожденных линеных систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. – Тернополь, 1986. – 16 с. – Деп. в УкрНИИНТИ; № 2800-Ук.
3. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
4. *Мозер Ю.* Быстросходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные уравнения // Успехи мат. наук. – 1968. – **23**, вып. 4. – С. 179–238.

Получено 28.12.95