УДК 517.5

В. В. Савчук (Волин. ун-т, Луцьк)

ДО ТЕОРЕМИ ПРО СЕРЕДНЄ ДЛЯ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

A version of mean-value theorem (the formula of finite increments) for analytic functions is proved.

Доводиться одна форма теореми про середнє (формули скінченних приростів) для аналітичних функцій.

С. Чінквіні [1] показав, що для довільної функції $f(z)$, аналітичної в крузі $|z| < r$, $r > 0$, для якої $f''(0) \neq 0$, існує таке r_0, $0 < r_0 < r$, що для будь-яких точок z_0 і z_1 із круга $|z| \leq r_0$ таких, що $z_0 + z_1 = 0$, у крузі $|z| < |z_0| = |z_1|$ знайдеться точка ξ, для якої

$$f(z_1) - f(z_0) = f'(\xi)(z_1 - z_0). \tag{1}$$

А. Шарма [2] за цих же умов, замінивши вимогу $f''(0) \neq 0$ на $f^{(\mathrm{IV})}(0) \neq 0$, уточнив праву частину (1), показавши, що

$$f(z_1) - f(z_0) = f'(0)(z_1 - z_0) + \frac{f'''(\xi)}{4!}(z_1 - z_0)^3, \tag{1$'$}$$

де $|\xi| < |z_1| = |z_0|$.

Ці результати можна розглядати як поширення класичної теореми про середнє на комплексну область. Різні аналоги цієї теореми було отримано в [3 – 6].

В даній роботі далі уточнюється права частина рівності (1) з використанням значень похідних вищих порядків функції $f(\cdot)$, на які, до того ж, не накладається ніяких обмежень.

Теорема 1. *Нехай $f(z)$ — функція, аналітична в замкненому крузі $\overline{D}_R$ деякого радіуса R, $R > 0$, з центром в точці α, $D_R := \{z\colon |z - \alpha| < R\}$. Тоді, яким би не було $n \in \mathbb{Z}^+$, існує r_0, $0 < r_0 \leq R$, яке може залежати тільки від функціїї $f(\cdot)$, таке, що для будь-яких точок z_0, z_1 із круга $D_{r_0} := \{z\colon |z - \alpha| < r_0\}$, для яких $(z_0 + z_1)/2 = \alpha$, у крузі $D_r := \{z\colon |z - \alpha| < r\}$, $r = |z_0 - z_1|/2$, знайдеться принаймні одна точка ξ така, що виконується рівність*

$$f(z_1) - f(z_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k+1)}(\alpha)}{(2k+1)!}\frac{(z_1 - z_0)^{2k+1}}{2^{2k}} + \frac{f^{(2n+3)}(\xi)}{(2n+3)!}\frac{(z_1 - z_0)^{2n+3}}{2^{2n+2}}. \tag{2}$$

Для функцій, які аналітичні в деякій області комплексної площини, з цієї теореми випливають такі наслідки.

Наслідок 1. *Нехай $f(z)$ — функція, аналітична в області $G \subset \mathbb{C}$. Тоді, яким би не було $n \in \mathbb{Z}^+$, існує таке r_0, $r_0 = r_0(f)$, що для будь-яких $z_0, z_1 \in G$ таких, що $|z_0 - z_1| < r_0$, для яких круг $C := \{z\colon |z - (z_0 + z_1)/2| < |z_1 - z_0|/2\}$ повністю лежить в G, знайдеться принаймні одна точка $\xi \in C$ така, що виконується рівність* (2).

Наслідок 2. *Нехай $f(z)$ — функція, аналітична в області $G \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in G$. Тоді, яким би не було $n \in \mathbb{Z}^+$, існує окіл U точки z_0 такий, що для будь-якого $z_1 \in U$ знайдеться принаймні одна точка $\xi \in U$ така, що виконується рівність* (2).

Зазначимо, що при $n = 0$ рівність (2) співпадає з доведеною А. Шарма рівністю (1′). Наслідки 1, 2 є узагальненням результатів Робертсона [5] і Самуельссона [6].

Доведення теореми. Функція $f(z)$ має розклад в ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(z-\alpha)^k, \tag{3}$$

збіжний в замкненому крузі $\overline{D}_R$.

Покладемо

$$R_{2n+1}(f; z) = f(z) - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(z-\alpha)^k = \sum_{k=2n+2}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(z-\alpha)^k.$$

Тоді для будь-яких $z_0, z_1 \in \overline{D}_R$

$$R_{2n+1}(f; z_1) - R_{2n+1}(f; z_0) =$$

$$= f(z_1) - f(z_0) - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}\left[(z_1-\alpha)^k - (z_0-\alpha)^k\right].$$

Легко бачити, що для тих точок $z_0, z_1 \in \overline{D}_R$, для яких $(z_0 + z_1)/2 = \alpha$,

$$(z_1-\alpha)^k - (z_0-\alpha)^k = \begin{cases} 0 & \text{для парних } k; \\ \dfrac{(z_1-z_0)^k}{2^{k-1}} & \text{для непарних } k. \end{cases}$$

В такому випадку

$$R_{2n+1}(f; z_1) - R_{2n+1}(f; z_0) = f(z_1) - f(z_0) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k+1)}(\alpha)}{(2k+1)!}\frac{(z_1-z_0)^{2k+1}}{2^{2k}} =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(2k+1)}(\alpha)}{(2k+1)!}\frac{(z_1-z_0)^{2k+1}}{2^{2k}} = \sum_{k=2n+3}^{\infty} \frac{1+(-1)^{k+1}}{2}\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}\frac{(z_1-z_0)^k}{2^{k-1}}.$$

Враховуючи, що

$$\frac{f^{(2n+3)}(z)}{(2n+3)!} = \sum_{k=2n+3}^{\infty} \binom{k}{2n+3}\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(z-\alpha)^{k-2n-3}, \tag{4}$$

можемо записати

$$\delta_n(f; z) :=$$

$$:= \left[\frac{f^{(2n+3)}(z)}{(2n+3)!}\frac{(z_1-z_0)^{2n+3}}{2^{2n+2}} - \Big(R_{2n+1}(f; z_1) - R_{2n+1}(f; z_0)\Big)\right]\frac{2^{2n+2}}{(z_1-z_0)^{2n+3}} =$$

$$= \sum_{k=2n+4}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}\left\{\binom{k}{2n+3}(z-\alpha)^{k-2n-3} - \frac{1+(-1)^{k+1}}{2}\left(\frac{z_1-z_0}{2}\right)^{k-2n-3}\right\}.$$

З останньої рівності випливає, що у випадку коли $f(z)$ є многочленом степеня $\le 2n+3$, рівність (2) справджується для будь-якого $\xi \in \overline{D}_R$. Тому в подальшому цей випадок не розглядається.

Позначимо через n_0 найменший з номерів $k \ge 2n+4$, для якого $f^{(n_0)}(\alpha) \ne$ $\ne 0$. Тоді

$$\delta_n(f;z) = \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}\left\{\binom{k}{2n+3}(z-\alpha)^{k-2n-3} - \frac{1+(-1)^{k+1}}{2}\left(\frac{z_1-z_0}{2}\right)^{k-2n-3}\right\}.$$

Покладемо

$$g_1(z) = \frac{f^{(n_0)}(\alpha)}{n_0!}\left\{\binom{n_0}{2n+3}(z-\alpha)^{n_0-2n-3} - \frac{1+(-1)^{n_0+1}}{2}\left(\frac{z_1-z_0}{2}\right)^{n_0-2n-3}\right\},$$

$$g_2(z) = \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}\left\{\binom{k}{2n+3}(z-\alpha)^{k-2n-3} + \frac{1+(-1)^{k+1}}{2}\left(\frac{z_1-z_0}{2}\right)^{k-2n-3}\right\},$$

$$C := \left\{z\colon |z-\alpha| = \frac{1}{2}|z_1-z_0|\right\}, \quad r := \frac{1}{2}|z_1-z_0|.$$

Тоді для будь-якого $z\in C$ справедливі оцінки

$$|g_1(z)| \geq \frac{\left|f^{(n_0)}(\alpha)\right|}{n_0!}\left|\binom{n_0}{2n+3}|z-\alpha|^{n_0-2n-3} - \frac{1+(-1)^{n_0+1}}{2}\frac{|z_1-z_0|^{n_0-2n-3}}{2^{n_0-2n-3}}\right| =$$

$$= \frac{\left|f^{(n_0)}(\alpha)\right|}{n_0!}\left\{\binom{n_0}{2n+3} - \frac{1+(-1)^{n_0+1}}{2}\right\}r^{n_0-2n-3},$$

$$|g_2(z)| \leq \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{\left|f^{(k)}(\alpha)\right|}{k!}\left\{\binom{k}{2n+3} + \frac{1+(-1)^{k+1}}{2}\right\}r^{k-2n-3}.$$

Враховуючи, що $\binom{n_0}{2n+3} > 1$, при $n_0 \geq 2n+4$ маємо

$$\left|\frac{g_2(z)}{g_1(z)}\right| \leq \frac{\sum\limits_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{\left|f^{(k)}(\alpha)\right|}{k!}\left\{\binom{k}{2n+3} + \frac{1+(-1)^{k+1}}{2}\right\}r^{k-2n-3}}{\frac{\left|f^{(n_0)}(\alpha)\right|}{n_0!}\left\{\binom{n_0}{2n+3} - \frac{1+(-1)^{n_0+1}}{2}\right\}r^{n_0-2n-3}} =$$

$$= \frac{n_0!\,r}{\left\{\binom{n_0}{2n+3} - \frac{1+(-1)^{n_0+1}}{2}\right\}\left|f^{(n_0)}(\alpha)\right|}\times$$

$$\times \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{\left|f^{(k)}(\alpha)\right|}{k!}\left\{\binom{k}{2n+3} + \frac{1+(-1)^{k+1}}{2}\right\}r^{k-n_0-1} \qquad \forall z\in C. \tag{5}$$

Оскільки ряди (3) і (4) збігаються для $|z-\alpha|\leq R$, то ряд в (5) також збігається для будь-якого $r\leq R$. Отже, права частина в (5) є неперервною функцією дійсної змінної r із значенням нуль в точці $r=0$. З останнього робимо висновок, що існує r_0, $0<r_0\leq R$, таке, що для будь-якого $r\leq r_0$ функція в правій частині (5) менша одиниці.

Отже, якщо $|z_1-z_0|/2 =: r < r_0$, то з нерівності (5) маємо

$$|g_2(z)| < |g_1(z)| \qquad \forall z\in C. \tag{6}$$

Покажемо, що функція $g_1(z)$ має принаймні один нуль всередині C. У випадку, коли n_0 парне, це очевидно $(g_1(\alpha)=0)$. Припустимо, що n_0 — непарне. Тоді, розв'язуючи рівняння

$$g_1(z) := \frac{f^{(n_0)}(\alpha)}{n_0!}\left[\binom{k}{2n+3}(z-\alpha)^{n_0-2n-3} - \left(\frac{z_1-z_0}{2}\right)^{n_0-2n-3}\right] = 0,$$

знаходимо, що всі нулі $g_1(z)$ розміщені на колі $|z-\alpha| = l$, де

$$l = r\binom{n_0}{2n+3}^{-1/(n_0-2n-3)}.$$

Оскільки $\binom{n_0}{2n+3}^{-1/(n_0-2n-3)} < 1$, то $l < r$ і тому функція $g_1(z)$ всередині C має $n_0 - 2n - 3 \geq 1$ нулів.

Враховуючи (6), легко бачити, що функції $g_1(z)$, $g_2(z)$ задовольняють усі умови теореми Руше, за якою функції $g_1(z)$ і $g_1(z) + g_2(z) = \delta_n(f; z)$ всередині C мають однакове число нулів.

Отже, з попередніх міркувань випливає, що існує принаймні одна точка $\xi = \xi(z_0, z_1) \in D_r := \{z: |z-\alpha| < r\}$, $r = |z_1 - z_0|/2 < r_0$, така, що $\delta_n(f; \xi) = 0$.

Теорему доведено.

Використовуючи теорему 1, легко довести таке твердження, яке є поширенням результатів робіт [7, 8] на функції комплексної змінної.

Теорема 2. *Нехай* $n \in \mathbb{Z}^+$, $f_i(z)$, $i = 1, \ldots, 2n+5$, — *функції, аналітичні в замкненому крузі* $\overline{D}_R$ *деякого радіуса* R, $R > 0$, *з центром в точці* α, $\overline{D}_r := \{z: |z-\alpha| < R\}$. *Тоді існує* r_0, $r_0 = r_0(f_1, \ldots, f_{2n+5})$, $0 < r_0 \leq R$, *таке, що для будь-яких точок* z_0, z_1 *із* $D_{r_0} := \{z: |z-\alpha| < r_0\}$, *для яких* $(z_0 + z_1)/2 = \alpha$, *в крузі* $D_r := \{z: |z-\alpha| < r\}$, $r = |z_0 - z_1|/2$, *знайдеться принаймні одна точка* ξ *така, що виконується рівність*

$$\begin{vmatrix} f_1(z_1) & \ldots & f_{2n+5}(z_1) \\ f_1(z_0) & \ldots & f_{2n+5}(z_0) \\ f_1'(\alpha) & \ldots & f_{2n+5}'(\alpha) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1^{(2n+2)}(\alpha) & \ldots & f_{2n+5}^{(2n+2)}(\alpha) \\ f_1^{(2n+3)}(\xi) & \ldots & f_{2n+5}^{(2n+3)}(\xi) \end{vmatrix} = 0.$$

Доведення. Нехай z_0', z_1' — довільні точки в крузі $\overline{D}_R$. Покладемо

$$F_{z_0', z_1'}(z) = \begin{vmatrix} f_1(z_1') & \ldots & f_{2n+5}(z_1') \\ f_1(z_0') & \ldots & f_{2n+5}(z_0') \\ f_1'(\alpha) & \ldots & f_{2n+5}'(\alpha) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1^{(2n+2)}(\alpha) & \ldots & f_{2n+5}^{(2n+2)}(\alpha) \\ f_1(z) & \ldots & f_{2n+5}(z) \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Оскільки так задана функція $F_{z_0', z_1'}(z)$ є ніщо інше як лінійна комбінація функцій $f_1(z), \ldots, f_{2n+5}(z)$, то властивості $F_{z_0', z_1'}(z)$ повністю визначаються властивостями $f_1(z), \ldots, f_{2n+5}(z)$ не залежно від вибору точок z_0', z_1'. Так, в силу умов твердження для будь-якої пари точок z_0', $z_1' \in \overline{D}_R$ означена за правилом (7) функція $F_{z_0', z_1'}(z)$ є аналітична в замкненому крузі $\overline{D}_R$. Тому за теоремою 1 існує r_0, $0 < r_0 \leq R$, яке залежить тільки від функції $F_{z_0', z_1'}(z)$, тобто від функцій $f_1(z), \ldots, f_{2n+5}(z)$, таке, що для довільних точок $z_0, z_1 \in D_{r_0}$, $(z_0+z_1)/2=\alpha$, в крузі $D_r := \{z : |z-\alpha| < r\}$, $r = |z_0 - z_1|/2$ знайдеться принаймні одна точка ξ така, що виконується рівність

$$F_{z_0', z_1'}(z_1) - F_{z_0', z_1'}(z_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{F_{z_0', z_1'}^{(2k+1)}(\alpha)}{(2k+1)!} \frac{(z_1 - z_0)^{2k+1}}{2^{2k}} + \\ + \frac{F_{z_0', z_1'}^{(2n+3)}(\xi)}{(2n+3)!} \frac{(z_1 - z_0)^{2n+3}}{2^{2n+2}}. \tag{8}$$

Якщо тепер покласти $z_0' = z_0$, $z_1' = z_1$, де $z_0, z_1 \in D_{r_0}$, то, враховуючи, що в такому випадку $F_{z_0, z_1}(z_0) = F_{z_0, z_1}(z_1) = F'_{z_0, z_1}(\alpha) = \ldots = F_{z_0', z_1'}^{(2n+2)}(\alpha) = 0$, з рівності (8) отримаємо

$$0 = \frac{F_{z_0, z_1}^{(2n+3)}(\xi)}{(2n+3)!} \frac{(z_1 - z_0)^{2n+3}}{2^{2n+2}},$$

що і доводить теорему 2.

1 *Cinquini S.* Sopra un'estensione di una formula di Curtiss // Ist. Lombardo. Rend. – 1937. – **70**, № 3. – P. 236–248.
2. *Sharma A.* Remark on a theorem of Cinquini // Acta math. Acad. Sci. hung. – 1960. – **16**, № 4. – P. 329–331.
3 *Mcleod R. M.* Mean value theorem for vector function // Proc. Edinburgh Math. Soc. – 1965. – **14**, № 3. – P. 197–209.
4 *Mioc V.* The extension of the formula for finite increments to holomorphic functions // Bull. Sti. Tehn. Inst. Politehn. Timisoara (N. S.). – 1969. – **14**, № 28. – P. 41–44.
5 *Robertson J. M.* A local mean value theorem for comlex plane // Proc.Edinburgh Math. Soc. – 1969. – **16**, № 4. – P. 329–331.
6 *Somuelsson Ake.* A local mean value theorem for analytic function // Amer. Math. Mon. – 1973. – **80**, № 1. – P. 45–46.
7 *Abian A.* Determinant version of Taylor theorems and some generalization // Comment. Math. (Prace Mat.) – 1984. – **24**, № 2. – P. 173–179.
8 *Zhao Ming Fang.* An extension of the mean value theorem for differentials // Sichuan Shifan Daxue Xuebao ziran Kexue Ban. – 1992. – **15**, № 4. – P. 74–79.

Одержано 09.03.95