УДК 519.41/47

М. М. Семко (НДІ педагогіки АПН України, Київ)

БУДОВА ОДНОГО КЛАСУ ГРУП З УМОВАМИ ЩІЛЬНОСТІ НОРМАЛЬНОСТІ ДЛЯ ПІДГРУП

We give a constructive description of locally graded groups G satisfying the following conditions: for any pair of subgroups A and B such that $A < B$, .there exists a normal subgroup N which belongs to G and is such that $A \le N \le B$.

Конструктивно описані локально ступінчасті групи G, у яких для будь-якої пари підгруп A та B таких, що $A < B$, існує нормальна підгрупа N із G і $A \le N \le B$.

У багатьох роботах (див., наприклад, [1–14]) вивчались групи, в яких певна властивість V підгрупи групи G є щільною в групі G. Властивість V підгрупи групи G називається щільною в G, якщо для підгрупи A з підгрупи B групи G існує підгрупа N із властивістю V така, що $A \le N \le B$. Вибираючи A власною чи власною немаксимальною підгрупою з B, одержуємо різні поняття щільності V, які виділяють досить широкі класи груп, що значно узагальнюють клас груп, у яких всі підгрупи мають властивість V. Групи, де V — властивість нормальності, вивчались у роботах [8–15].

В даній роботі також розглядаються групи з деякими умовами щільності нормальності для підгруп (ЩН[ ]-групи), що є цілком новим класом груп.

ЩН[ ]-групою називається група G, у якої для будь-якої пари підгруп A та B таких, що $A < B$, існує нормальна в G підгрупа N і $A \le N \le B$. Наведена нижче теорема дає конструктивний опис всіх локально ступінчастих ЩН[ ]-груп з виділенням восьми типів груп такого роду.

Означення 1. *Нехай G — група, A та B — її підгрупи, $A \le B$. Відрізком $[A; B]$ називається множина всіх тих і тільки тих підгруп X із G, для яких $A \le X \le B$.*

Означення 2. *Модулем відрізка $|[A; B]|$ називається число його елементів.*

Лема 1. *В довільній ЩН[ ]-групі G нормальні всі нециклічні підгрупи та підгрупи Фраттіні всіх циклічних підгруп. Ненормальними в G можуть бути лише примарні циклічні підгрупи.*

Доведення. Нехай G — досліджувана група, U — її підгрупа і x — довільний елемент із U. Припустимо спочатку, що U — нециклічна група. Тоді $|[\langle x\rangle; U]| > 1$ і, значить, $[\langle x\rangle; U] \ni N(x) \lhd G$. Зрозуміло, що підгрупа N, яка породжена всіма підгрупами $N(x)$, для всіх x із U нормальна в G. Звідси $U = N$ і $N \lhd G$.

Нехай $U = \langle x\rangle$ — циклічна група. Очевидно, що при $|U| \in \{1, p\}$, p — просте число, $\Phi(U) \lhd G$. Нехай $|U|$ ділиться на добуток двох простих чисел. Якщо $U \lhd G$, то $\Phi(U) \lhd G$. Нехай $U \ntriangleleft G$. Тоді $|[\Phi(U); U]| > 1$ і, значить, $[\Phi(U); U] \ni N \lhd G$. Зрозуміло, що $\Phi(U)$ — характеристична підгрупа з N і тому $\Phi(U) \lhd G$. Таким чином, завжди $\Phi(U) \lhd G$.

Покажемо, що U — примарна циклічна група. Нехай це не так, тобто U — непримарна група. Тоді $U = \langle y\rangle \times \langle z\rangle$, $|y| \ne 1$, $|z| \ne 1$, $|[\langle y\rangle; U]| > 1$, $|[\langle z\rangle; U]| > 1$. За означенням ЩН[ ]-груп $[\langle y\rangle; U] \ni N(y)$, $N(y) \lhd G$, $[\langle z\rangle; U] \ni N(z) \lhd G$. Звідси $N(y)N(z) = U \lhd G$, що неможливо, оскільки $U \ntriangleleft G$. Отже, U — примарна циклічна група. Лему доведено.

Лема 2. *Нехай G — ЩН[ ]-група, що містить підгрупу $U = A \times B$, $A \lhd G$, $B \ne 1$. Тоді A — квазіцентральна підгрупа з G.*

Доведення. Нехай G та U взято з умови леми і X — довільна підгрупа з A. Покажемо, що $X \lhd G$. При $X = 1$ чи $X = A$ це очевидно. Тому $1 < X < A$. Тоді за лемою 1 $(X \times B) \lhd G$ і тому $(X \times B) \cap A = X \lhd G$ і, отже, A — квазіцентральна підгрупа з G. Лему доведено.

Наслідок 1. *Нільпотентна недедекіндова ЩН[ ]-=група G є p-групою, у якої нормальні всі нециклічні підгрупи.*

Доведення. Нехай G задовольняє умову наслідку. Тоді G задовольняє умову теореми 2.3 з [15], за твердженням якої $G = P \times D$, P — недедекіндова силовська черніковська p-підгрупа з G, D — її черніковське холлівське доповнення в G. За лемою 1 всі нециклічні підгрупи з P нормальні в G. Припустимо, що $D \neq 1$. Тоді за лемою 2 P — дедекіндова група, що неможливо. Отже, G — p-група. Наслідок доведено.

Лема 3. *Локально ступінчасті ненільпотентні ЩН[ ]-групи G вичерпуються групами Шмідта типу $G = P \leftthreetimes Q$, P — силовська p-підгрупа з G, Q — силовська q-підгрупа з G, p і q — різні прості числа, $|P| \in \{p, p^2\}$, $|Q| = q^\beta$, $\beta > 0$; при $|P| = p$ $p \equiv 1 \pmod q$; при $|P| = p^2$, $p \neq 3$, $q > 2$, $\beta = 1, 2$ — показник p за модулем q.*

Доведення. Необхідність. Нехай G взято з леми. Тоді G задовольняє умову теореми 2.3 з [15] і може бути лише скінченною дисперсивною ненільпотентною групою типу 1 згаданої теореми. Звідси G містить підгрупу Шмідта $S = P \leftthreetimes Q$, яка в свою чергу за теоремою 2.1 з [15] задовольняє умову теореми 3.1 з [15] і може бути лише групою одного з типів 1–3 теореми 3.1. За наслідком 3.4 з [15] S є групою розглядуваної леми.

Покажемо, що $S = G$. Дійсно, за лемою 1 $S \lhd G$. За лемою Фраттіні (див., наприклад, [16]) $G = SD$, де $D = N_G(Q)$, $D \cap P = N_P(Q) = 1$. Очевидно, що $P \lhd G$, $G = P \leftthreetimes D$, $S \cap D = Q \lhd D$. Зрозуміло, що $D \ntriangleleft G$ і тому за лемою 1 D — примарна циклічна q-група, у якої $\Phi(D) \ntriangleleft G$. Звідси $D = \langle y \rangle$, $\langle y \rangle \geq Q$, $Q \ntriangleleft G$, $y^q \in Z(G)$. Тоді $Q \leq \langle y^q \rangle$. Отже, $Q = \langle y \rangle$ і тому $D = Q$, $G = S$. Необхідність доведено.

Достатність доведено в наслідку 3.4 з [15]. Лему доведено.

Теорема. *Недедекіндові локально ступінчасті ЩН[ ]-групи G є черніковськими групами, у яких $|G'| \in \{p, p^2\}$, $[G : Z(G)] \in \{p^2 q, pq\}$, p і q — не обов'язково різні прості числа, та вичерпуються групами таких типів:*

1) $G = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $\alpha > 1$, $\beta > 0$, $[a, b] = a^{p\alpha - 1}$;

2) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = 8$, $|b| \in \{4, 8\}$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1} a b = a^{-1}$;

3) $G = C \times Q$, C — *неодинична локально циклічна 2-група*, Q — *група кватерніонів порядку* 8;

4) $G = (C \times \langle a \rangle) \leftthreetimes \langle b \rangle$, C — *локально циклічна p-група, чи група кватерніонів порядку* 8, $[a, b] = c \in C$, $|c| = p$, $|a| = |b| = p$, $[C, \langle b \rangle] = 1$;

5) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle x \rangle$, $|a| = |x| = 9$, $|b| = 3$, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^3 = x^6$;

6) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle x \rangle$, $|a| = |b| = |x| = 4$, $[a, x] = a^2$, $[b, x] = x^2 = a^2 b^2$;

7) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle)(\langle x \rangle \times \langle y \rangle)$, $|a| = |b| = 4$, $a^2 = x^2 = [a, y]$, $a^2 b^2 = [a, x] = [b, y]$, $b^2 = y^2 = [b, x]$;

8) $G = P \leftthreetimes Q$, P — *силовська p-підгрупа з G, Q — силовська q-підгрупа з G, p і q — різні прості числа,* $|P| \in \{p, p^2\}$, $|Q| = q^\beta$, $\beta > 0$; *при* $|P| = p$ $p \equiv 1 \pmod q$; *при* $|P| = p^2$, $p \neq 3$, $q > 2$, $\beta = 1, 2$ — *показник p за модулем q.*

Доведення. Необхідність. Нехай G взято з теореми. Тоді G задовольняє умову теореми 2.3 з [15], за твердженням якої G — черніковська розв'язна недедекіндова дисперсивна група, для якої можливі випадки: 1) G — скінченна ненільпотентна група; 2) G — нільпотентна група.

Випадок 1. У цьому випадку G задовольняє умову леми 3, за твердженням якої G — група типу 8 теореми.

Випадок 2. У цьому випадку G задовольняє умову наслідку 1, за твердженням якого G — p-група з нормальними нециклічними підгрупами. З опису цих груп [17, 18] одержимо, що G — група одного з типів 1–7 теореми.

Зрозуміло, що в групі G кожного з типів 1–8 G' і $Z(G)$ мають властивості, які вказані в умові теореми. Необхідність доведено.

Достатність. Нехай G — група одного з типів 1–8 теореми. Очевидно, що G — недедекіндова локально ступінчаста група. Покажемо, що G — ЩН[ ]-група. Для груп G типу 8 це доведено в наслідку 3.4 з [15]. Тому в подальшому будемо вважати, що G — нільпотентна p-група одного з типів 1–7 теореми.

Зрозуміло, що внаслідок [17, 18] кожна нециклічна підгрупа з G є нормальною. Нехай $|[A;B]| > 1$. Покажемо, що $[A;B] \ni N \lhd G$. Якщо $A \lhd G$, чи $B \lhd G$, то покладемо відповідно $A = N$ чи $B = N$ і все доведено. Тому $A \ntriangleleft G$, $B \ntriangleleft G$, $B < G$, $B \ngeq G'$ і B — циклічна група. Очевидно, $|B| > p^2$. Оскільки $|G'| \le p^2$ і $B = \langle u \rangle$, то, як відомо, $u^{p^2} \in Z(G)$. В силу вибору A та B $A = \langle u^p \rangle$. Звідси при $|G'| = p$ маємо $A \le Z(G)$, що не так. Тоді $|G'| = p^2$. Зауважимо, що в групах G кожного з типів 5–7 $u^2 \in Z(G)$ і тому $A \lhd G$, що не так, а в групах G кожного з типів 1, 3, 4 $|G'| = p$. Отже, в подальшому G може бути лише групою типу 2 теореми. Оскільки $\langle u \rangle = B \ntriangleleft G$, то $\langle u \rangle$ співпадає з однією з підгруп $\langle b \rangle$, $\langle (ab)^2 \rangle$. Дійсно, $u = a^i b^j$, $b^{-1}ab = a^{-1}$. Звідси при парному j $u^2 = a^{2i}b^{2j} \in \langle a^2 \rangle$, при непарному j $u^2 = b^{2j}$. Оскільки $\langle a^2 \rangle \lhd G$, $b^2 \in Z(G)$, то $A = \langle u^2 \rangle \lhd G$, що знову неможливо. Отже, G — ЩН[ ]-група. Достатність доведено. Теорему доведено.

Наслідок 2. *Нехай G — локально ступінчаста недедекіндова група. Тоді справедливі такі твердження:*

1) *будь-яка ЩН[ ]-група є групою з нормальними нециклічними підгрупами;*

2) *існують неперіодичні метациклічні групи G та скінченна група G з нормальною силовською 2-підгрупою, ізоморфна групі кватерніонів порядку* 8, *у яких нормальні всі нециклічні підгрупи і G — не ЩН[ ]-група;*

3) *для довільної p-групи G наступні умови еквівалентні:*

а) *G — ЩН[ ]-група;* б) *G — група з нормальними нециклічними підгрупами.*

Доведення. Нехай G задовольняє умову наслідку. Тоді твердження 1 випливає з леми 1. Внаслідок [17, 18] серед груп з нормальними нециклічними підгрупами є групи таких типів: $G = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$, $|a| = 4$, $|b| = \infty$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ і група Шмідта $G = P \leftthreetimes \langle x \rangle$, у якої P — група кватерніонів порядку 8, які недедекіндові. За теоремою вказані типи груп не можуть бути ЩН[ ]-групами. Цим твердження 2 доведено. Внаслідок [17, 18] група кожного з типів 1–7 теореми є групою, у якої всі нециклічні підгрупи нормальні. Це й доводить твердження 3 наслідку. Наслідок доведено.

1. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
2. *Best E., Taussky O.* A class of groups // Proc. PJA. Sec. A. – 1942. – **47**. – P. 55–62.
3. *Абрамовский И. Н., Каргаполов М. И.* Конечные группы со свойством транзитивности для нормальных делителей // Успехи мат. наук. – 1958. – **13**, вып. 3. – С. 242–243.
4. *Robinson D.* Groups in which normality is a transitive relation // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1964. – **60**. – P. 21–38.

5. *Пылаев В. В.* Конечные группы с обобщенно плотной системой субнормальных подгрупп // Исследования по теории групп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976. – С. 111–139.
6. *Курдаченко Л. А., Горецкий В. Э.* Группы с плотной системой почти нормальных подгрупп // Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, № 1. – С. 42–46.
7. *Курдаченко Л. А., Кузенный Н. Ф., Пылаев В. В.* Бесконечные группы с обобщенно плотной системой субинвариантных подгрупп // Там же. – 1981. – **33**, № 3. – С. 407–410.
8. *Горецкий В. Э.* Группы с плотной системой бесконечных инвариантных абелевых подгрупп // Теоретико-групповые исследования. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978. – С. 127–138.
9. *Mann A.* Groups with dense normal subgroups // Isr. J. Math. – 1968. – **6**, № 1. – P. 13–25.
10. *Пылаев В. В., Кузенный Н. Ф.* Конечные ненильпотентные группы с обобщенно плотной системой инвариантных подгрупп. – Киев, 1980. – 17 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 19–25–80.
11. *Пылаев В. В., Кузенный Н. Ф.* Конечные группы с плотной системой нормальных групп // XIV Всесоюзн. алгебр. конф.: Тез. докл. – Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1977. – С. 57–58.
12. *Пылаев В. В., Кузенный Н. Ф.* Конечные ненильпотентные группы со строго плотной системой инвариантных подгрупп // VI Всесоюзн. симп. по теории групп: Тез. докл. – Киев: Наук. думка, 1978. – С. 49–50.
13. *Кузенный Н. Ф., Пылаев В. В.* Конечные нильпотентные группы со строго плотной системой инвариантных подгрупп ранга 1 и 2 // XV Всесоюзн. алгебр. конф.: Тез. докл. – Красноярск: Изд-во Краснояр. ун-та, 1979. – С. 84–85.
14. *Пылаев В. В., Кузенный Н. Ф.* Конечные нильпотентные группы со строго плотной системой инвариантных подгрупп ранга 3 // Там же. – С. 126.
15. *Семко М. М.* Про будову груп з умовами щільності нормальності для підгруп. – Київ, 1996. – 67 с. – Деп. в ДНТБ України, № 743-Ук-96.
16. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп: 3-е изд. – М.: Наука, 1982. – 288 с.
17. *Ліман Ф. М.* Групи з інваріантними нециклічними підгрупами // Допов. АН УРСР. – 1967. – № 12. – С. 1073–1075.
18. *Лиман Ф. Н.* 2-группы с инвариантными нециклическими подгруппами // Мат. заметки. – 1968. – **4**, № 1. – С. 74–83.

Одержано 26.02.96