УДК 517.968

М. Азизов (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБ ОДНОМ ПРЯМОМ МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

We propose a direct method of approximate solution of integral equations that arise within the framework of so-called method of boundary conditions used when approximately solving a periodic boundary-value problem for linear differential equations. We show that the proposed direct method is optimal with respect to order.

Запропоновано прямий метод неближеного розв'язання інтегральних рівнянь, які виникають у межах так званого методу крайових умов при наближеному розв'язанні періодичної крайової задачі для лінійних диференціальних рівнянь. Показано, що запропонований прямий метод є оптимальним за порядком.

1. В пространстве $C = C_{[0,2\pi]}$ непрерывных 2π-периодических функций с обычной нормой $\|\cdot\|_C$ рассмотрим периодическую краевую задачу для линейного дифференциального уравнения

$$Ly \equiv y^{(r)} + \sum_{i=0}^{r-1} P_i(t) y^{(i)} = f(t), \tag{1}$$

$$y^{(i)}(0) = y^{(i)}(2\pi), \qquad i = 0, 1, 2, \dots, r-1, \tag{2}$$

где $r \ge 1$, а требования на гладкость коэффициентов $P_i(t)$ и правой части $f(t)$ будут оговорены ниже.

Одним из методов приближенного решения краевой задачи (1), (2) является предложенный М. И. Алексеенко [1] метод функции краевых условий. При этом методе решение (1), (2) ищется в виде

$$y(t) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{\pi} D_r(t-\tau) + c\right] u(\tau)\, d\tau, \tag{3}$$

где $D_r(x)$ — функция Бернулли, а c — константа. После подстановки (3) уравнение (1) принимает вид

$$u(t) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2\pi} - cP_0(t) - \frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^{r-1} P_i(t) D_{r-i}(t-\tau)\right] u(\tau)\, d\tau + f(t). \tag{4}$$

Пусть $u_N(t)$ — приближенное решение интегрального уравнения (4), полученное с помощью некоторого прямого метода, состоящего в замене интегрального оператора в (4) оператором ранга не выше N. Тогда в качестве приближенного решения задачи (1), (2) возьмем функцию

$$y_N(t) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{\pi} D_r(t-\tau) + c\right] u_N(\tau)\, d\tau. \tag{5}$$

Если предположить, что уравнение (4), а следовательно, и задача (1), (2) однозначно разрешимы при любой функции $f \in C$, то из (3), (5) имеем следующую оценку для погрешности приближенного решения:

$$\| y - y_N \|_C \le \| u - u_N \|_C \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{\pi} D_r(\tau) + c \right| d\tau. \tag{6}$$

Постоянная c может быть выбрана так, чтобы она доставляла наилучшее приближение в интегральной метрике функции Бернулли. Как известно,

$$\min_c \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{\pi} D_r(\tau) + c \right| d\tau \;=\; \mathcal{K}_r, \tag{7}$$

где $\mathcal{K}_r$ — константа Фавара, а значение c, при котором достигается минимум, равно 0 при нечетном r, и равно $D_r(\pi/2)/\pi$, если r четно.

В [1] к (4) применялся прямой метод, при котором приближенное решение определялось из следующего интегрального уравнения с вырожденным ядром:

$$\tilde{u}(t) \;=\; \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2\pi} - cP_0(t) - \frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^{r-1} P_i(t) S_m D_{r-i}(t-\tau) \right] \tilde{u}(\tau)\, d\tau \;+\; f(t), \tag{8}$$

где $S_m D_{r-i}$ — частная сумма ряда Фурье функции D_{r-i} порядка m. При этом в [1] установлена оценка погрешности

$$\| u - \tilde{u} \|_C \;\le\; c \sum_{i=0}^{r-1} \frac{\| P_i \|_C}{m^{r-i-1}}, \tag{9}$$

имеющая смысл лишь при $P_{r-1}(t) \equiv 0$. Кроме того, если в уравнении (1) отсутствуют производные $y^{(r-\mu)}$, $\mu = 1, 2, \ldots, s$, т. е.

$$P_{r-\mu}(t) \;\equiv\; 0, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, s, \tag{10}$$

то из (9) следует

$$\| u - \tilde{u} \|_C \;\le\; 0(m^{-s}). \tag{11}$$

2. В этом пункте приведем некоторую модификацию указанного выше прямого метода, позволяющую на порядок улучшить оценку (9), а в случае выполнения условия (10) и непрерывной дифференцируемости до порядка ν включительно остальных коэффициентов уравнения (1) гарантирующую точность порядка $0(m^{-s-\nu-1})$, $\nu \le s+1$.

Обозначим через C^{μ} пространство 2π-периодических функций, имеющих непрерывные на $[0, 2\pi]$ производные до порядка μ включительно:

$$\| f \|_{C^{\mu}} \;=\; \sum_{i=0}^{\mu} \| f^{(i)} \|_C.$$

Рассмотрим прямой метод, при котором приближенное решение $u_{2n+1}(t)$ уравнения (4) определяется из следующего уравнения с вырожденным ядром:

$$u_{2n+1}(t) \;=\; \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2\pi} - cP_0(t) - \frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^{r-1} P_i(t) V_n D_{r-i}(t-\tau) \right] u_{2n+1}(\tau)\, d\tau \;+\; f(t), \tag{12}$$

где V_n — оператор, сопоставляющий каждой суммируемой на $(0, 2\pi)$ функции $\varphi(t)$ ее сумму Валле – Пуссена порядка n. Известно, что

$$\int_0^{2\pi} | D_{r-i}(t) - V_n D_{r-i}(t) |\, dt \;\le\; \frac{3\pi \mathcal{K}_{r-i}}{n^{r-i}}, \tag{13}$$

$$\|f - V_n f\|_C \leq cn^{-\mu}\|f\|_{C^\mu}, \qquad (14)$$

где f — произвольная функция из C^μ, а постоянная c зависит лишь от μ.

Теорема 1. *Пусть краевая задача* (1), (2), *а следовательно, и интегральн уравнение* (4) *однозначно разрешимы при любой функции* $f \in C$. *Тогда пр достаточно больших* n *найдется постоянная* c *такая, что*

$$\| u - u_{2n+1}\|_C \leq c\sum_{i=0}^{r-1}\frac{\|P_i\|_C}{n^{r-i}}. \qquad (15)$$

Если же выполнено условие (10) *и* $f, P_i \in C^\nu$, $i = 0, 1, \ldots, r-s-1$, $\nu \leq s +$ *то*

$$\| u - u_{2n+1}\|_C \leq c_1 n^{-s-\nu-1}, \qquad (16)$$

где постоянная c_1 *зависит от норм* f, P_i *в пространстве* C^ν.

Доказательство. Обозначим через H_r и $H_{n,r}$ интегральные операторы уравнений (4) и (12). Ядра этих операторов обозначим соответственно чере $h_r(t,\tau)$ и $h_{n,r}(t,\tau)$. Тогда из (13) имеем

$$\| H_r - H_{n,r}\|_{C\to C} \leq 3\sum_{i=0}^{r-1}\frac{\mathcal{K}_{r-i}\|P_i\|_C}{n^{r-i}}. \qquad (17)$$

Из условий теоремы следует, что найдется постоянная $\beta_r > 1$ такая, что

$$\|(I - H_r)^{-1}\|_{C\to C} \leq \beta_r. \qquad (18)$$

В силу (17), (18) и теоремы о разрешимости приближенного уравнения [с. 517] при достаточно большом n

$$\|(I-H_{n,r})^{-1}\|_{C\to C} \leq \beta_r(1-\beta_r\|H_r - H_{n,r}\|_{C\to C})^{-1} = \beta_{n,r} \leq 2\beta_r. \qquad (19)$$

Но тогда из (4), (12), (17) и (19) находим

$$\|u - u_{2n+1}\|_C = \|(I-H_{n,r})^{-1}\|_{C\to C}\|H_r - H_{n,r}\|_{C\to C}\|u\|_C \leq$$

$$\leq 6\beta_r^2\|f\|_C\sum_{i=0}^{r-1}\frac{\mathcal{K}_{r-i}\|P_i\|_C}{n^{r-i}}, \qquad (20)$$

и оценка (15) установлена.

Для доказательства (16) заметим, что функции $D_{r-i}(x) - V_n D_{r-i}(x)$ ортого нальны всем тригонометрическим полиномам порядка n. Но тогда, учитыва что при любом t функции $V_{[n/2]}u(t-\tau)$ по переменной τ являются тригоно метрическим полиномом порядка не выше $2[n/2] \leq n$, имеем

$$\int_0^{2\pi}\left[D_{r-i}(t-\tau) - V_n D_{r-i}(t-\tau)\right]V_{[n/2]}u(\tau)\,d\tau = 0. \qquad (21)$$

Далее, в силу свойств функции Бернулли очевидно, что при выполнени условия (10) для f, $P_i \in C^\nu$, $i = 0, 1, \ldots, r-s-1$, $\nu \leq s+1$, решение $u(t)$ урав нения (4) принадлежит пространству C^ν и $\|u\|_{C^\nu} \leq c$, где постоянная c за висит от норм f, P_i в пространстве C^ν и от константы β_r, фигурирующей в (18). Используя этот факт, (13), (14), (21), находим

$$\| u - u_{2n+1} \|_C \le \beta_{n,r} \| (H_r - H_{n,r}) u \|_C \le$$

$$\le \frac{\beta_{n,r}}{\pi} \max_t \left| \int_0^{2\pi} \sum_{i=0}^{r-s-1} P_i(t) \left[D_{r-i}(t-\tau) - V_n D_{r-i}(t-\tau) \right] u(\tau)\, d\tau \right| \le$$

$$\le c \| u \|_{C^\nu} \sum_{i=0}^{r-s-1} \frac{\| P_i \|_C}{n^{r-i}} \left[\frac{n}{2} \right]^{-\nu} \le c \sum_{i=0}^{r-s-1} \frac{\| P_i \|_C}{n^{r+\nu-i}} \le c n^{-s-\nu-1}.$$

Теорема доказана.

3. В этом пункте приведем результат, который показывает, что если выполнено условие (10) и f, $P_i \in C^\nu$, $i = 0, 1, \ldots, r-s-1$, $\nu \le s+1$, то на всем классе уравнений вида (4), возникающих в рамках метода функции краевых условий, порядок погрешности (16) не может быть улучшен за счет использования любого другого прямого метода, состоящего в замене интегрального оператора из (4) некоторым оператором ранга не выше N. Для этого, следуя [3, § 6], рассмотрим общую постановку задачи об оптимизации прямых методов.

Обозначим через $\Psi_\beta^{r,s,\nu}$ класс уравнений вида (4), для которых выполнены условия (10), (18) и

$$\| P_i \|_{C^\nu} \le \beta_i, \quad i = 0, 1, \ldots, r-s-1,$$

$$\| f \|_C \le \beta_{r+1}, \quad \beta = \{ \beta_0, \ldots, \beta_{r-s-1}, \beta_r, \beta_{r+1} \}$$

(если $s = 0$, то это означает, что в уравнении (1) присутствуют все производные до r-го порядка). Как и в [3, § 6], под прямым методом приближенного решения (4) будем понимать произвольное правило D, по которому оператору H_r из (4) сопоставляется подпространство $F_N \subset C$ размерности N и оператор H_N из C в F_N такие, что уравнение

$$u_D = H_N u_D + f \tag{22}$$

однозначно разрешимо и u_D берется в качестве приближенного решения уравнения (4). При фиксированном N множество всевозможных прямых методов D обозначим через $\mathcal{D}_N$. Величина

$$\varepsilon\left(\Psi_\beta^{r,s,\nu}, D\right) = \sup_{\Psi_\beta^{r,s,\nu}} \| u - u_D \|_C,$$

где u и u_D — решения уравнений (4) и (22) соответственно, а точная верхняя грань берется по всем уравнениям класса $\Psi_\beta^{r,s,\nu}$, является погрешностью метода D на классе $\Psi_\beta^{r,s,\nu}$.

В рамках общего подхода [3, § 6] рассмотрим оптимизацию прямых методов решения уравнений (4) из класса $\Psi_\beta^{r,s,\nu}$ в смысле величины

$$\Theta_N\left(\Psi_\beta^{r,s,\nu}\right) = \inf \left\{ \varepsilon\left(\Psi_\beta^{r,s,\nu}, D\right) : D \in \mathcal{D}_N \right\}.$$

Теорема 2. *При* $s = 0, 1, 2, \ldots, r-1$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, s+1$, $r = 1, 2, \ldots$ *справедливо соотношение*

$$\Theta_N\left(\Psi_\beta^{r,s,\nu}\right) \asymp N^{-s-\nu-1}.$$

Оптимальный порядок для класса $\Psi_\beta^{r,s,\nu}$ *реализует прямой метод, при котором приближенное решение* u_{2n+1}, $n = [(N-1)/2]$, *уравнения* (4) *определяется из уравнения* (12).

Доказательство. Требуемая оценка сверху следует из (16). Оценка снизу может быть получена аналогично доказательству теоремы из [4].

4. В заключение приведем результат, характеризующий оценку погрешности примененного к уравнению (4) аппроксимационно-итеративного метода, суть которого состоит в комбинировании прямого метода (12) с итерационным процессом, т. е. в определении последовательных приближений u_k согласно формулам

$$u_0 = f, \quad u_k = u_{k-1} + \delta_{k-1,2n+1}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{23}$$

где $\delta_{k-1,2n+1}$ — решение интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$\delta_{k-1,2n+1} = H_{n,r}\delta_{k-1,2n+1} + H_r u_{k-1} - u_{k-1} + f. \tag{24}$$

Здесь, как и ранее, H_r и $H_{n,r}$ — интегральные операторы из уравнений (4) и (12) соответственно. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *В условиях теоремы* 1 *для погрешности приближенного решения уравнения* (4) *аппроксимационно-итеративным методом* (23), (24) *справедлива оценка*

$$\| u - u_k \|_C \le c^k \left(\sum_{i=0}^{r-1} \frac{\| P_i \|_C}{n^{r-i}} \right)^k,$$

где постоянная c *может быть выбрана как и в теореме* 1.

1. *Алексеенко М. И.* Приближенное решение периодической краевой задачи // Весці АН БССР. Сер. физ.-мат. – 1981. – № 6. – С. 54–58.
2. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
3. *Pereverzev S. V.* Optimization of methods for approximate solution of operator equations. – New York: Nova. – 1996. – 330 p.
4. *Переверзев С. В.* Об одной задаче оптимизации методов приближенного решения уравнений Фредгольма // Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, № 3. – С. 378–382.

Получено 23.04.97