УДК 517.9

В. Г. Коломієць (Ін-т математики НАН України, Київ),
І. В. Комашинська (Полтав. пед. ін-т)

ПРО ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ КВАЗІЛІНІЙНОЇ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ КВАЗІХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

Conditions for the existence and uniqueness of solution are obtained for a quasilinear mixed problem in the case of a quasiwave equation.

Одержано умови існування та єдиності розв'язку квазілінійної мішаної задачі для квазіхвильового рівняння.

Розглянемо мішану задачу для квазіхвильового диференціального рівняння з нелінійним тертям вигляду

$$u_{tt} - b^2 u_{xx} = \varepsilon f(u_t, \varepsilon), \tag{1}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l; \tag{2}$$

$$(u_x - hu)\Big|_{x=0} = \varepsilon\eta(u(0, t)), \tag{3}$$

$$u(l, t) = 0, \quad 0 \le t \le T. \tag{4}$$

Тут $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $0 \le \varepsilon_0 < 1$, — малий параметр, b, h, l; T — деякі сталі.

Якщо u при $x = 0$ відоме, то розв'язок $u(x, t)$ легко представити за допомогою методу Даламбера. При $x = 0$ це представлення є тотожністю $u(0, t) = \theta(t)$.

Тепер задача полягає в знаходженні такого θ, при якому задовольнялася б умова (3) при $x = 0$.

Застосовуючи метод Даламбера і метод продовження [1], розв'язок задачі

$$u_{tt} - b^2 u_{xx} = \varepsilon f(u_t, \varepsilon), \tag{5}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l; \tag{6}$$

$$\begin{gathered} u(0, t) = \theta(t), \\ u(l, t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \end{gathered} \tag{7}$$

можна знайти за допомогою системи інтегральних рівнянь

$$\begin{gathered} u(x, t) = \frac{\Phi(x + bt) + \Phi(x - bt)}{2} + \frac{1}{2b}\int\limits_{x-bt}^{x+bt} \Psi(\alpha)\, d\alpha + \\ + \frac{\varepsilon}{2b}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-b(t-\tau)}^{x+b(t-\tau)} \bar{f}(u_t(\xi, \tau), \varepsilon)\, d\xi + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\theta}\left(t - \frac{2nl}{b} - \frac{x}{b}\right) - \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\theta}\left(t - \frac{2nl}{b} + \frac{x}{b}\right), \\ u_t(x, t) = (u(x, t))_t. \end{gathered} \tag{8}$$

Тут Φ, Ψ — непарні $2l$-періодичні продовження функцій φ і ψ з проміжку $[0, l]$ на R, $\bar{f}$ — непарне $2l$-періодичне продовження f за змінною x на R;

$$\overline{\theta} = \begin{cases} \theta(t), & \text{якщо } t \ge 0, \\ 0, & \text{якщо } t < 0. \end{cases} \tag{9}$$

Безпосередньою підстановкою перевіряється виконання крайових і початкових умов.

Продиференціюємо (8) відносно x і покладемо $x = 0$:

$$u_x(0, t) = \varphi'(bt) + \frac{1}{b}\psi(bt) + \frac{\varepsilon}{b}\int_0^t f(u_t(b(t-\tau), \tau), \varepsilon)\, d\tau -$$

$$- \frac{1}{b}\overline{\theta}'(t) - \sum_{n=1}^{\infty}\overline{\theta}'\left(t - \frac{2nl}{b}\right). \tag{10}$$

Підставимо (10) в (3), враховуючи (7):

$$-\frac{1}{b}\overline{\theta}'(t) - \frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\theta}'\left(t - \frac{2nl}{b}\right) + \varphi'(bt) + \frac{1}{b}\psi(bt) +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{b}\int_0^t f(u_t(b(t-\tau), \tau), \varepsilon)\, d\tau - h\overline{\theta}(t) = \varepsilon\eta(\overline{\theta}), \tag{11}$$

$$\overline{\theta}'(t) = -hb\overline{\theta} - \varepsilon b\eta(\overline{\theta}) - 2\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\theta}'\left(t - \frac{2nl}{b}\right) + b\varphi'(bt) +$$

$$+ \psi(bt) + \varepsilon\int_0^t f(u_t(b(t-\tau), \tau), \varepsilon)\, d\tau. \tag{12}$$

Тепер проінтегруємо (12):

$$\overline{\theta}(t) = \varphi(0) - \int_0^t \left\{ -b\varepsilon\eta(\overline{\theta}) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\theta}'\left(\tau - \frac{2nl}{b}\right) - b\phi'(b\tau) - \right.$$

$$\left. -\psi(b\tau) - \varepsilon\int_0^\tau f(u_t(b(\tau-\mu), \mu), \varepsilon)\, d\mu \right\} \exp(bh(\tau - t))\, d\tau. \tag{13}$$

Зауважимо, що при малих t доданок

$$\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\theta}'\left(\tau - \frac{2nl}{b}\right) = 0,$$

а із зростанням t виражається через відомі функції,

Далі позначимо

$$f_1(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\theta}'\left(t - \frac{2nl}{b}\right) - b\varphi'(bt) - \psi(bt).$$

Це відома функція. Таким чином, θ знайдено.

Зведемо неоднорідні крайові умови (7) до однорідних. Введемо нову невідому функцію $v(x, t)$ так, щоб крайові умови для неї були однорідними.

Нехай

$$u(x, t) = w(x, t) + v(x, t). \tag{14}$$

Знайдемо функцію $w(x, t)$ як розв'язок задачі

$$w_{tt} - b^2 w_{xx} = 0, \tag{15}$$

$$w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0, \tag{16}$$

$$\begin{aligned} w(0, t) &= \theta(t), \\ w(l, t) &= 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Вона має вигляд

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\theta}\left(t - \frac{2nl}{b} - \frac{x}{b}\right) - \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\theta}\left(t - \frac{2nl}{b} + \frac{x}{b}\right). \tag{18}$$

Для функції $v(x, t)$ маємо задачу

$$v_{tt} - b^2 v_{xx} = \varepsilon f(v_t + w_t, \varepsilon), \tag{19}$$

$$v(x, 0) = \varphi(x), \quad v_t(x, 0) = \psi(x), \tag{20}$$

$$\begin{aligned} v(0, t) &= 0, \\ v(l, t) &= 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Здійснимо перехід від рівняння (5) до системи першого порядку, використавши рівності $v_1 = v_t + bv_x$, $v_2 = v_t - bv_x$. Тоді $v_t = (v_1 + v_2)/2$. Крайові і початкові умови тепер мають вигляд

$$\begin{aligned} v_1(0, t) + v_2(0, t) &= 0, \\ v_1(l, t) + v_2(l, t) &= 0, \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} v_1(x, 0) &= \psi(x) + a\varphi'(x) \equiv \varphi_1(x), \\ v_2(x, 0) &= \psi(x) - a\varphi'(x) \equiv \varphi_2(x). \end{aligned} \tag{23}$$

Отже, маємо еквівалентну систему інтегральних рівнянь типу Вольтерра

$$v_1(x, t) = \varphi_1(x + at) + \int_0^t F_1(v_1, v_2, \theta_1, \varepsilon)(x - b(\tau - t), \tau)\, d\tau,$$

$$v_2(x, t) = \varphi_2(x - at) + \int_0^t F_1(v_1, v_2, \theta_1, \varepsilon)(x + b(\tau - t), \tau)\, d\tau,$$

$$\theta_1'(t) = -hb\theta_1 - \varepsilon b\eta(\theta_1) + f_1(t) + \varepsilon \int_0^t F_1(v_1, v_2, \theta_1, \varepsilon)(b(\tau - t), \tau)\, d\tau, \tag{24}$$

$$\theta(t) = \Phi(0) - \int_0^t \Big\{ -b\varepsilon\eta(\theta_1) - f_1(\tau) -$$

$$- \varepsilon \int_0^\tau F_1(v_1, v_2, \theta_1, \varepsilon)(b(\tau - \mu), \mu)\, d\mu \Big\} \exp(bh(\tau - t))\, d\tau,$$

де

$$F_1(v_1, v_2, \theta_1, \varepsilon) = f\left(\frac{(v_1 + v_2)}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \theta_1\left(t - \frac{2nl}{b} - \frac{x}{b}\right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=0}^{\infty} \theta_1\left(t - \frac{2nl}{b} + \frac{x}{b}\right), \varepsilon \right).$$

Якщо v_1, v_2, θ_1 знайдено, то u визначається за формулою

$$u(x, t) = \varphi(x) + \int_0^t ([v_1(x,\mu) + v_2(x,\mu)]/2)d\mu + w(x, t), \tag{25}$$

де $w(x, t)$ визначається з (18).

Якщо нелінійні функції f, η задовольняють умову Ліпшіца, то система інтегральних рівнянь Вольтерра має один і тільки один неперервний розв'язок, що відповідає згідно з [2] існуванню гладкого розв'язку задачі (1) – (4).

Отже, справедлива наступна теорема.

Теорема. *Нехай виконуються умови:*

1. *Функції*

$$\begin{aligned} &\varphi(x) \in C^2([0, l]), \\ &\psi(x) \in C^1([0, l]). \end{aligned} \tag{26}$$

2. *Функції* $f(u_t(x, t), \varepsilon)$, $\eta(u(0, l))$ *визначені для довільної гладкої функції* $u(x, t)$, *неперервні на множині* $\Pi_T = \{(x, t)\colon 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\} \times (0, \varepsilon_0)$ *і задовольняють умову*

$$\left|f(u_t^1, \varepsilon) - f(u_t^2, \varepsilon)\right| \le K \max_{(x,t)} \left|u_t^1 - u_t^2\right|, \quad (x, t) \in \Pi_T, \tag{27}$$

$$\left|\eta(u^1) - \eta(u^2)\right| \le K \max_t \left|u^1 - u^2\right|, \quad x = 0, \quad t \in [0, T]. \tag{28}$$

Тоді мішана задача (1)–(4) *має єдиний гладкий розв'язок на прямокутнику* Π_T.

***Зауваження.* 1.** Якщо при $x = l$ розглядати умову, аналогічну умові (3) при $x = 0$, то при введенні додаткових невідомих функцій $u(l, t)$ і $u'(l, t)$ аналогічно $\theta(t)$ і $\theta_1(t)$ система доповниться двома рівняннями вигляду (24).

2. Твердження теореми не зміниться, якщо умови Ліпшіца замінити більш слабкими (інтегральними)

$$\int_0^t |\Delta f(u_t(x, \tau), \varepsilon)| d\tau \le K \int_0^t \max_{x;\,\theta \le \tau} |\Delta u_t(x, \theta)| d\tau, \quad (x, t) \in \Pi_T, \tag{29}$$

$$\int_0^t |\Delta \eta(u)| d\tau \le K \int_0^t |\Delta u| d\tau, \quad x = 0, \tag{30}$$

де $\Delta u = \overline{u} - u$ та ін., а стала K визначається оператором F.

1. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 736 с.
2. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И.* Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. – Киев: Наук. думка, 1991. – 232 с.

Одержано 02.04.97