УДК 517.9

В. Д. Кошманенко, О. В. Самойленко (Ін-т математики НАН України, Київ)

СИНГУЛЯРНІ ЗБУРЕННЯ СКІНЧЕННОГО РАНГУ. ТОЧКОВИЙ СПЕКТР

Necessary and sufficient conditions of appearance of additional point spectrum under singular perturbations of finite rank are found.

Знайдено необхідні та достатні умови виникнення додаткового точкового спектра при сингулярних збуреннях скінченного рангу.

1. Вступ. 1. Нехай $A = A^* \geq 1$ — самоспряжений необмежений оператор у сепарабельному комплексному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$ і нормою $\|\cdot\|$; $\mathcal{D}(\cdot)$ і $\mathcal{R}(\cdot)$ позначають операторну область визначення і область значень відповідно. У роботі досліджується сингулярно збурений оператор $\tilde{A}$, який відповідає формальному виразу

$$A + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \langle \cdot, \omega_i \rangle \omega_i, \quad \omega_i \in \mathcal{H}_- \setminus \mathcal{H}, \quad 0 \neq \lambda_i \in \mathbb{R}^1, \; N < \infty,$$

де $\mathcal{H}_-$ — поповнення $\mathcal{H}$ по нормі $\|A^{-1} \cdot\|$. Точне означення $\tilde{A}$ використовує формулу М. Крейна для резольвент. Досліджуються умови існування розв'язків задачі на власні значення: $\tilde{A}\psi = \alpha\psi$, $\alpha < 1$.

Згідно з теорією, розвинутою в [1], самоспряжений оператор $\tilde{A} \neq A$ в $\mathcal{H}$ називається сингулярно збуреним по відношенню до A, якщо множина

$$\mathcal{D} := \{ f \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(\tilde{A}) \,|\, Af = \tilde{A}f \}$$

є щільною в $\mathcal{H}$. Таким чином, звуження $\dot{A} := A \restriction \mathcal{D} \equiv \tilde{A} \restriction \mathcal{D}$ є замкненим симетричним оператором в $\mathcal{H}$, а A і $\tilde{A}$ є його різними самоспряженими розширеннями.

Нехай дефектні числа симетричного оператора $\dot{A}$ скінченні, $n^{\pm}(\dot{A}) = N < \infty$. Позначимо через $\mathcal{A}^N(A)$ відповідну множину сингулярно збурених операторів $\tilde{A}$, для яких існує обернений $\tilde{A}^{-1}$.

Введемо по A оснащений простір Гільберта [2]:

$$\mathcal{H}_- \supset \mathcal{H}_0 \equiv \mathcal{H} \supset \mathcal{H}_+, \tag{1}$$

де $\mathcal{H}_+ = \mathcal{D}(A)$ в нормі $\|\cdot\|_+ := \|A \cdot\|$, а $\mathcal{H}_-$ спряжений до $\mathcal{H}_+$ відносно $\mathcal{H}_0$; $\mathcal{H}_-$ — поповнення $\mathcal{H}$ за нормою $\|\cdot\|_- := \|A^{-1} \cdot\|$.

Очевидно, що обидва відображення $A : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}$, $\overline{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_-$ ($\overline{A}$ позначає замикання A) унітарні. Відзначимо деякі відомі [2] співвідношення в (1), позначаючи через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ дуальний скалярний добуток між $\mathcal{H}_-$ і $\mathcal{H}_+$:

$$\begin{gathered} \langle \omega, \varphi \rangle = (\omega, \overline{A} A \varphi)_- = (A^{-1} \overline{A}^{-1} \omega, \varphi)_+, \quad \omega \in \mathcal{H}_-, \quad \varphi \in \mathcal{H}_+, \\ \langle \omega, \varphi \rangle = (\overline{A}^{-1} \omega, A\varphi), \quad \omega \in \mathcal{H}_-, \quad \varphi \in \mathcal{H}_+, \\ \langle f, \varphi \rangle = (f, \varphi), \quad f \in \mathcal{H}_0, \quad \varphi \in \mathcal{H}_+. \end{gathered} \tag{2}$$

Нехай в $\mathcal{H}_-$ задано ортонормовану множину лінійно незалежних відносно $\mathcal{H}$ елементів

$$\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^N, \quad (\omega_i, \omega_k)_- = \delta_{ik}, \quad \operatorname{span}\Omega \cap \mathcal{H} = \{0\}. \tag{3}$$

Введемо оператор $T\colon \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_-$:

$$T\varphi \equiv T_{\Lambda,\Omega}\varphi := \sum_{i=1}^N \lambda_i \langle \varphi, \omega_i \rangle \omega_i, \quad \varphi \in \mathcal{H}_+,$$

$$\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^N, \quad 0 \neq \lambda_i \in \mathbb{R}^1. \tag{4}$$

Згідно з [1, 3, 4] кожен такий оператор буде сингулярним в $\mathcal{H}$. Останнє означає, що множина $\operatorname{Ker} T$ є щільною в $\mathcal{H}$. Цей факт є наслідком умови (3) (докладніше див. в [1, 3, 4]). Очевидно, $T\colon \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_-$ є самоспряженим у сенсі ($\langle T\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, T\psi \rangle$, $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_+$) оператором скінченного рангу: $\dim \mathcal{R}(T) = N < \infty$.

Множину всіх таких операторів позначаємо через $\mathcal{T}^N(A)$.

Теорема [1, 3, 5]. *Формула*

$$\tilde{A}^{-1} = A^{-1} + B_0^{-1} P_0, \tag{5}$$

де P_0 *— ортогональний проектор в* $\mathcal{H}$ *на підпростір* $\mathcal{N}_0 = \ker \dot{A}^* \equiv \overline{A}^{-1}\mathcal{R}(T)$, *а* B_0 *— звуження оператора* $\overline{A}^{-1}TA^{-1}$ *на* $\mathcal{N}_0$, *встановлює взаємно однозначну відповідність між* $\tilde{A} \in \mathcal{A}^N(A)$ *і* $T \in \mathcal{T}^N(A)$. *При цьому* $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\dot{A}) = \ker T$.

Зазначимо, що (5) є частинним випадком формули М. Крейна для резольвент [6, 7]

$$\tilde{R}_z = R_z + B_z^{-1} P_z, \tag{6}$$

де $R_z = (A - z)^{-1}$, $\tilde{R}_z = (\tilde{A} - z)^{-1}$, P_z — ортопроектор на дефектний підпростір $\mathcal{N}_{\bar{z}}$ оператора $\dot{A} := A \restriction \ker T$, а операторна функція $B_z\colon \mathcal{N}_{\bar{z}} \to \mathcal{N}_z$ визначається за формулою

$$B_z = P_z (A - z) A^{-1} [P_0 B_0 - z A (A - z)^{-1} P_0] (A - z) A^{-1} P_{\bar{z}} \tag{7}$$

(докладніше див. в [1, 3, 6–10]).

Кожний $\tilde{A} = A_{\Lambda,\Omega}$, визначений формулами (5–7) по A і $T = T_{\Lambda,\Omega} \in \mathcal{T}^N(A)$, є, очевидно, сингулярним збуренням A скінченного рангу. Він має наступний опис [1]:

$$\tilde{A} g = A f, \quad \mathcal{D}(\tilde{A}) = \{ g \in \mathcal{H} \mid g = f + B_0^{-1} P_0 A f,\ f \in \mathcal{D}(A) \}. \tag{8}$$

Докладніше, кожний елемент g з області визначення $\mathcal{D}(\tilde{A})$ має зображення

$$g = f + \sum_{i=1}^N \lambda_i^{-1} (Af, \eta_i) \eta_i, \quad \eta_i := \overline{A}^{-1} \omega_i, \quad f \in \mathcal{D}(A). \tag{9}$$

З (9) випливає, що $0 \neq g \in \mathcal{H}$ належить до $\mathcal{D}(\tilde{A})$, тільки якщо $g - P_0 g = f \in \mathcal{D}(A)$. При цьому незалежно від того, що $P_0 g = 0$ чи $P_0 g \neq 0$, значення $\tilde{A} g$ завжди співпадає з Af.

Зауважимо, що в підпросторі $\mathcal{N}_0$ набір векторів $\eta_i = \overline{A}^{-1} \omega_i$, $i = 1, \ldots, N$, утворює ортонормований базис, у якому оператор B_0 задається діагональною матрицею

$$B_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix}. \tag{10}$$

2. Попередні факти. Нехай сингулярне збурення оператора $A \geq 1$ скінченного рангу фіксоване, тобто задано оператор $\tilde{A} \in \mathcal{A}^N(A)$, $N < \infty$.

Мета цієї роботи: знайти умови на параметри сингулярного оператора $T = T_{\Lambda, \Omega}$ (див. (3), (4)), які забезпечують появу точкового спектра в оператора $\tilde{A}$ на довільному проміжку $[a, b] \subset (-\infty, 1)$.

Взагалі, дослідження структури спектрів і відмінностей у спектрах при самоспряжених розширеннях симетричних операторів проводилось у багатьох публікаціях, як в конкретних моделях, так і в абстрактних постановках (див., наприклад, [1, 5–13]).

У п. 3 знайдено двосторонню нерівність на оператор B_0 (див. (10)), яка гарантує існування власних значень у оператора $\tilde{A}$ на $[a, b]$; при цьому для їх знаходження використовується відомий принцип мінімакса [14]. Відзначимо, що цю нерівність можна також одержати, виходячи з теореми 5 в [9], використовуючи поняття функції Вейля та простір граничних значень.

Наступні допоміжні твердження взагалі не є новими. Ми їх наводимо з огляду на повноту викладу і використання в подальшому тексті.

Позначимо $\mathcal{U}_\alpha$: $AR_\alpha \equiv A(A-\alpha)^{-1}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $\alpha \in (-\infty, 1)$. Введемо в підпросторі $\mathcal{N}_0 = \ker \dot{A}^*$ сім'ю самоспряжених операторів

$$M_\alpha := P_0 \mathcal{U}_\alpha P_0 \equiv \alpha P_0 R_\alpha P_0 + P_0, \quad \alpha < 1,$$

де, нагадаємо, P_0 — ортопроектор в $\mathcal{H}$ на $\mathcal{N}_0$. Очевидно, M_α залежить від α неперервно.

Твердження 1. *Справедливе співвідношення*

$$M_{\alpha_1} \leq M_{\alpha_2}, \quad \alpha_1 \leq \alpha_2 < 1. \tag{11}$$

Доведення. Не втрачаючи загальності, припустимо, що спектр оператора A простий і чисто абсолютно неперервний. Тоді для будь-якого $h \in \mathcal{N}_0$ маємо

$$((M_{\alpha_1} - M_{\alpha_2})h, h) = \int_1^\infty \left(\frac{\alpha_2}{x - \alpha_2} - \frac{\alpha_1}{x - \alpha_1} \right) |h(x)|^2 d\rho(x) =$$

$$= \int_1^\infty \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)}{(x - \alpha_2)} \frac{x|h(x)|^2}{(x - \alpha_1)} d\rho(x) \geq 0, \quad \alpha_2 \geq \alpha_1,$$

тому що $(x - \alpha_2)(x - \alpha_1) > 0$, оскільки $\alpha_2 < 1 \leq x$, де $\rho(x)$ — спектральна міра оператора A.

Операторна функція αM_α, $\alpha \in (-\infty, 1)$, має таку ж властивість.

Твердження 2. *Справедливе співвідношення*

$$\alpha_1 M_{\alpha_1} \leq \alpha_2 M_{\alpha_2}, \quad \alpha_1 \leq \alpha_2 < 1. \tag{12}$$

Доведення аналогічне попередньому.

Твердження 3. *Якщо вектор* $\psi \in \mathcal{D}(\tilde{A})$ *задовольняє рівняння*

$$\tilde{A}\psi = \alpha\psi, \quad 0 \neq \alpha < 1, \tag{13}$$

то ψ *належить дефектному підпростору* $\mathcal{N}_\alpha$ *оператора* $\dot{A}$ $\left(\dot{A}^* \mathcal{N}_\alpha = \alpha \mathcal{N}_\alpha\right)$.

Доведення. Згідно з (9) вектор ψ має вигляд $\psi = \varphi + \eta$, $\varphi \in \mathcal{D}(A)$, $\eta \in \mathcal{N}_0$. Тому завдяки (8) одержуємо $\tilde{A}\psi = \alpha\psi = A\psi = \alpha\varphi + \alpha\eta$. Отже, згідно з операторною тотожністю

$$\alpha R_\alpha + I = aR_\alpha \equiv \mathcal{U}_\alpha \tag{14}$$

(I — одиничний оператор в $\mathcal{H}$), маємо $\varphi = \alpha(A-\alpha)^{-1}\eta$ і $\psi = \alpha R_\alpha\eta + \eta = \mathcal{U}_\alpha\eta$. Відомо [7], що

$$\mathcal{U}_\alpha\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}_\alpha. \tag{15}$$

Отже, $\eta(\alpha) = \mathcal{U}_\alpha\eta \in \mathcal{N}_\alpha$. Таким чином, кожен вектор ψ, який задовольняє рівняння (13), має представлення

$$\psi = \eta(\alpha) = \mathcal{U}_\alpha\eta \equiv \alpha R_\alpha\eta + \eta, \quad \eta \in \mathcal{N}_0, \quad 0 \neq \alpha < 1. \tag{16}$$

Але, звичайно, не кожен вектор ψ вигляду (16) є власним для $\tilde{A}$.

Твердження 4. *Вектор* $\psi = \eta(\alpha)$ *вигляду* (16) *є власним вектором оператора* $\tilde{A}$, *тобто* $\tilde{A}\eta(\alpha) = \alpha\eta(\alpha)$, *тоді і саме тоді, коли його прообраз* η *відносно відображення* $\mathcal{U}_\alpha$ *є розв'язком рівняння*

$$(B_0 - \alpha M_\alpha)\eta = 0. \tag{17}$$

Доведення. Оскільки $\eta(\alpha)$ повинен належати $\mathcal{D}(\tilde{A})$, то згідно з (8) його компоненти $\alpha R_\alpha\eta$ і η пов'язані умовою

$$\eta = B_0^{-1}P_0A(\alpha R_\alpha\eta) = \alpha B_0^{-1}P_0\,\mathcal{U}_\alpha\eta,$$

яка, очевидно, еквівалентна (17).

Отже, виходить, що вектор $\eta(\alpha) = \mathcal{U}_\alpha\eta$, $\eta \in \mathcal{N}_0$, є власним для $\tilde{A}$ тоді і лише тоді, коли він належить області визначення цього оператора, $\eta(\alpha) \in \mathcal{D}(\tilde{A})$. Тобто для $\eta \in \mathcal{N}_0$ умова (17) еквівалентна тому, що $\eta(\alpha) = \mathcal{U}_\alpha\eta \in \mathcal{D}(\tilde{A})$. Зазначимо, що число $\alpha = 0$ може стати власним значенням тоді і тільки тоді, коли в (10) хоча б одне з чисел $\lambda_i = 0$, при цьому $\eta_i \in \mathcal{D}(\tilde{A})$ і $\tilde{A}\eta_i = B_0\eta_i = 0$. Але в цьому випадку $\tilde{A} \notin \mathcal{A}^N(A)$, оскільки $\tilde{A}^{-1}$ не існує. Тому ми покладаємо $\lambda_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, N$, а також $\alpha \neq 0$.

3. Існування власних значень оператора $\tilde{A}$. Відома теорема Вейля та Неймана [7] гарантує, що неперервні спектри операторів A і $\tilde{A} \in \mathcal{A}^N(A)$, $N < \infty$, співпадають, тому що резольвенти таких операторів відрізняються на оператор скінченного рангу.

Тут знайдено умови, за яких у оператора $\tilde{A}$ з'являється точно N власних векторів із ненульовими власними значеннями на відрізку $[a, b] \subset (-\infty, 1)$.

Почнемо з випадку $N = 1$, коли сингулярно збурений оператор, $\tilde{A} \in \mathcal{A}^1(A)$, фіксується вектором $\omega \in \mathcal{H}_-\backslash\mathcal{H}$, $\|\omega\|_- = 1$, і параметром $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}^1$. Отже, зараз $\tilde{A} \equiv A_{\lambda,\omega}$. Для існування розв'язку задачі (13) достатньо задовольнити лише одну умову.

Теорема 1. *Оператор* $\tilde{A} \equiv A_{\lambda,\omega} \in \mathcal{A}^1(A)$ *на відрізку* $[a, b] \subset (-\infty, 1)$ *має просте власне значення* $\alpha_0 \neq 0$ *тоді і лише тоді, коли параметр* λ *задовольняє умову*

$$a\left((\overline{A} - a)^{-1}\omega, \overline{A}^{-1}\omega\right) \leq \lambda \leq b\left((\overline{A} - b)^{-1}\omega, \overline{A}^{-1}\omega\right). \tag{18}$$

Доведення. З монотонності функції $\alpha m(\alpha, \omega) := \alpha(M_\alpha\eta, \eta)$ (твердження 2) та умови (18) випливає, що для деякого $\alpha_0 \in [a, b]$ виконується рівність $\lambda = \alpha_0(M_{\alpha_0}\eta, \eta)$. Отже, $(\lambda - \alpha_0 M_{\alpha_0})\eta = 0$. Тепер твердження 4 гарантує, що вектор $\eta(\alpha_0) = AR_{\alpha_0}\eta$ є власним для оператора $A_{\lambda,\omega}$. Навпаки, нехай для $\alpha_0 \in [a, b]$ у оператора $\tilde{A}$ існує власний вектор, $\tilde{A}\eta(\alpha_0) = \alpha_0\eta(\alpha_0)$. З тверджень 3 та 4 випливає, що вектор $\eta(\alpha_0) \in \mathcal{N}_{\alpha_0}$ і для нього має місце представлення $\eta(\alpha_0) = AR_{\alpha_0}\eta$, $\eta \in \mathcal{N}_0$. При цьому для η виконується рівність $(\lambda - \alpha_0 M_{\alpha_0})\eta = 0$ (див. (17)). Отже, завдяки одновимірності $\mathcal{N}_0$ маємо $\alpha_0 m(\alpha_0, \omega) = \lambda$. А завдяки монотонності $am(a, \omega) \le \alpha_0 m(\alpha_0, \omega) \le bm(b, \omega)$, що й доводить (18).

Зауваження. З доведення випливає, що для будь-якої пари $\omega \in \mathcal{H}_- \backslash \mathcal{H}$ і $\alpha_0 \in (-\infty, 1)$ існує λ $\left(\lambda = \alpha_0(M_{\alpha_0}\overline{A}^{-1}\omega, \overline{A}^{-1}\omega)\right)$ таке, що для оператора $A_{\lambda,\omega}$ число α_0 є простим власним значенням. Максимальні межі зміни параметра λ визначаються умовами

$$\lim_{\alpha \to -\infty} \alpha m(\alpha, \omega) < \lambda < \lim_{\alpha \uparrow 1} \alpha m(\alpha, \omega). \tag{19}$$

Приклади показують, що ці межі можуть бути як скінченними, так і нескінченними.

Розглянемо загальний випадок, коли $1 \le N < \infty$. Наступна теорема містить основний результат роботи.

Теорема 2. *Оператор* $\tilde{A} = A_{\Lambda,\omega} \in \mathcal{A}^N(A)$ *на відрізку* $[a, b] \subset (-\infty, 1)$ *має* N *ненульових власних значень* $\alpha_1 \le \alpha_2 \le \ldots \le \alpha_N$ *тоді і тільки тоді, коли оператор* B_0 *задовольняє умови*

$$aM_a \le B_0 \le bM_b. \tag{20}$$

При цьому кожне значення α_i, $1 \le i \le N$, *є розв'язком рівняння* $\mu_i(\alpha) = 0$, *де*

$$\mu_i(\alpha) = \max_{\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}_0} \min_{h \in \mathcal{N}'} \{((B_0 - \alpha M_\alpha)h, h) \mid \|h\| = 1\}, \tag{21}$$

$\operatorname{codim} \mathcal{N}' = N - N(\alpha_{i-1})$, *а* $N(\alpha_k)$, $k = i - 1$, *позначає сукупну кратність усіх власних значень* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Доведення. Розглянемо ермітову операторну функцію

$$F(\alpha) := B_0 - \alpha M_\alpha, \quad M_\alpha = P_0 A(A - \alpha)^{-1} P_0.$$

Очевидно, $F(\alpha)$ неперервно (аналітично) і монотонно (твердження 2) залежить від α. Згідно з (20) маємо

$$B_0 - bM_b \le 0, \quad B_0 - aM_a \ge 0. \tag{22}$$

Тому для кожного вектора $h \in \mathcal{N}_0$, $\|h\| = 1$, існує таке найменше значення параметра $\alpha = \alpha(h) \in [a, b]$, при якому $f_\alpha(h) := (F(\alpha)h, h) = 0$. Зрозуміло, що взагалі це не означає, що h є власним вектором для $F(\alpha)$.

Значення параметра $\alpha = \alpha_0$ назвемо нулем операторної функції $F(\alpha)$, якщо для деякого $0 \ne \eta \in \mathcal{N}_0$ виконується рівність $F(\alpha)\eta = 0$.

Таким чином, згідно з твердженням 4 умова (20) еквівалентна тому, що $F(\alpha)$ має N нулів (з урахуванням можливої кратності) у $F(\alpha)$ на відрізку $[a, b]$.

Нехай $\alpha \in [a, b]$ фіксоване. Позначимо через $\mu_1(\alpha)$ найменше власне значення ермітового оператора $F(\alpha) = B_0 - \alpha M_\alpha$ у підпросторі $\mathcal{N}_0$. Згідно з принципом мінімаксу [14]

$$\mu_1(\alpha) = \min_{h \in \mathcal{N}_0} \{f_\alpha(h) \,|\, \|h\| = 1\}.$$

Згідно з (20) $\mu_1(a) \geq 0$, $\mu_1(b) \leq 0$. А завдяки неперервності по α існує $\alpha = \alpha_1 \in [a, b]$, при якому $\mu_1(\alpha_1) = 0$. Оскільки кожному вектору $h = \eta \in \mathcal{N}_0$, на якому досягається цей мінімум, відповідає власний вектор $\eta(\alpha_1) = \mathcal{U}_{\alpha_1}\eta$ оператора $\tilde{A}$ (твердження 4), тобто $\tilde{A}\eta(\alpha_1) = \alpha_1 \eta(\alpha_1)$, то кратність $\mu_1(\alpha_1)$ співпадає з кратністю α_1, яку позначаємо через $N(\alpha_1)$. Вона не перевищує N, $N(\alpha_1) \leq N$ (теорема 18, [6]). Якщо $N(\alpha_1) = N$, то в один бік теорему доведено, оскільки з (20) і (22) випливає, що оператор $F(\alpha) < 0$, $\alpha_1 < \alpha$, а це еквівалентно відсутності нових нулів у $F(\alpha)$, а отже, і власних значень у $\tilde{A}$ на $[a, b]$.

Припустимо $N(\alpha_1) < N$. Тоді оператор $F(\alpha_1) \geq 0$ має $N - N(\alpha_1)$ строго додатних власних значень: $0 < \mu_2(\alpha_1), \mu_3(\alpha_1), \ldots$. Завдяки неперервності і монотонності існує $\varepsilon > 0$ таке, що для всіх $\beta \in (\alpha_1, \varepsilon)$ оператор $B_0 - \beta M_\beta$ має $N(\alpha_1)$ строго від'ємних і $N - N(\alpha_1)$ строго додатних власних значень. Найменше додатне власне значення оператора $F(\alpha)$, $\alpha > \alpha_1$, позначаємо через $\mu_2(\alpha)$. При збільшенні α від ε до b завдяки монотонності існує $\alpha_2 \in (\alpha_1, b)$ таке, що $\mu_2(\alpha_2) = 0$. За принципом мінімаксу

$$\mu_2(\alpha_2) = 0 = \max_{\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}_0} \min_{h \in \mathcal{N}'} \{f_\alpha(h) \,|\, \|h\| = 1\}, \tag{23}$$

$\operatorname{codim} \mathcal{N}' = N - N(\alpha_1)$. Зрозуміло, що $N(\alpha_2) \leq N$. Далі повторюються міркування, аналогічні випадку з α_1. І так до того часу, доки не одержимо $N(\alpha_{i=N}) = N$. Підкреслимо, що кожне значення α_i враховується у відповідності до його кратності. При цьому $F(\alpha_N) \leq 0$ і $F(\alpha) < 0$, $\alpha < \alpha_N$. Зрозуміло, всі такі α_i визначаються згідно з (21) і задовольняють рівняння вигляду (23). Отже, теорему доведено в один бік.

Зазначимо, що в дійсності з (20) випливає більш точна двостороння нерівність

$$\alpha_1 M_{\alpha_1} \leq B_0 \leq \alpha_N M_{\alpha_N}, \quad a \leq \alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_N \leq b. \tag{24}$$

Навпаки, нехай відомо, що оператор $\tilde{A}$ має N власних значень $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in [a, b] \subset (-\infty, 1)$. Доведемо, що тоді оператор B_0 задовольняє (24), а отже, і (20). Згідно з попередніми міркуваннями числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ є нулями операторної функції $F(\alpha)$. Припустимо, що нерівність $\alpha_1 M_{\alpha_1} \leq B_0$ не виконується. Це означає завдяки монотонному зростанню αM_α при $-\infty < \alpha < \alpha_1$, що $F(\alpha)$ має нуль $\beta < \alpha_1$. Але тоді число β також є власним значенням оператора $\tilde{A}$, що суперечить теоремі 18 з [6]. Аналогічно, від супротивного встановлюється справедливість нерівності $B_0 \leq \alpha_N M_{\alpha_N}$. Теорему повністю доведено.

4. Окремі випадки. Розглянемо ситуацію, коли множина Ω з умовами (3) фіксована, а набір чисел $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^N$ змінюється. Чи можна вибором Λ забезпечити існування розв'язку задачі $\tilde{A}\psi = \alpha\psi$ для довільного наперед заданого $\alpha \in (-\infty, 1)$?

Теорема 3. *Нехай* $\tilde{A} \equiv A_{\Lambda,\Omega} \in \mathcal{A}^N(A)$, *де* $\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^N$ *і* $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^N$ *задовольняють умови* (3) *і* (4) *відповідно; причому множина* Ω *фіксована. При-*

пустимо, що для деякого набору відмінних від нуля чисел $-\infty < \alpha_1 \le \alpha_2 \le \ldots \ldots \le \alpha_N < 1$ *виконуються умови*

$$\mathcal{U}_{\alpha_i}\eta_i \equiv \eta_i(\alpha_i) \perp \eta_k, \quad i \ne k, \quad i, k = 1, \ldots, N, \tag{25}$$

де $\eta_i := \overline{A}^{-1}\omega_i$. *Тоді вектори* $\eta_i(\alpha_i)$ *є власними для оператора* $A_{\Lambda,\Omega}$, *якщо числа* $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$, *з яких складається* Λ, *визначаються згідно з формулою*

$$\lambda_i = \alpha_i(\eta_i(\alpha_i), \eta_i) \equiv \alpha_i(AR_{\alpha_i}\eta_i, \eta_i), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{26}$$

Доведення. Зазначимо, що всі числа λ_i в (26) відмінні від нуля. Використовуючи умову (25), маємо

$$\alpha_i M_{\alpha_i}\eta_i = \alpha_i P_0 A R_{\alpha_i}\eta_i = \alpha_i(AR_{\alpha_i}\eta_i, \eta_i)\eta_i = \lambda_i\eta_i.$$

Тому кожен η_i задовольняє рівняння $(\alpha_i M_{\alpha_i} - B_0)\eta_i = 0$, де оператор B_0 визначається в базисі $\{\eta_i\}_{i=1}^N$ матрицею (10) з λ_i із (26). Тепер твердження 3 та 4 гарантують, що вектори $\eta_i(\alpha_i) = \alpha_i R_{\alpha_i}\eta_i + \eta_i$ є власними для оператора $A_{\Lambda,\Omega}$.

Виявляється, що виконання умов (25) лише для одного η_i забезпечує існування відповідного власного значення в оператора $\tilde{A}$.

Теорема 4. *Нехай набір* $\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^N$ *з умовами* (3) *фіксований. Припустимо, що для деякого* $\eta_i = \overline{A}^{-1}\omega_i$ *існує число* $\alpha \ne 0$, $-\infty < \alpha < 1$, *таке, що*

$$AR_\alpha\eta_i \perp \eta_k, \quad k \ne i, \quad k = 1, \ldots, N. \tag{27}$$

Тоді вектор $\eta_i(\alpha) := \mathcal{U}_\alpha\eta_i$ *є власним для всіх операторів* $\tilde{A} = A_{\Lambda,\Omega}$, *заданих згідно з* (5)–(10), *якщо* i*-й елемент набору* Λ *(відповідно* i*-й елемент матриці* (10)) *визначено формулою*

$$\lambda_i = \alpha(AR_\alpha\eta_i, \eta_i). \tag{28}$$

При цьому

$$\tilde{A}\eta_i(\alpha) = \alpha\eta_i(\alpha). \tag{29}$$

Доведення. Після безпосередньої перевірки з послідовним використанням (5), (9), (27) та (28) маємо

$$\tilde{A}^{-1}\eta_i(\alpha) = A^{-1}\eta_i(\alpha) + B_0^{-1}P_0\eta_i(\alpha) = R_\alpha\eta_i + \lambda_i^{-1}(\eta_i(\alpha), \eta_i)\eta_i =$$

$$= R_\alpha\eta_i + \alpha^{-1}\eta_i = \alpha^{-1}(\alpha R_\alpha + 1)\eta_i = \alpha^{-1}\eta_i(\alpha),$$

що еквівалентно (29).

Аналогічно доводиться наступна теорема.

Теорема 5. *Нехай* $\tilde{A} = A_{\Lambda,\Omega} \in \mathcal{A}^N(A)$, *де* Ω *і* Λ *фіксовані та задовольняють умови* (3) *і* (4). *Нехай, додатково, числа* λ_i *знаходяться в межах*

$$-\langle \overline{A}^{-1}\omega_i, \omega_i\rangle < \lambda_i < \lim_{\varepsilon\to 1}\left(R_\varepsilon\omega_i, \overline{A}^{-1}\omega_i\right).$$

Припустимо, що для операторів $S_i := \alpha_i\lambda_i^{-1}\mathcal{U}_{\alpha_i}$, $0 \ne \alpha_i < 1$, *виконуються умови* $(S_i\eta_i, \eta_k) = \delta_{ik}$, $i, k = 1, \ldots, N$. *Тоді вектори* $\eta_i(\alpha_i) := \mathcal{U}_{\alpha_i}\eta_i$ *будуть власними:* $\tilde{A}\eta_i(\alpha_i) = \alpha_i\eta_i(\alpha_i)$; *при цьому числа* α_i *та* λ_i *пов'язані співвідношенням* (26).

Зауваження. Якщо оператор $\dot{A}$ (або підпростір $\mathcal{N}_0$) фіксований, то вибором сингулярного збурення T (оператора B_0) можна забезпечити існування розв'язку задачі $\tilde{A}\psi = \alpha\psi$ для будь-якого α $0 \neq \alpha < 1$. Дійсно, нехай $\mu(\alpha) \neq \neq 0$ є одним з власних значень оператора $P_0 A R_\alpha P_0$, тобто $M_\alpha h = \mu(\alpha) h$ для деякого $h \in \mathcal{N}_0$, $\| h \| = 1$. Тоді $A_{\Lambda,\Omega} h(\alpha) = \alpha h(\alpha)$, $h(\alpha) = A R_\alpha h$ для кожного $A_{\Lambda,\Omega}$, збудованого за оператором B_0, у якого вектор h також є власним: $B_0 h = \lambda h$, $\lambda = \alpha \mu(\alpha)$. Це твердження випливає з того, що h задовольняє рівняння (17).

5. Приклади.

Приклад **1.** Нехай самоспряжений оператор $A = -d^2/dx^2 + 1$ в $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^1, dx)$ збурюється сингулярним оператором T рангу 2, який збудовано за узагальненими функціями $\delta_0(\alpha)$ та $\delta_0'(x)$,

$$T\varphi = \lambda_1 \langle \varphi, \omega_1 \rangle \omega_1 + \lambda_2 \langle \varphi, \omega_2 \rangle \omega_2, \quad \varphi \in W^{2,2}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0,$$

$$\omega_1(x) = 2\delta_0(\alpha), \quad \omega_2(x) = -2\delta_0'(x) \in W^{2,-2},$$

де $W^{2,\pm 2} \equiv W^{2,\pm 2}(\mathbb{R}^1, dx) = \mathcal{H}_\pm$ — звичайні простори Соболєва.

Сингулярно збурений оператор $\tilde{A} = A_{\Lambda,\Omega}$, $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, має область визначення

$$\mathcal{D}(\tilde{A}) = \{ g \in \mathcal{H} \mid g = f + 2\lambda_1^{-1} f(0) \cdot \delta_0 - 2\lambda_2^{-1} f'(0) \cdot \delta_0', \ f \in W^{2,2} \},$$

причому $\tilde{A} g = A f$. Підпростір $\mathcal{N}_0$ натягнуто на базис $\{\eta_1, \eta_2\}$, де

$$\eta_1(x) = \left(\overline{A}^{-1}\delta_0\right)(x) = 2 \int_{\mathbb{R}^1} G_{\sqrt{-1}}(x-y)\delta_0(x)\,dy = e^{-|x|},$$

$$\eta_2(x) = \left(\overline{A}^{-1}\delta_0'\right)(x) = -2 \int_{\mathbb{R}^1} G_{\sqrt{-1}}(x-y)\delta_0'(x)\,dy = e^{-|x|}\operatorname{sgn}(x),$$

$G_k(x-y) = i/(2k) e^{ik|x-y|}$ — інтегральне ядро оператора $(-d^2/dx^2 - k^2)^{-1}$.

Оскільки

$$-\langle \overline{A}^{-1}\omega_1, \omega_1 \rangle = -2, \qquad \lim_{\varepsilon \to 1} (R_\varepsilon \omega_1, \eta_1) = \infty,$$

то параметр λ_1 можна брати в межах $-2 < \lambda_1 < \infty$.

Рівність $A_{\Lambda,\Omega}\psi_1 = \alpha_1 \psi_1$ згідно з теоремою 5 еквівалентна співвідношенням $\lambda_1 = \alpha_1 (R_{\alpha_1}\omega_1 . \eta_1)$, $(R_{\alpha_1}\omega_1 . \eta_2) = 0$, $\psi_1 = A R_{\alpha_1} \eta_1$. Звідси знаходимо

$$\alpha_1 = 1 - \frac{4}{(2+\lambda_1)^2},$$

$$\psi_1(x) = c_1^{-1} e^{-c_1|x|}, \qquad c_1 = \frac{2}{2+\lambda_1}.$$

Аналогічно знаходимо власне значення і власний вектор оператора $A_{\Lambda,\Omega}$. Оскільки

$$-\langle \overline{A}^{-1}\omega_2, \omega_2 \rangle = -\infty, \qquad \lim_{\varepsilon \to 1} (R_\varepsilon \omega_2, \eta_2) = 2,$$

то знову $-\infty < \lambda_2 < 2$.

Відповідно маємо $\alpha_2 = 1 - (1 - \lambda_2/2)^2$, $\psi_2(x) = e^{-c_2|x|}\operatorname{sgn}(x)$, де $c_2 = 1 - \lambda_2/2$.

Приклад 2. Нехай оператор A множення на незалежну змінну x в $\mathcal{H} = L^2([1, \infty), dx)$ збурюється сингулярним оператором T рангу 2, який збудовано за характеристичними функціями χ_1 та χ_2 множин M_1 і M_2, $M_1 = \{x \mid x \in [2n-1; 2n],\ n = 1, 2, \ldots\}$, $M_2 = \{x \mid x \in [1; \infty) \setminus M_1\}$. Згідно з формулою

$$T\varphi = \lambda_1 \langle \varphi, \omega_1 \rangle \omega_1 + \lambda_2 \langle \varphi, \omega_2 \rangle \omega_2, \quad \varphi \in \mathcal{D}(A), \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0,$$

де вектори $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$ мають вигляд

$$\omega_1(x) = \frac{\chi_1(x)}{\sqrt{\ln 2}}, \quad \omega_1(x) = \frac{\chi_2(x)}{\sqrt{1 - \ln 2}}, \quad \omega_1(x),\ \omega_2(x) \in \mathcal{H}_-.$$

Сингулярно збурений оператор $\tilde{A} = A_{\Lambda, \Omega}$, $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, має область визначення

$$\mathcal{D}(\tilde{A}) = \{g \in \mathcal{H} \mid g = f + \lambda_1^{-1} \langle f(x), \chi_1(x) \rangle + \lambda_2^{-1} \langle f(x), \chi_2(x) \rangle,\ f \in \mathcal{D}(A)\},$$

причому $\tilde{A}g = Af$. Підпростір $\mathcal{N}_0$ натягнуто на базис $\{\eta_1, \eta_2\}$, де

$$\eta_1(x) = \frac{\chi_1(x)}{x\sqrt{\ln 2}}, \quad \eta_2(x) = \frac{\chi_2(x)}{x\sqrt{1 - \ln 2}}.$$

Використовуючи теорему 5, знаходимо розв'язки рівняння $A_{\Lambda, \Omega}\psi_i = \alpha_i \psi_i$, $i = 1, 2$:

$$\lambda_1 = \frac{1}{\ln 2} \ln \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n - \alpha_1)(2n - 1)}{2n(2n - \alpha_1 - 1)}, \quad \psi_1(x) = \frac{\chi_1(x)}{(x - \alpha_1)\sqrt{\ln 2}},$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{1 - \ln 2} \ln \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n(2n - \alpha_2 + 1)}{(2n + 1)(2n - \alpha_2)}, \quad \psi_2(x) = \frac{\chi_2(x)}{(x - \alpha_2)\sqrt{1 - \ln 2}}.$$

1. *Кошманенко В. Д.* Сингулярные билинейные формы в теории возмущений самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 175 с.
2. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 800 с.
3. *Кошманенко В. Д.* Возмущения самосопряженных операторов сингулярными билинейными формами // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 1. – С. 3–18.
4. *Кошманенко В. Д., Ота С.* Про характеристичні властивості сингулярних операторів // Там же. – 1996. – **48**, № 11. – С. 1484–1493.
5. *Brashe J. F., Koshmanenko V., Neidhardt H.* Some new aspects of Krein's extension theory // Ukr. Math. Zh. – 1994. – **46**, № 1. – P. 37–54.
6. *Крейн М. Г.* Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложение. I, II // Мат. сб. – 1947. – **20**, № 3. – С. 431–495; **21**, № 3. – С. 365–404.
7. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – Москва: Наука, 1996. – 543 с.
8. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
9. *Derkach V. A., Malamud M. M.* Generalized resolvents and the boundary value problems for Hermitian operators with gaps // J. Funct. Anal. – 1991. – **95**, № 1. – P. 1–95.
10. *Маламуд М. М.* Граничные задачи для эрмитовых операторов с лакунами // Докл. АН СССР. – 1990. – **313**, № 6. – С. 1335–1340.
11. *Альбеверио С., Гестези Ф., Хеэг-Крон Р., Хольден Х.* Решаемые модели в квантовой механике. – Москва: Мир, 1991. – 565 с.
12. *Brashe J. F.* On the spectral properties of generalized Schrödinger operators // Operator theory: Advances and applications. – 1994. – **70**. – P. 73–78.
13. *Кочубей А. Н.* Эллиптические операторы с граничными условиями на подмножестве меры нуль // Функцион. анализ и его прил. – 1982. – **16**, № 2. – С. 74–75.
14. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – Москва: Мир, 1972. – 740 с.

Одержано 16.05.96