УДК 517.95

Б. Й. Пташник (Ін-т прикл. проблем механіки і математики НАН України, Львів),
Л. П. Силюга (Пед. ін-т, Дрогобич)

БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ БЕЗТИПНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

For the typeless systems of differential equations with constant coefficients, we investigate the correctness of the problem with multipoint conditions on chosen variable and with conditions of 2π-periodicity on all other coordinates. The conditions of univalent solvability are established and the metric theorems are proved for lower bounds of small denominators which appear when constructing solutions of the problems.

Для безтипних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами досліджено коректність задачі з багатоточковими умовами за виділеною змінною та умовами 2π-періодичності за всіма іншими координатами. Встановлено умови однозначної розв'язності та доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язків задач.

1. Вступ. Перші дослідження задачі з багатоточковими умовами для рівнянь із частинними похідними були виконані в роботах [1 – 5] і стосувалися лінійних гіперболічних рівнянь. Така задача була поставлена в 1963 р. професором В. Я. Скоробогатьком і формулювалась аналогічно до відомої багатоточкової задачі для звичайних диференціальних рівнянь: нехай в області $B^p = \{(t, x)\colon 0 < t < T,\ x \in \mathbb{R}^p\}$ задано t-гіперболічне рівняння $Lu(t, x) = f(t, x)$ порядку n; треба знайти розв'язок цього рівняння, який задовольняє умови

$$u(t_j, x) = \varphi_j(x), \quad j = 1, \ldots, n, \quad 0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n \le T.$$

Ця задача полягає в знаходженні процесу, який описується заданим рівнянням, для всього проміжку часу $0 \le t \le T$, якщо відомі стани (фотографії) процесу для n фіксованих моментів часу $t = t_j$, $j = 1, \ldots, n$. Поставлена задача не буде коректною, якщо на шукану функцію $u(t, x)$ не накласти додаткових умов. Так, однорідна задача, яка розглядається в області B^1:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u(0, x) = u(T, x) = 0$$

має нетривіальні розв'язки вигляду $u(t, x) = \varphi(x + t) - \varphi(x - t)$, де $\varphi(x)$ — довільна періодична функція періоду $2T$; коли ж розв'язок шукати в класі функцій, ω-періодичних за змінною x, то єдиність розв'язку відповідної неоднорідної задачі має місце, якщо число T/ω є ірраціональне, а існування — якщо T/ω погано апроксимується раціональними числами [5, 6].

При дослідженні коректності задач з локальними багатоточковими умовами в безмежному шарі накладались умови періодичності та майже періодичності за змінними x [6, 7] або додаткові умови за змінною t [8], а в обмежених областях — умови типу умов Діріхле [9, 10].

Для деяких класів безтипних рівнянь із частинними похідними задачі з багатоточковими умовами вивчались в [11 – 13]. Багатоточкові задачі для квазілінійних гіперболічних систем першого порядку досліджувалися в [14 – 18], для лінійних еволюційних систем в [19 – 21], а для систем лінійних диференціальних та псевдодиференціальних рівнянь довільного порядку в [22, 23]. Для диференціально-операторних рівнянь задачі з багатоточковими умовами вивчалися в [24, 25].

У даній статті, яка є розвитком робіт [11, 22], досліджено коректність задач із багатоточковими умовами за виділеною змінною t та умовами періодичності за змінними $x_1, \ldots, x_p$ для безтипних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Надалі будемо використовувати такі позначення:

$$x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p; \quad k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p; \quad |k| = |k_1| + \ldots + |k_p|;$$

$$\|k\| = \sqrt{k_1^2 + \ldots + k_p^2}; \quad (k, x) = k_1 x_1 + \ldots + k_p x_p;$$

$$D = \{(t, x) \colon 0 \le t \le T,\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^p\},$$

Ω — p-вимірний тор, який отримується шляхом ототожнення протилежних граней куба $\{x \in \mathbb{R}^p \colon 0 \le x_r \le 2\pi,\ r = 1, \ldots, p\}$; Γ — простір тригонометричних многочленів

$$P(x) = \sum_{k_1 = -m}^{m} \ldots \sum_{k_p = -m}^{m} C_k \exp((ik, x)), \quad x \in [0, 2\pi]^p, \quad m = 0, 1, \ldots,$$

з комплексними коефіцієнтами, в якому збіжність визначається так:

$$\Gamma \supset P_n \underset{\Gamma}{\to} P,$$

якщо степені всіх поліномів $P_n(x)$ не перевищують деякого фіксованого числа N і при $n \to \infty$ $P_n(x) \to P(x)$; Γ' — простір всіх лінійних неперервних функціоналів над Γ зі слабкою збіжністю, який співпадає з простором формальних тригонометричних рядів [26]; $H_q(\Omega)$, $q \in \mathbb{Z}$, і $A_\delta = A_\delta(\Omega)$, $\delta > 0$, — простори 2π-періодичних функцій

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \varphi_k \exp((ik, x)),$$

з нормами

$$\|\varphi(x)\|^2_{H_q(\Omega)} = (2\pi)^p \sum_{|k| \ge 0} [1 + \|k\|^2]^q |\varphi_k|^2$$

і

$$\|\varphi(x)\|_\delta = \sum_{|k| \ge 0} |\varphi_k| \exp(\delta |k|)$$

відповідно; $H_q^n(\Omega)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $q \in \mathbb{Z}$, і $C^n([0, T]; A_\delta)$ — простори функцій $u(t, x)$, 2π-періодичних по x, які n разів неперервно диференційовні відносно t в області D, причому для кожного $t \in [0, T]$ $\partial^j u(t, x)/\partial t^j$, $j = 0, 1, \ldots, n$, належать $H_{q-j}(\Omega)$ і A_δ відповідно,

$$\|u(t, x)\|^2_{H_q^n(D)} = \int_0^T \sum_{j=0}^{n} \left\| \frac{\partial^j u(t, x)}{\partial t^j} \right\|^2_{H_{q-j}(\Omega)} dt,$$

$$\|u(t, x)\|_{C^n([0, T]; A_\delta)} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \max_{0 \le t \le T} |u_k^{(j)}(t)| \exp(\delta |k|),$$

де $u_k(t)$ — коефіцієнти Фур'є функції $u(t, x)$; відповідні простори вектор-функцій позначимо через $\tilde{\Gamma}$, $\tilde{\Gamma}'$, $\tilde{H}_q(\Omega)$, $\tilde{A}_\delta$, $\tilde{H}_q^n(D)$, $\tilde{C}^n([0, T], \tilde{A}_\delta)$, $\tilde{C}^n([0, T], \tilde{\Gamma})$, $\tilde{C}^n([0, T], \tilde{\Gamma}')$.

2. Системи рівнянь другого порядку. В області D розглянемо задачу

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x) \equiv \left(E \frac{\partial^2}{\partial t^2} - B\Delta\right) u(t, x) = f(t, x), \tag{1}$$

$$u(t_1, x) = \varphi_1(x), \quad u(t_2, x) = \varphi_2(x), \quad 0 \le t_1 < t_2 \le T, \tag{2}$$

де

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2};$$

$$u(t, x) = \mathrm{col}\,(u_1, u_2), \quad f(t, x) = \mathrm{col}\,(f_1, f_2),$$

$$\varphi_j(x) = \mathrm{col}\,(\varphi_{j_1}, \varphi_{j_2}), \;\; j = 1, 2;$$

$B = \|b_{rq}\|_{r,q=1}^2$, — матриця зі сталими комплексними елементами, E — одинична матриця. Нехай матриця B невироджена, тобто її власні числа

$$\lambda_j = b_{11} + b_{22} + (-1)^j \sqrt{(b_{11} - b_{22})^2 + 4 b_{12} b_{21}}, \quad j = 1, 2,$$

відмінні від нуля. Надалі вважатимемо, що $\lambda_1 \ne \lambda_2$. Вигляд області D накладає умови 2π-періодичності за змінними $x_1, \ldots, x_p$ на функції $u_q(t, x)$, $f_q(t, x)$, $\varphi_{1q}(x)$, $\varphi_{2q}(x)$, $q = 1, 2$.

Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді векторного ряду

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} u_k(t) \exp\big((ik, x)\big). \tag{3}$$

Кожна з функцій $u_k(t) = \mathrm{col}\,(u_{1k}, u_{2k})$ є розв'язком задачі

$$T(k) u_k(t) = \left(E \frac{d^2}{dt^2} + B\|k\|^2\right) u_k(t) = f_k(t), \tag{4}$$

$$u_k(t_1) = \varphi_{1k}, \quad u_k(t_2) = \varphi_{2k}, \tag{5}$$

де

$$\varphi_{1k} = \mathrm{col}\,(\varphi_{11k}, \varphi_{12k}), \quad \varphi_{2k} = \mathrm{col}\,(\varphi_{21k}, \varphi_{22k}),$$

$$f_k(t) = \mathrm{col}\,(f_{1k}, f_{2k});$$

φ_{1qk}, φ_{2qk}, $f_{qk}(t)$ — коефіцієнти Фур'є відповідно функцій $\varphi_{1q}(x)$, $\varphi_{2q}(x)$, $f_q(t, x)$. Для довільного $k \in \mathbb{Z}^p$ розв'язок задачі (4), (5) має вигляд

$$u_k(t) = w_k(t) + v_k(t), \tag{6}$$

де $w_k(t) = \mathrm{col}\,(w_{1k}, w_{2k})$ і $v_k(t) = \mathrm{col}\,(v_{1k}, v_{2k})$ — розв'язки відповідно таких задач:

$$T(k) w_k(t) = 0, \quad w_k(t_1) = \varphi_{1k}, \quad w_k(t_2) = \varphi_{2k}, \tag{7}$$

$$T(k) v_k(t) = f_k(t), \quad v_k(t_1) = 0, \quad v_k(t_2) = 0. \tag{8}$$

***Зауваження* 1.** При $k = (0)$ завжди існує єдиний розв'язок

$$u_0(t) = w_0(t) + v_0(t)$$

задачі (4), (5), де $w_0(t) = \mathrm{col}\,(w_{10}, w_{20})$ і $v_0(t) = \mathrm{col}\,(v_{10}, v_{20})$,

$$\begin{cases} w_{j0}(t) = \left[\varphi_{1j0}\left(\dfrac{t_2-t_1}{t_j-t}+1\right)-\varphi_{2j0}\right]\dfrac{t_1-t}{t_2-t_1}, & j=1,2, \\ v_{j0}(t) = \displaystyle\int_0^T \left(\frac{|t-\tau|}{2}+\frac{|t_2-\tau|(t_1-t)-|t_1-\tau|(t_2-t)}{2(t_2-t_1)}\right) f_{j0}(\tau)\,d\tau, & j=1,2. \end{cases} \tag{9}$$

Для кожного $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$ системі (4) відповідає характеристичне рівняння $\det(E\mu^2 + B\|k\|^2) = 0$, яке має такі розв'язки: $\pm\mu_j(k)$, $j=1,2$, де

$$\mu_j \equiv \mu_j(k) = i\|k\|\sqrt{|\lambda_j|}\left(\cos\left(\frac{\psi_j}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\psi_j}{2}\right)\right), \tag{10}$$

$$\psi_j = \arg\lambda_j, \quad j=1,2;$$

при цьому компоненти розв'язку задачі (7) зображаються формулами

$$w_{1k}(t) = \sum_{j=1}^{2}\left(C_j f(\lambda_j)\exp(\mu_j t) + C_{2+j} f(\lambda_j)\exp(-\mu_j t)\right),$$

$$w_{2k}(t) = \sum_{j=1}^{2}\left(C_j \exp(\mu_j t) + C_{2+j}\exp(-\mu_j t)\right),$$

де коефіцієнти C_q, $q=1,2,3,4$, визначаються із системи рівнянь

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{2}\left(C_j f(\lambda_j)\exp(\mu_j t_q) + C_{2+j} f(\lambda_j)\exp(-\mu_j t_q)\right) = \varphi_{q1k}, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{2}\left(C_j \exp(\mu_j t_q) + C_{2+j}\exp(-\mu_j t_q)\right) = \varphi_{q2k}, \end{cases} \quad q=1,2, \tag{11}$$

визначник якої

$$\Delta(k) = \left(f(\lambda_1)-f(\lambda_2)\right)^2\prod_{j=1}^{2}F(\mu_j(k),t_1,t_2);$$

$$f(\lambda) = \frac{\lambda-b_{22}+b_{12}}{\lambda-b_{11}+b_{21}}, \qquad F(\mu,\xi,\eta) = \exp(-\mu(\eta-\xi)) - \exp(\mu(\eta-\xi)).$$

Поряд із задачею (1), (2) розглядатимемо однорідну задачу

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x) = 0, \tag{1'}$$

$$u(t_1,x) = 0, \quad u(t_2,x) = 0. \tag{2'}$$

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $\tilde{C}^2([0,T],\tilde{\Gamma}')$ *необхідно і досить, щоб рівняння*

$$\sqrt{|\lambda_j|}\left(\cos\left(\frac{\psi_j}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\psi_j}{2}\right)\right)(t_2-t_1)\sqrt{k_1^2+\ldots+k_p^2} - \pi l = 0, \quad j=1,2, \tag{12}$$

не мали нетривіальних розв'язків у цілих числах l, $k_1,\ldots,k_p$.

Доведення. *Необхідність.* Якщо хоча б одне з рівнянь (12) має розв'язки в цілих числах $l=l^0$, $k_1=k_1^0,\ldots,k_p=k_p^0$, $k^0=(k_1^0,\ldots,k_p^0)\neq(0)$, то $\Delta(k^0) =$

$= 0$ і однорідна задача, що відповідає задачі (7), має нетривіальні розв'язки $u_{k^0}(t)$; тоді існують нетривіальні розв'язки задачі (1′), (2′) вигляду $u(t, x) = u_{k^0}(t)\exp((ik^0, x))$, а розв'язок неоднорідної задачі, якщо він існує, не буде єдиним.

Достатність. Нехай рівняння (12) не мають нетривіальних розв'язків у цілих числах, тобто $\Delta(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$; тоді доведення випливає з єдиності розвинення функції з простору Γ' в ряд Фур'є [26].

***Наслідок* 1.** Якщо жодне з чисел λ_1, λ_2 не є дійсним додатним, то для довільних t_1, t_2 має місце єдиність розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\tilde{C}^2([0, T], \tilde{\Gamma}')$.

***Наслідок* 2.** Якщо λ_1 (або λ_2) — дійсне додатне число, то єдиність розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\tilde{C}^2([0, T], \tilde{\Gamma}')$ має місце, коли число $\lambda_1(t_2 - t_1)^2/\pi^2$ (або $\lambda_2(t_2 - t_1)^2/\pi^2$) ірраціональне.

***Наслідок* 3.** Якщо система рівнянь (1) гіперболічна, тобто якщо $\lambda_1 > 0$ і $\lambda_2 > 0$, то для єдиності розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\tilde{C}^2([0, T], \tilde{\Gamma}')$ необхідно і досить, щоб числа $\lambda_j(t_2 - t_1)^2/\pi^2$, $j = 1, 2$, були ірраціональними.

Припустимо, що має місце єдиність розв'язку задачі (1), (2). Тоді для кожного $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$ система рівнянь (11) має єдиний розв'язок, який знаходимо за формулами Крамера, а також існує єдина матриця Гріна $G_k(t, \tau)$ однорідної задачі, що відповідає задачі (8), яка зображається формулами

$$G_k(t,\tau) = \begin{cases} g_k(t,\tau) - M(k) \Big/ \left[4(f(\lambda_1) - f(\lambda_2)) \prod\limits_{j=1}^{2} F(\mu_j, t_1, t_2)\right], & 0 < \tau < t_1, \\ g_k(t,\tau) - H(k) \Big/ \left[4(f(\lambda_1) - f(\lambda_2)) \prod\limits_{j=1}^{2} F(\mu_j, t_1, t_2)\right], & t_1 < \tau < t_2, \\ g_k(t,\tau) + H(k) \Big/ \left[4(f(\lambda_1) - f(\lambda_2)) \prod\limits_{j=1}^{2} F(\mu_j, t_1, t_2)\right], & t_2 < \tau < T, \end{cases} \tag{13}$$

$$g_k(t,\tau) = \frac{\operatorname{sgn}(t-\tau)}{4(f(\lambda_1) - f(\lambda_2))} \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} f(\lambda_1)Q(\mu_1,\tau,t) - f(\lambda_2)Q(\mu_2,\tau,t) & f(\lambda_1)f(\lambda_2)(Q(\mu_2,\tau,t) - Q(\mu_1,\tau,t)) \\ Q(\mu_1,\tau,t) - Q(\mu_2,\tau,t) & f(\lambda_1)Q(\mu_2,\tau,t) - f(\lambda_2)Q(\mu_1,\tau,t) \end{Vmatrix}, \tag{14}$$

де $Q(\mu, \xi, \eta) = \exp(-\mu(\eta - \xi)) + \exp(\mu(\eta - \xi))$,

$$M(k) = \begin{Vmatrix} f(\lambda_1)V(k) - f(\lambda_2)S(k) & f(\lambda_1)f(\lambda_2)(S(k) - V(k)) \\ V(k) - S(k) & f(\lambda_1)S(k) - f(\lambda_2)V(k) \end{Vmatrix}, \tag{15}$$

$$H(k) = \begin{Vmatrix} f(\lambda_1)N(k) - f(\lambda_2)P(k) & f(\lambda_1)f(\lambda_2)(P(k) - N(k)) \\ N(k) - P(k) & f(\lambda_1)P(k) - f(\lambda_2)N(k) \end{Vmatrix}, \tag{16}$$

$$V(k) = F(\mu_2, t_1, t_2)\big(F(\mu_1, \tau+t_1, t+t_2) - F(\mu_1, \tau+t_2, t+t_1)\big),$$

$$S(k) = F(\mu_1, t_1, t_2)\big(F(\mu_2, \tau+t_2, t+t_1) - F(\mu_2, \tau+t_1, t+t_2)\big),$$

$$N(k) = F(\mu_2, t_1, t_2)\big(F(\mu_1, \tau+t_1, t+t_2) + F(\mu_1, \tau+t_2, t+t_1) + \\ + 2F(\mu_1, t_1+t_2, t+\tau)\big),$$

$$P(k) = F(\mu_1, t_1, t_2)\big(F(\mu_2, \tau+t_2, t+t_1) + F(\mu_2, \tau+t_1, t+t_2) + \\ + 2F(\mu_2, t_1+t_2, t+\tau)\big).$$

При цьому компоненти розв'язку задачі (7) мають вигляд

$$\begin{gathered} w_{1k}(t) = \big(f(\lambda_1) - f(\lambda_2)\big)^{-1} \times \\ \times \Big[\big(f(\lambda_1)F(\mu_1, t, t_2) \,/\, F(\mu_1, t_1, t_2) - f(\lambda_2)F(\mu_2, t, t_2) \,/\, F(\mu_2, t_1, t_2)\big)\varphi_{11k} + \\ + f(\lambda_1)f(\lambda_2)\big(F(\mu_1, t, t_2) \,/\, F(\mu_1, t_1, t_2) + F(\mu_2, t, t_2) \,/\, F(\mu_2, t_1, t_2)\big)\varphi_{12k} + \\ + \big(f(\lambda_1)Q(\mu_1, t, t_1) \,/\, F(\mu_1, t_1, t_2) + f(\lambda_2)Q(\mu_2, t, t_1) \,/\, F(\mu_2, t_1, t_2)\big)\varphi_{21k} + \\ + f(\lambda_1)f(\lambda_2)\big(Q(\mu_1, t, t_1) \,/\, F(\mu_1, t_1, t_2) + Q(\mu_2, t, t_1) \,/\, F(\mu_2, t_1, t_2)\big)\varphi_{22k}\Big], \\ w_{2k}(t) = \big(f(\lambda_1) - f(\lambda_2)\big)^{-1} \times \\ \times \Big[\big(F(\mu_1, t, t_2) \,/\, F(\mu_1, t_1, t_2) - F(\mu_2, t, t_2) \,/\, F(\mu_2, t_1, t_2)\big)\varphi_{11k} + \\ + \big(f(\lambda_2)F(\mu_1, t, t_2) \,/\, F(\mu_1, t_1, t_2) + f(\lambda_1)F(\mu_2, t, t_2) \,/\, F(\mu_2, t_1, t_2)\big)\varphi_{12k} + \\ + \big(Q(\mu_1, t, t_1) \,/\, F(\mu_1, t_1, t_2) + Q(\mu_2, t, t_1) \,/\, F(\mu_2, t_1, t_2)\big)\varphi_{21k} + \\ + \big(f(\lambda_2)Q(\mu_1, t, t_1) \,/\, F(\mu_1, t_1, t_2) + f(\lambda_1)Q(\mu_2, t, t_1) \,/\, F(\mu_2, t_1, t_2)\big)\varphi_{22k}\Big], \end{gathered} \tag{17}$$

а розв'язок задачі (8) зображається формулою

$$v_k(t) = \int_0^T G_k(t, \tau) f_k(\tau)\, d\tau. \tag{18}$$

На основі формул (3), (6) та зауваження 1 одержуємо формальне зображення розв'язку задачі (1), (2) у вигляді ряду

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \big(w_k(t) + v_k(t)\big)\exp\big((ik, x)\big), \tag{19}$$

де $w_k(t)$ і $v_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, визначаються формулами (9), (17), (18). Ряд (19), взагалі, розбіжний, тому що модулі величин

$$F(\mu_j, t_1, t_2) = \exp\big(-\mu_j(t_2 - t_1)\big) - \exp\big(\mu_j(t_2 - t_1)\big), \quad j = 1, 2,$$

які входять знаменниками у вирази для функцій $w_k(t)$ і $v_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$, і відмінні від нуля, можуть набувати як завгодно малих значень для нескінченного числа векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. Тому питання про існування розв'язку розглядуваної задачі пов'язане з проблемою малих знаменників.

Позначимо

$$\beta_j = \sqrt{|\lambda_j|}\sin\left(\frac{\psi_j}{2}\right)(t_2 - t_1),$$

якщо $\psi_j \neq 0, j = 1, 2$; $\alpha_j = \sqrt{|\lambda_j|}\,\frac{t_2 - t_1}{\pi}$, якщо $\psi_j = 0, j = 1, 2$; $\beta = \max(\beta_1, \beta_2)$.
Якщо $\psi_j \neq 0$, $j = 1, 2$, тобто λ_j — не дійсне додатне число, то

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\} \qquad |F(\mu_j, t_1, t_2)| \geq 2\beta_j(t_2 - t_1)\,\|k\|\exp(-\beta_j\|k\|); \tag{20}$$

якщо $\psi_j = 0$, $j = 1, 2$, тобто λ_j — дійсне додатне число, то

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\} \qquad |F(\mu_j, t_1, t_2)| = 2\left|\sin\left(\sqrt{|\lambda_j|}(t_2 - t_1)\|k\|\right)\right| =$$

$$= 2\left|\sin\left(\left(\sqrt{|\lambda_j|}\,\frac{t_2 - t_1}{\pi}\|k\| - m(k)\right)\pi\right)\right| \geq 4\,|\alpha_j\|k\| - m(k)|, \tag{21}$$

де $m(k)$ — таке ціле число, що $|\alpha_j\|k\| - m(k)| \leq 1/2$. Нерівність (21) випливає з нерівності $\sin x \geq 2x/\pi$, яка справедлива для всіх $x \in [0, \pi/2]$.

Лема. *Для майже всіх (відносно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* α *нерівність*

$$\left|\alpha - \frac{m}{\|k\|}\right| < |k|^{-\omega}, \quad \omega = p + 1 + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < 1, \tag{22}$$

має не більше ніж скінченне число розв'язків у цілих числах m, $k_1, \ldots, k_p$, $m \neq 0$, $|k| \neq 0$.

Доведення проводиться за схемою доведення леми 2.4 із ([6], розд. 1).

Теорема 2. *Нехай* λ_1 *і* λ_2 *не є дійсними додатними числами. Якщо* $\varphi_j(x) \in \tilde{A}_\delta$, $j = 1, 2$, $f(t, x) \in \tilde{C}([0, T], \tilde{A}_\delta)$, $\delta > 3\beta$, *то для довільних* t_1, $t_2 \in [0, T]$ *існує розв'язок задачі* (1), (2) *з простору* $\tilde{C}^2(D)$, *який неперервно залежить від* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ *та* $f(t, x)$.

Доведення. Оцінимо елементи матриць $M(k) = \|m_{rq}(k)\|_{r,q=1}^2$ і $H(k) = \|h_{rq}(k)\|_{r,q=1}^2$, визначених формулами (15), (16). Якщо $\psi_j \neq 0$, $j = 1, 2$, то справедливі такі оцінки:

$$\begin{cases} |m_{rq}(k)| \leq \exp(2\beta\|k\|), \\ |h_{rq}(k)| \leq \exp(2\beta\|k\|), \end{cases} \qquad r, q = 1, 2, \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}. \tag{23}$$

З формул (13) – (19) та нерівностей (20), (23) маємо

$$\|u(t, x)\|_{\tilde{C}^2(D)} \leq \sum_{j=1}^{2} \|u_j(t, x)\|_{C^2(D)} \leq$$

$$\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \sum_{j=1}^{2} Q_1 |\varphi_{jk}|\,\|k\|\exp(3\beta\|k\|) + \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} N_1\, f_k\,\|k\|\exp(3\beta\|k\|) \leq$$

$$\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \left(\sum_{j=1}^{2} Q_2 |\varphi_{jk}|\exp(\delta|k|) + N_2\, f_k \exp(\delta|k|)\right) \leq$$

$$\leq P\left(\sum_{j=1}^{2} \|\varphi_j(x)\|_\delta + \|f(t, x)\|_{\tilde{C}([0, T], \tilde{A}_\delta)}\right),$$

де

$$f_k = \max_{0 \le t \le T} |f_k(t)|, \quad z \in \mathbb{Z}^p;$$

Q_1, N_1, Q_2, N_2, P — додатні константи, які не залежать від k. Із останньої нерівності випливає доведення теореми.

Теорема 3. *Нехай* $\psi_1 = 0$ *(або* $\psi_2 = 0$*). Якщо* $\varphi_j(x) \in \tilde{A}_{\delta_1}$, $j = 1, 2$, $f(t, x) \in \tilde{C}([0, T], \tilde{A}_{\delta_1})$, $\delta_1 > 3\beta_2$ *(або* $\varphi_j(x) \in \tilde{A}_{\delta_2}$, $f(t, x) \in \tilde{C}([0, T], \tilde{A}_{\delta_2})$, $\delta_2 > 3\beta_1$*), то для майже всіх чисел* α_1 *і довільних недодатних* λ_2 *(або для майже всіх чисел* α_2 *і довільних недодатних* λ_1*) існує розв'язок задачі* (1), (2) *з простору* $\tilde{C}^2(D)$, *який неперервно залежить від* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $f(t, x)$.

Доведення. Якщо $\psi_1 = 0$, $\psi_2 \ne 0$, то виконуються нерівності

$$\begin{cases} |m_{rq}(k)| \le \exp(2\beta\|k\|), \\ |h_{rq}(k)| \le \exp(2\beta\|k\|), \end{cases} \qquad r, q = 1, 2, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}. \tag{24}$$

З леми випливає, що для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел α_1 і для всіх (крім скінченного числа) $k \in \mathbb{Z}^p$ справедлива нерівність

$$|F(\mu_1, t_1, t_2)| > |k|^{-p-1-\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1. \tag{25}$$

На основі формул (13) – (19) та нерівностей (20), (24), (25) маємо

$$\|u(t, x)\|_{\tilde{C}^2(D)} \le S\left(\sum_{j=1}^{2} \|\varphi_j(x)\|_{\delta_1} + \|f(t, x)\|_{\tilde{C}([0, T], \tilde{A}_{\delta_1})}\right),$$

де $\delta_1 > 3\beta_2$, $S = \text{const} > 0$. З останньої нерівності випливає доведення теореми для випадку, коли $\psi_1 = 0$. Якщо $\psi_1 \ne 0$, $\psi_2 = 0$, то доведення теореми проводиться аналогічно.

Теорема 4. *Нехай* λ_1 *і* λ_2 *— дійсні додатні числа. Якщо* $\varphi_j(x) \in \tilde{H}_\omega(\Omega)$, $j = 1, 2$, *і* $f(t, x) \in \tilde{C}([0, T], \tilde{H}_\omega(\Omega))$, $\omega = q + p + 2$, $q \in \mathbb{Z}$, *то для майже всіх (відносно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*), чисел* α_l, $l = 1, 2$, *існує розв'язок задачі* (1), (2) *з простору* $\tilde{H}^2_q(D)$, *який неперервно залежить від* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ *і* $f(t, x)$.

Доведення теореми випливає з нерівності

$$\|u(t, x)\|_{\tilde{H}^2_q(D)} \le R\left(\sum_{j=1}^{2} \|\varphi_j(x)\|_{\tilde{H}_\omega(\Omega)} + \|f(t, x)\|_{\tilde{C}([0, T], \tilde{H}_\omega(\Omega))}\right),$$

$$\omega = q + p + 2, \quad R > 0,$$

яку одержуємо з формул (13) – (19), нерівності (21) і леми.

3. Системи диференціальних рівнянь високих порядків.

3.1. *Випадок простих коренів характеристичного рівняння.* В області D розглядається задача

$$L\,u(t, x) \equiv \sum_{|s| = n} B_s \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{s_0} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{s_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_p}\right)^{s_p} u(t, x) = 0, \tag{26}$$

$$u(t_j, x) = \varphi_j(x), \quad j = 1, \ldots, n; \quad 0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n \le T, \tag{27}$$

де

$$s = (s_0, s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{R}_+^{p+1}, \quad |s| = s_0 + s_1 + \ldots + s_p,$$

$$u(t, x) = \mathrm{col}\,(u_1(t, x), \ldots, u_m(t, x)), \quad \varphi_j(x) = \mathrm{col}\,(\varphi_{j1}(x), \ldots, \varphi_{jm}(x)),$$

функції $u_q(t, x), \varphi_{jq}(x), j = 1, \ldots, n, q = 1, \ldots, m,$ — 2π-періодичні за змінними $x_1, \ldots, x_p$; $B_s = \|b_{rq}^s\|_{r,q=1}^m$ — квадратні матриці розміру m зі сталими комплексними елементами. Без обмеження загальності вважатимемо, що $B_{(n,0,\ldots,0)}$ — одинична матриця.

Розв'язок задачі (26), (27) шукаємо у вигляді векторного ряду (3), де $u_k(t) = \mathrm{col}\,(u_{1k}, \ldots, u_{mk})$. Підставляючи ряд (3) в систему рівнянь (26) і умови (27), для визначення кожної з вектор-функцій $u_k(t)$ одержимо багатоточкову задачу для системи звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\sum_{|s|=n} B_s (ik_1)^{s_1} \ldots (ik_p)^{s_p} \frac{d^{s_0} u_k(t)}{dt^{s_0}} = 0, \tag{28}$$

$$u_k(t_j) = \varphi_{jk}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{29}$$

де $\varphi_{jk} = (\varphi_{j1k}, \ldots, \varphi_{jmk})$, φ_{jqk}, $k \in \mathbb{Z}^p$, — коефіцієнти Фур'є функції $\varphi_{jq}(x)$, $q = 1, \ldots, m$. Легко бачити, що при $k = (0)$ завжди існує єдиний розв'язок $u_0(t)$ задачі (28), (29).

Корені $\lambda_j(k) \equiv \lambda_j^{(1)}(k) + i\lambda_j^{(2)}(k)$, $j = 1, \ldots, nm$, рівняння

$$\det B(\lambda, k) \equiv \det\left(\sum_{|s|=n} B_s \lambda^{s_0} \left(\frac{k_1}{\|k\|}\right)^{s_1} \ldots \left(\frac{k_p}{\|k\|}\right)^{s_p}\right) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}, \tag{30}$$

рівномірно обмежені відносно k; припустимо, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$ вони різні і відмінні від нуля. Тоді для кожного $\lambda_j(k)$, $j = 1, \ldots, nm$, $\mathrm{rang}\, B(\lambda_j(k), k) = m - 1$, і отже, хоча б один із мінорів порядку $m - 1$ визначника матриці $B(\lambda_j(k), k)$ є відмінним від нуля (нехай це буде мінор елемента l-го рядка цього визначника). Фундаментальна система розв'язків системи диференціальних рівнянь (28) має вигляд

$$u_{kj}(t) = f(\lambda_j(k)) \exp\,(i\|k\|\lambda_j(k)t), \quad j = 1, \ldots, nm, \tag{31}$$

де компоненти векторів

$$f(\lambda_j(k)) = (f_1(\lambda_j(k)), \ldots, f_m(\lambda_j(k))), \quad j = 1, \ldots, nm,$$

рівномірно обмежені для всіх $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$. Як компоненти вектора $f(\lambda_j(k))$ беремо мінори елементів l-го рядка, $1 \le l \le m$, визначника $\det B(\lambda_j(k), k)$, для якого вони не всі рівні нулю:

$$f_c(\lambda_j(k)) = \sum_{|\nu|=n(m-1)} F_\nu^c \lambda_j^{\nu_0}(k) \left(\frac{k_1}{\|k\|}\right)^{\nu_1} \ldots \left(\frac{k_p}{\|k\|}\right)^{\nu_p},$$

$$c = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, nm,$$

де

$$\nu = (\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_p),$$

$$F_\nu^c = \sum_{\sum_{q=1}^m s_i^{(q)} = \nu_i,\ i=\overline{1,p}} \det\| b_{rq}^{s^{(q)}} \|_{r,q=1;\, r\neq l,\, q\neq c}^m,$$

$b^{s^{(q)}}$ — елементи q-го стовпця матриці $B_{s^{(q)}}$, $s^{(q)} = (s_0^{(q)}, s_1^{(q)}, \ldots, s_p^{(q)})$.

Для кожного вектора $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$ розв'язок задачі (28), (29) зображається формулою

$$u_k(t) = \sum_{q=1}^{nm} C_{k,q}\, f(\lambda_q(k)) \exp(i\|k\|\lambda_q(k)t), \tag{32}$$

де скалярні коефіцієнти $C_{k,q}$ визначаються із системи рівнянь

$$\sum_{q=1}^{nm} C_{k,q}\, f(\lambda_q(k)) \exp(i\|k\|\lambda_q(k)t_j) = \varphi_{jk}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{33}$$

З вектор-функцій $u_{k,r}(t)$, $r = 1, \ldots, nm$, що визначаються формулами (31), побудуємо n таких матриць:

$$Y_{k,q}(t) = \left\| f_\alpha(\lambda_{\beta+m(q-1)}(k)) \exp(i\|k\|\lambda_{\beta+m(q-1)}(k)t) \right\|_{\alpha,\beta=1}^m, \quad q = 1, \ldots, n.$$

Матриці $Y_{kq}(t)$, $q = 1, \ldots, n$, утворюють систему n лінійно незалежних розв'язків однорідного матричного диференціального рівняння [27]

$$\sum_{|s|=n} B_s Y_k^{(s_0)}(t) \left(\frac{k_1}{\|k\|}\right)^{s_1} \cdots \left(\frac{k_p}{\|k\|}\right)^{s_p} = 0$$

з невідомою матрицею $Y_k(t)$. Розглянемо матрицю $U(k) = \|Y_{kq}(t_j)\|_{j,q=1}^n$ і позначимо $\Delta(k) = \det U(k)$. Для кожного $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$ однорідна задача, яка відповідає задачі (28), (29), має нетривіальні розв'язки тоді і тільки тоді, коли $\Delta(k) = 0$.

Теорема 5. *Для єдиності розв'язку задачі* (26), (27) *у просторі* $\tilde{C}^n([0,T], \tilde{\Gamma}')$ *необхідно і досить, щоб рівняння* $\Delta(k) = 0$ *не мало нетривіальних розв'язків у цілих числах* $k_1, \ldots, k_p$.

Доведення аналогічне доведенню теореми 1.

Надалі вважатимемо, що має місце єдиність розв'язку задачі (26), (27). Оскільки $\Delta(k)$ є визначником системи рівнянь (33), то для кожного $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$ система (33) має єдиний розв'язок

$$C_{k,q} = \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^m \frac{\Delta_{qr}^j(k)}{\Delta(k)} \varphi_{jr,k}, \quad q = 1, \ldots, nm, \tag{34}$$

де $\Delta_{qr}^j(k)$ — алгебраїчне доповнення елемента $f_r(\lambda_q(k)) \exp(i\|k\|\lambda_q(k)t_j)$ у визначнику $\Delta(k)$. На основі формул (3), (32), (34) розв'язок задачі (26), (27) зображається у вигляді векторного ряду

$$u(t,x) = u_0(t) + \sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{(0)\}} \sum_{q=1}^{nm} \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^m f(\lambda_q(k))\, \varphi_{jr,k} \Delta_{qr}^j(k) (\Delta(k))^{-1} \times$$
$$\times \exp(i[(k,x) + \|k\|\lambda_q(k)t]). \tag{35}$$

Ряд (35), взагалі, розбіжний, тому що $|\Delta(k)|$ може бути як завгодно малим для нескінченної множини векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

Зауважимо, що для кожного $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$ справедливі оцінки

$$|\Delta^j_{qr}(k) f_l(\lambda_q(k)) \exp(i\|k\| \lambda_q(k)t| < C \exp(\mu \| k\| T), \tag{36}$$

$$j = 1, \dots, n, \quad q = 1, \dots, nm, \quad r, l = 1, \dots, m,$$

$$\mu = mn \max_{1 \le q \le nm} \left(\sup_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}} |\lambda^{(2)}_q(k)| \right),$$

C — додатна стала, не залежна від k.

Теорема 6. *Нехай існують додатні сталі* M, ν *і* $\alpha \in \mathbb{N}$ *такі, що для всіх (крім скінченного числа)* $k \in \mathbb{Z}^p$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(k)| > M \|k\|^{-\alpha-\varepsilon} \exp(-\nu \|k\| T), \quad 0 < \varepsilon < 1. \tag{37}$$

Якщо $\varphi_j(x) \in \tilde{A}_\delta$, $j = 1, \dots, n$, $\delta > (\nu + \mu)\, T$, *то існує розв'язок задачі* (26), (27), *який належить простору* $\tilde{C}^n(D)$ *і неперервно залежить від* $\varphi_j(x)$, $j = 1, \dots, n$.

Доведення. На основі формули (35), оцінок (36), (37) та рівномірної обмеженості величин $f_l(\lambda_q(k))$, $l = 1, \dots, m$, отримуємо нерівність

$$\|u(t, x)\|_{\tilde{C}^n(D)} \le Q \sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j(x)\|_\delta, \quad \delta > (\nu + \mu)\, T, \quad Q = \text{const} > 0,$$

з якої випливає доведення теореми.

Зауваження 2. При виконанні умов теореми 6 розв'язок задачі (26), (27) належить простору $\tilde{C}^n([0, T], \tilde{A}_\omega)$, де $\omega < \delta - (\nu + \mu)\, T$.

3.2. *Випадок кратних коренів характеристичного рівняння.* У цьому пункті на прикладі задачі

$$\left(E \frac{\partial^2}{\partial t^2} - B\Delta \right)^2 u(t, x) = 0, \tag{38}$$

$$u(t_j, x) = \varphi_j(x), \quad t_j = (j-1)\, t_0, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad t_0 = T/3, \tag{39}$$

яку розглядаємо в області D, покажемо, як результати п. 3.1 переносяться на випадок, коли відповідне характеристичне рівняння, аналогічне рівнянню (30), має кратні корені. У задачі (38), (39) $u(t, x) = \text{col}\,(u_1(t, x), u_2(t, x))$, $\varphi_j(x) = \text{col}\,(\varphi_{j1}, \varphi_{j2})$, $j = 1, 2, 3, 4$; матриця E, оператор Δ, матриця B та її власні числа λ_1 і λ_2 ті ж самі, що і в задачі (1), (2).

Розв'язок задачі (38), (39) шукаємо у вигляді ряду (3), де кожна з вектор-функцій $u_k(t) = \text{col}\,(u_{1k}(t), u_{2k}(t))$ визначається як розв'язок задачі

$$\left(E \frac{\partial^2}{\partial t^2} + B\|k\|^2 \right)^2 u_k(t) = 0, \tag{40}$$

$$u_k(t_j) = \varphi_{jk}, \quad t_j = (j-1)\, t_0, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad t_0 = T/3. \tag{41}$$

Характеристичне рівняння $\det\,(E\mu^2 + B\,\|k\|^2)^2 = 0$, яке відповідає системі рівнянь (40), має чотири різні корені $\pm\mu_l$, $l = 1, 2$, кратність кожного з яких дорівнює 2, де μ_l, $l = 1, 2$, визначені формулами (10). Для кожного $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$ компоненти розв'язку задачі (40), (41) зображаються формулами

$$u_{1k}(t) = \sum_{l,q=1}^{2} \left(C_{l,q} f(\lambda_l) \exp(\mu_l t) + C_{2+l,q} f(\lambda_l) \exp(-\mu_l t) \right) t^{q-1},$$

$$u_{2k}(t) = \sum_{l,q=1}^{2} \left(C_{l,q} \exp(\mu_l t) + C_{2+l,q} \exp(-\mu_l t) \right) t^{q-1},$$

де

$$f(\lambda_l) = \frac{(b_{11} - \lambda_l)^2 + b_{11} b_{21}}{b_{12}(b_{11} + b_{22} - 2\lambda_l)}, \qquad l = 1, 2,$$

а коефіцієнти $C_{m,q}$, $m = 1, 2, 3, 4$, $q = 1, 2$, визначаються із системи рівнянь

$$\sum_{l,q=1}^{2} \left(C_{l,q} f(\lambda_l) \exp(\mu_l t_j) + C_{2+l,q} f(\lambda_l) \exp(-\mu_l t_j) \right) t_j^{q-1} = \varphi_{j1k},$$
$$\sum_{l,q=1}^{2} \left(C_{l,q} \exp(\mu_l t_j) + C_{2+l,q} \exp(-\mu_l t_j) \right) t_j^{q-1} = \varphi_{j2k}, \qquad j = 1, 2, 3, 4, \tag{42}$$

визначник якої обчислюється за формулою

$$\Delta(k) = \frac{T^4}{81} (f(\lambda_1) - f(\lambda_2))^4 \prod_{l=1}^{2} \left(\exp\left(-\frac{\mu_l T}{3} \right) - \exp\left(\frac{\mu_l T}{3} \right) \right)^4.$$

Теорема 7. *Для єдиності розв'язку задачі* (38), (39) *у просторі* $\tilde{C}^4([0, T], \tilde{\Gamma}')$ *необхідно і досить, щоб жодне з рівнянь*

$$\sqrt{|\lambda_j|} \left(\cos\left(\frac{\psi_j}{2} \right) + i \sin\left(\frac{\psi_j}{2} \right) \right) T \sqrt{k_1^2 + \ldots + k_p^2} - 3\pi l = 0, \qquad j = 1, 2,$$

не мало нетривіальних розв'язків у цілих числах l, $k_1, \ldots, k_p$.

Доведення теореми проводиться за схемою доведення теореми 1.

Припустимо, що має місце єдиність розв'язку розглядуваної задачі. Тоді для кожного $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$ система рівнянь (42) має єдиний розв'язок, який визначається за формулами Крамера, а компоненти розв'язку задачі (40), (41) мають вигляд

$$\begin{gathered} u_{1k}(t) = t_0 \left(f(\lambda_2) - f(\lambda_1) \right)^{-1} \times \\ \times \sum_{j=1}^{4} \sum_{l=1}^{2} f(\lambda_l) \varphi_{j1k} Q_j \left(\exp(-\mu_l t_0) - \exp(\mu_l t_0) \right)^{-3}, \\ u_{2k}(t) = t_0 \left(f(\lambda_2) - f(\lambda_1) \right)^{-1} \times \\ \times \sum_{j=1}^{4} \sum_{l=1}^{2} \varphi_{j2k} Q_j \left(\exp(-\mu_l t_0) - \exp(\mu_l t_0) \right)^{-3}, \end{gathered} \tag{43}$$

де

$$Q_1 = t_0 \left(\exp(\mu_l t) \left(\exp(-3\mu_l t_0) - 3 \exp(-\mu_l t_0) \right) - \right.$$

$$- \exp(-\mu_l t)\left(\exp(3\mu_l t_0) - 3\exp(\mu_l t_0)\right)\big) +$$

$$+ t\big(\exp(\mu_l t)\left(\exp(-3\mu_l t_0) - \exp(-\mu_l t_0)\right) -$$

$$- \exp(-\mu_l t)\left(\exp(3\mu_l t_0) - \exp(\mu_l t_0)\right)\big),$$

$$Q_2 = 6t_0\left(\exp(-\mu_l t) - \exp(\mu_l t)\right) +$$

$$+ t\big(\exp(\mu_l t)\left(\exp(-4\mu_l t_0) - 2 + \exp(-2\mu_l t_0)\right) +$$

$$+ \exp(-\mu_l t)\left(\exp(4\mu_l t_0) - 2 + \exp(2\mu_l t_0)\right)\big),$$

$$Q_3 = 3t_0\left(\exp(-\mu_l t) - \exp(\mu_l t)\right)\left(\exp(-\mu_l t_0) - \exp(\mu_l t_0\right) -$$

$$- t\big(\exp(\mu_l t)\left(2\exp(-3\mu_l t_0) - \exp(-\mu_l t_0) - \exp(\mu_l t_0)\right) -$$

$$- \exp(-\mu_l t)\left(2\exp(3\mu_l t_0) - \exp(\mu_l t_0) - \exp(-\mu_l t_0)\right)\big),$$

$$Q_4 = 2t_0\left(\exp(-\mu_l t) - \exp(\mu_l t)\right) - t\big(\exp(\mu_l t)\left(\exp(-2\mu_l t_0) - 1\right) -$$

$$- \exp(-\mu_l t)\left(\exp(2\mu_l t_0) - 1\right)\big).$$

Питання про існування розв'язку задачі (38), (39), взагалі, пов'язане з проблемою малих знаменників, оскільки величини $|\exp(-\mu_l t_0) - \exp(\mu_l t_0)|$, $l = 1, 2$, які відмінні від нуля, можуть набувати як завгодно малих значень для нескінченного числа векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

Позначимо $b_l = \sqrt{|\lambda_l|}\sin(\psi_l/2)$, якщо $\psi_l \neq 0$, $l = 1, 2$; $a_l = \sqrt{|\lambda_l|}\,T/(3\pi)$, якщо $\psi_l = 0$, $l = 1, 2$; $b = \max(b_1, b_2)$. Якщо $\psi_l \neq 0$, $l = 1, 2$, тобто λ_l — не дійсне додатне число, то

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\} \quad |\exp(-\mu_l T/3) - \exp(\mu_l T/3)| \geq$$

$$\geq 2\,b_l \|k\| \exp(-b_l \|k\| T/3); \tag{44}$$

якщо $\psi_l = 0$, $l = 1, 2$, тобто λ_l — дійсне додатне число, то таким же чином, як при встановленні нерівності (21), дістаємо

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\} \quad |\exp(-\mu_l T/3) - \exp(\mu_l T/3)| > |\alpha_l \|k\| - m(k)|, \tag{45}$$

де $m(k)$ — таке ціле число, що $|\alpha_l \|k\| - m(k)| \leq 1/2$. Із (45) і леми випливає, що для майже кожного (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}$) числа α_l, $l = 1, 2$, нерівності

$$|\exp(-\mu_l T/3) - \exp(\mu_l T/3)| > 4\,|k|^{-p-\varepsilon/3}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad l = 1, 2, \tag{46}$$

справджуються для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

На основі формул (3), (43) та оцінок (44), (46) встановлені теореми існування класичного розв'язку задачі (38), (39), які формулюються і доводяться подібно до теорем 2, 3 і 4.

1. *Бобик О. І., Боднарчук П. І., Пташник Б. Й., Скоробогатько В. Я.* Елементи якісної теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 1972. – 175 с.
2. *Пташник Б. Й.* Аналог n-точкової задачі для лінійного гіперболічного рівняння // Укр. мат. журн. – 1961. – **23**, № 4. – С. 472–478.
3. *Пташник Б. Й.* Задача типу Валле–Пуссена для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Допов. АН УРСР. – 1966. – № 10. – С. 1254–1257.

4. *Пташник Б. Й.* n-лінійна задача для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Вісн. Львів. політехн. ін-ту. – 1967. – № 16. – С. 80–87.
5. *Пташник Б. Й.* Задача типу Валле–Пуссена для лінійних гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами // Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1967. – № 2. – С. 127–130.
6. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
7. *Пташник Б. Й., Штабалюк П. І.* Багатоточкова задача для гіперболічних рівнянь у класі функцій, майже періодичних по просторових змінних // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1992. – Вип. 35. – С. 210–215.
8. *Клюс І. С., Пташник Б. Й.* Триточкова задача для хвильового рівняння // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1996. – Вип. 45. – С. 78–85.
9. *Пташник Б. И., Салыга Б. О.* Аналог многоточечной задачи для дифференциальных уравнений с частными производными с переменными коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, № 6. – С. 728–734.
10. *Василишин П. Б., Клюс І. С., Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача для гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами // Там же. – 1996. – **48**, № 11. – С. 1468–1476.
11. *Пташник Б. Й., Силюга Л. П.* Багатоточкова задача для безтипних факторизованих диференціальних операторів // Там же. – 1996. – **48**, № 1. – С. 66–79.
12. *Пташник Б. Й., Силюга Л. П.* Багатоточкова задача для безтипних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Допов. НАН України. – 1996. – № 3. – С. 10–14.
13. *Комарницька Л. І., Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача для диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом // Там же. – 1995. – № 10. – С. 20–23.
14. *Cesari L.* A boundary value problem for quasilinear hyperbolic systems // Riv. math. univ. Parma. – 1974. – **3**, № 2. – P. 107–131.
15. *Cesari L.* A boundary value problem for quasilinear hyperbolic systems in Shauder's canonic form // Ann. Scuola norm. super. Pisa CL. sci. – 1974. – **1**, № 4. – P. 311–358.
16. *Cesari L.* Un problema ai limiti per sistemi di equazioni iperquasi lineari nella forma canonica di Shauder // Atti. Accad. naz. Lincei. Rend. cl. sci. fis., mat. e natur. – 1974. – **57**, № 5. – P. 303–307.
17. *Pucci P.* Problemi ai limiti per sistemi di equazioni iperboliche // Boll. Unione Mat., ital. B. – 1979. – **16**, № 5. – P. 87–99.
18. *Bassanini P.* Iterative methods for quasilinear hiperbolic systems in the first canonic form // Appl. Anal. – 1981. – **12**, № 2. – P. 105–117.
19. *Антыпко И. И., Перельман М. А.* О классах единственности решения нелокальной многоточечной краевой задачи в бесконечном слое // Теория функций, функцион. анализ и их приложения. – 1972. – Вып. 16. – С. 98–109.
20. *Борок В. М., Перельман М. А.* О классах единственности решения многоточечной краевой задачи в бесконечном слое // Изв. вузов. Математика. – 1973. – № 8. – С. 29–34.
21. *Віленць І. Л.* Класи єдиності розв'язку загальної крайової задачі в шарі для систем лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних // Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1974. – № 3. – С. 195–197.
22. *Пташник Б. Й.* Аналог n-точкової задачі для системи гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Там же. – 1974. – № 8. – С. 709–712.
23. *Илькив В. С., Полищук В. М., Пташник Б. И.* Нелокальная краевая задача для систем псевдодиференциальных операторов // Методы исследования дифференциальных и интегральных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1989. – С. 75–79.
24. *Валицкий Ю. Н.* Корректность многоточечной задачи для уравнения с операторными коэффициентами // Сиб. мат. журн. – 1986. – **29**, № 4. – С. 46–53.
25. *Валицкий Ю. Н.* Корректность задачи для дифференциального уравнения при заданных значениях функции и ее производных в нескольких точках // Там же. – 1996. – **37**, № 2. – С. 251–258.
26. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
27. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 526 с.

Одержано 16.04.97